Evolutionäre Algorithmen

Vorlesung 6

Price-Theorem
Genetische Algorithmen

Price-Theorem: Rahmen

- wir betrachten EA (GA) als dynamisches System

  $p_A^{(t+1)} = \sum_{B,C\in\mathcal{G}} T(A \leftarrow B,C)\frac{f(B)f(C)}{\bar{f}^2}p_B p_C$
- $p_X =$ Häufigkeit eines Individuums X
- $T(A \leftarrow B,C) =$ Wahrscheinlichkeit A aus B und C zu erzeugen
- Betrachten im weiteren eine qualitative Bewertung von einzelnen Individuen $Q : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ sowie von Populationen $\bar{Q} = \sum_{A\in\mathcal{G}} Q(A)p_A$

Price-Theorem

- $\bar{Q}^{(t+1)} = \tilde{Q}_T + Cov\left[Q(T(B,C)), \frac{f(B)f(C)}{\bar{f}^2}\right]$ mit
- durchschnittliche Bewertung der Nachkommen:

  $Q(T(B,C)) = \sum_{A\in\mathcal{G}} Q(A)T(A \leftarrow B,C)$
- Bewertung in der Population ohne Selektion:

  $\tilde{Q}_T = \sum_{B,C\in\mathcal{G}} Q(T(B,C))p_B p_C$
- Kovarianz zwischen Elterngüte und Kindbewertung:

  $$Cov\left[Q(T(B,C)), \frac{f(B)f(C)}{\bar{f}^2}\right] = \sum_{B,C\in\mathcal{G}} Q(T(B,C))\frac{f(B)f(C)}{\bar{f}^2}p_B p_C - \tilde{Q}_T$$

Bewertungsfunktionen

- Häufigkeit eines Schemas H:

  $$Q_H(A) = \begin{cases} 1, & A \in I(H) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

  $\Rightarrow$ führt zu einer Variante des Schema-Theorems
- Betrachtung eines Güteschwellwerts w:

  $$Q_w(A) = \begin{cases} 1, & A \in f(A) \succ w \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
- führt zu folgendem Theorem

Rolle der Rekombination

- ▷ Angenommen es gilt die Übertragung der Gene
- ▷ Indexmenge $r \in \mathcal{P}^{\{1,\ldots,l\}}$ bestimmt die Gene der Mutter
- ▷ komplementäre Indexmenge $r^{-1} = \{1,\ldots,l\} \setminus r$ (der Vater)
- ▷ dann ist für A und Rekombinationsmaske r:
  – Schema für die möglichen Mütter: $r(A)$
  – Schema für die möglichen Väter: $r^{-1}(A)$
- ▷ Wahrscheinlichkeit R_r, dass r auftritt

„Fehlendes“ Schema-Theorem

- ▷ $\bar{Q}_w^{(t+1)} - \bar{Q}_w^{(t)} =$

$$\sum_{r \in \mathcal{P}^{\{1,\ldots,l\}}} R_r \left(Cov\left[Q_w(A), \frac{\bar{f}_{r(A)}\bar{f}_{r^{-1}(A)}}{\bar{f}^2} \right] - \sum_{A \in \mathcal{G}} (p_A - p_{r(A)}p_{r^{-1}(A)})(Q_w(A) - \bar{Q}_w) \frac{\bar{f}_{r(A)}\bar{f}_{r^{-1}(A)}}{\bar{f}^2} \right)$$

- ▷ mit Häufigkeiten $p_{r(A)}$ und $p_{r^{-1}(A)}$ der erzeugenden Schemata von A und
- ▷ durchscnittlichen Schematagütewerten $\bar{f}_{r(A)}$ und $\bar{f}_{r^{-1}(A)}$

Folgerungen

- ▷ eine positive Kovarianz zwischen den Gütewerten der Schemata und den besseren erzeugten Kindindividuen beeinflusst die Güteentwicklung positiv
- ▷ nicht alle Schemata werden verarbeitet, sondern nur diejenigen mit $R_r > 0$
- ▷ Schemata treten immer in komplementären Paaren auf

Folgerungen

- ▷ Zusammenhang zwischen
  – Häufigkeit der Individuen und Schemata
  – über- bzw. unterdurchschnittliche Qualität des Individuums
- ▷ Gilt $p_A > p_{r(A)}p_{r^{-1}(A)}$, dann zerstört Rekombination mehr Instanzen (gut bei unterdurchschnittlicher Qualität)
- ▷ bei überdurchschnittlicher Güte sollte $p_A < p_{r(A)}p_{r^{-1}(A)}$ sein

Folgerungen

- die Rekombination kann dadurch optimiert werden, dass p_g so angepasst wird, dass diejenigen g mit sehr positivem Wert

$$Cov\left[Q_w(A), \frac{\bar{f}_{r(A)}\bar{f}_{r^{-1}(A)}}{\bar{f}^2}\right] - \sum_{A\in\mathcal{G}}(p_A - p_{r(A)}p_{r^{-1}(A)})(Q_w(A) - \bar{Q}_w)\frac{\bar{f}_{r(A)}\bar{f}_{r^{-1}(A)}}{\bar{f}^2}$$

  eine höhere Wahrscheinlichkeit erhalten

Genetische Algorithmen: Grundschema

- probabilistische Elternselektion
- Kinder ersetzen alle Eltern
- primärer Operator: Rekombination
- Hintergrundoperator: Mutation

