Abt. Formale Konzepte
Fakultät Informatik

Abgabe bis Dienstag 14.05.2002

Universität Stuttgart
W. Schmid, P. Jehlicka
SS 01, 07.05.2002
Zugehörige Übungen am 17.05.2002 8.30 Uhr

Übung 3

zu Theoretische Informatik III (für Softwaretechnik)

Aufgabe 1: Das ausführliche Münzproblem (9 Punkte)

Unsere Währung hat Centmünzen mit den Werten 1, 2, 5, 10, 20 und 50 Cent. Damit lassen sich alle Werte von 1 bis 100 Cent mit maximal 6 Münzen darstellen. Folgende Greedy-Strategie führt dabei zum optimalen Ergebnis: Solange der Wert noch nicht erreicht ist, nehme jeweils die Münze mit dem höchstmöglichen Wert. Für 59 Cent würde man z.B. mit 50 Cent anfangen, dann eine 5 Cent und zwei 2 Cent Münzen nehmen.

1. (2 Punkte) Schreiben Sie einen Algorithmus, das für die Werte 1 bis 100 Cent mit obiger Greedy-Strategie berechnet, wieviel Münzen minimal zur Darstellung nötig sind. Geben Sie den Mittelwert der benötigten Münzenanzahl für die Werte 1 bis 100 Cent an.

2. Bei anderen Aufteilungen - z.B. 1, 2, 5, 10, 24 und 50 Cent - führt die Greedy-Strategie nicht immer zum richtigen Ergebnis: Bei 58 Cent ermittelt die Greedy-Strategie 4 Münzen (50+5+2+1), obwohl die Darstellung auch mit 3 Münzen möglich ist (2*24+10).

   (5 Punkte) Schreiben Sie einen Algorithmus, der 6 Münzwerte einliest und dann für alle Werte 1 bis 100 Cent jeweils korrekt ermittelt, wieviel Münzen zur Darstellung mindestens benötigt werden. Geben Sie aus, für wieviel Werte weniger, gleich bzw. mehr Münzen gebraucht werden im Vergleich zur Darstellung mit 1, 2, 5, 10, 20 und 50 Cent Münzen. Geben Sie auch jeweils den Mittelwert an.

   Welchen Algorithmustyp haben Sie dabei verwendet?

3. Zusatzaufgabe (1 Punkt): Versuchen Sie durch Probieren sechs Münzwerte zu finden, mit denen sich die Werte 1 bis 100 Cent im Mittel mit weniger Münzen darstellen lassen als es mit 1, 2, 5, 10, 20 und 50 Cent möglich ist.

4. Zusatzaufgabe (schwer! - bis zu 4 Punkte): Finden Sie notwendige und hinreichende Bedingungen, damit die minimale Darstellung mit den gegebenen Münzwerten für beliebige Werte mit der Greedy Strategie gefunden werden kann.

Aufgabe 2: nächster Nachbar (9 Punkte)

Gegeben seien n Punkte in der Ebene. Gesucht ist das Paar von Punkten, deren Entfernung minimal ist, daß heißt, gesucht ist das Punktepaar (P_i, P_j) für welches

$$d(P_i, P_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

minimal ist. Finden Sie einen Algorithmus, der schneller als $O(n^2)$ arbeitet.

Aufgabe 3: kürzeste Wege (9 Punkte)

In der Vorlesung wurde der Algorithmus von Warshall zur Berechnung der transitiven Hülle eines Graphen vorgestellt. Dabei waren die Elemente der Adjazenzmatrix $a_{i,j} = 1$, wenn die Kante von i nach j existiert, und 0 sonst. Die Kanten $a_{i,j}$ seien nun gewichtet, das heißt $a_{i,j} = g \geq 0$, falls eine Kante der *Länge* g von i nach j existiert, und ∞ sonst.

a) Entwickeln Sie einen Algorithmus analog zum Warshallalgorithmus, der zwischen allen Knoten den kürzesten Weg berechnet.

b) Verifizieren Sie Ihnen Algorithmus analog zur Verifikation des Warshallalgorithmus.

c) Schätzen Sie den Aufwand ihres Algorithmus ab.