Algorithmus GA

EINGABEN: Zielfunktion F, Dekodierungsfunktion dec, Parameter ...
$t \leftarrow 0$
setze Parameter
erzeuge Population $P(t)$
bewerte Population $P(t)$
while Terminierungsbedingung nicht erfüllt **do**
  $P' \leftarrow S^{\xi,dec,F}_{prop}(P(t))$ – Selektion der Eltern
  $P'' \leftarrow$ Nachkommen von P' mittels R^{ξ} – Rekombination
  wende M^{ξ} auf Elemente in P'' an – Mutation
  bewerte P'' mittels F
  $t \leftarrow t + 1$
  $P(t) \leftarrow P''$
end while
AUSGABE: bestes Individuum aus $P(t)$

Selektion

- fitnessproportionale Elternauswahl
- Skalierung und rangbasierte Selektion
- Aufwand für μ Eltern: $\mathcal{O}(\mu \log \mu)$
- hohe Abweichung von den erwarteten übernommenen Individuen
- Verbesserung: stochastisches universelles Sampling
- Aufwand: $\mathcal{O}(\mu)$

Stochastisches Universelles Sampling

EINGABEN: Population P
sample $u \in U(0, \frac{1}{\lambda})$
$n \leftarrow 1$
$sum \leftarrow Pr(n)$
for $i = 1$ to λ **do**
  while $sum < u$ **do**
    $n \leftarrow n + 1$
    $sum \leftarrow sum + Pr(n)$
  end while
  $B^{(i)} \leftarrow A^{(n)}$
  $u \leftarrow u + \frac{1}{\lambda}$
end for
Ausgabe von $\langle B^{(i)} \rangle_{1 \leq i \leq \lambda}$

Selektionsvarianten

- ▷ q-fache Turnierselektion
- ▷ Elitismus
- ▷ steady-state GA: maximale Überdeckung

Klassischer GA

- ▷ Kodierung nach $\mathcal{S} = \{0,1\}^l$
  standardbinär oder Gray
- ▷ Mutation: Bitflipping
  „optimale“ Wahrscheinlichkeit $p_m = \frac{1}{l}$
- ▷ laufzeiteffiziente Mutation: Abstand zwischen zwei mutierten Positionen ist $\left\lfloor \frac{\ln(u)}{\ln(1-p_m)} \right\rfloor$ mit $u \sim U([0,1))$

Klassischer GA: Rekombination

- ▷ 2-Punkt-Crossover
- ▷ k-Punkt-Crossover
- ▷ uniformer Crossover
- ▷ wird nur mit Wahrscheinlichkeit p_R angewandt
  möglicher Richtwert: $p_R = 0.7$

Parameter des klassischen GA

Parameter	Wertebereich	Beschreibung
μ	$\mathbb{N}$	Populationsgröße
p_m	$[0,1]$	Mutationswahrscheinlichkeit
p_c	$[0,1]$	Crossoverwahrscheinlichkeit
Cr	$\mathbb{N}$, uniform	Crossoverart
Cod	standard, Gray	Kodierungsart
Sel	prop., stochastic, rank, sigma	Selektionsart
W	$\mathbb{N}$	Skalierungsfenster
Scl	linear, nonlinear	Skalierungsart
E	ja, nein	Elitismus
G	$[0,1]$	Generation Gap

Reellwertige GAs

- ▷ Genotyp: $\mathcal{G} = [ug_1, og_1] \times \ldots \times [ug_l, og_l]$
- ▷ Mutation: komponentenweise mit Wahrscheinlichkeit p_m:

  $B_i \leftarrow$ wähle zufällig gemäß

  $$U([\max\{ug_i, A_i - x\}, \min\{og_i, A_i + x\}])$$
- ▷ Rekombination: wie im binären

  Problem: im Reellwertigen ist dies eine größere

  Einschränkung

Arithmetischer Crossover

- ▷ arithmetischer Crossover

  $$C_i \leftarrow uA_i + (1-u)B_i$$
- ▷ mit u zufällig aus $U([0,1])$: mittelnde Rekombination
- ▷ beispielsweise mit u aus $U([1,2])$ und

  $f(A_i) \succ f(B_i)$ extrapoliert der Crossover

Permutationen: Mutationen

- ▷ vertauschen zweier Zahlen
- ▷ Inversion eines Teilstrings
- ▷ eine Zahl entfernen und an zufälliger Stelle wieder einfügen
- ▷ zufälliges Umsortieren einer Unterliste

Permutationen: Rekombinationen

- ▷ Standardoperatoren erzeugen keine gültigen Individuen
- ▷ bekannt: Kantenrekombination
- ▷ zwei weitere Varianten, die zunächst einen Standardoperator anwenden und dann die Lösung reparieren
- ▷ es gibt noch viele weitere Operatoren!

Ordnungsrekombination

- ▷ gemäß einem Standardoperator werden Zahlen von einem Elternteil übernommen
- ▷ die Lücken werden gemäß der Reihenfolge der fehlenden Zahlen im anderen Elternteil gefüllt

partially mapped crossover

- ▷ Standardoperator bestimmt Zahlen von einem Elternteil
- ▷ wir definieren eine Abbildung zwischen diesen Zahlen und den jeweils korrespondierenden Zahlen an denselben Positionen des anderen Elternteils
- ▷ noch nicht übernommene Zahlen werden an den freien Stellen vom anderen Elternteil übernommen
- ▷ die restlichen Positionen werden vom zweiten Elternteil ausgehend über die Abbildung bestimmt