



Aufgabenblatt 10

Abgabe: 11. Juli, 20.00 Uhr

Das Kapitel 3.2.3 über Optimale Suchbäume (Folien 74-93) wird nur in den Übungen behandelt. Wir führen in den folgenden Übungsaufgaben auf die Ideen hin.

1. Mittlere Suchzeit und gew. mittl. Suchdauer (leicht) (vot., 1+0.5+1.5 P.)
In den folgenden Aufgaben werden wir Suchbäume mit den Elementen „Claus“, „Holub“, „Jehlicka“, „Kahl“, „Lewandowski“, „Schiller“ und „Zimmer“ betrachten.

- Konstruieren Sie einen Suchbaum mit minimaler mittlerer Suchzeit für die obigen sieben „Elemente“.
- Nehmen Sie an, dass „Claus“ deutlich häufiger gesucht wird (in 30% der Fälle), „Lewandowski“ in 20% der Fälle, die restlichen fünf werden mit einer Häufigkeit von je 10% gesucht. Bei der Berechnung der zu erwartenden Suchdauer müssen diese Häufigkeiten berücksichtigt werden. Man gewichtet die einzelnen Pfadlängen (diese entsprechen dem Level des jeweiligen Elements im Suchbaum) daher mit den jeweiligen Häufigkeiten (vgl. Definition 3.2.3.1). Welche gewichtete mittlere Suchdauer ergibt sich für Ihren Baum aus Teil a) mit den angegebenen Häufigkeiten?
- Finden Sie (durch Probieren) einen Suchbaum mit kleinerer mittlerer Suchdauer.

2. Konstruktion optimaler Suchbäume (mittel) (votieren, 1+4 Punkte)

Wir wollen nun einen optimalen Suchbaum konstruieren. Da es C_n ($\approx 4^n/n^{1.5}$) Suchbäume gibt, dauert das systematische Durchprobieren viel zu lange.

- Eine zentrale Eigenschaft bei der Konstruktion optimaler Suchbäume ist die Optimalität der Unterbäume (Hilfssatz 3.2.3.4). Untersuchen Sie, ob die Unterbäume Ihres Suchbaums aus Aufgabe 1, Teil a) jeweils optimale Suchbäume sind (d.h., die gewichtete mittlere Suchdauer ist bzgl. der Unterbäume jeweils minimal) und ob diese jeweils eindeutig sind.
- Ersetzt man bei gleicher Wurzel (beim Suchbaum aus Aufgabe 1, Teil a) ist dies bei Ihnen vermutlich „Kahl“), die Unterbäume durch die jeweils optimalen Suchbäume, ergibt sich zwar ein Suchbaum mit geringerer mittlerer Suchdauer, jedoch nicht unbedingt der optimale Suchbaum. Wählt man ein anderes Element als Wurzel, so könnte ein Suchbaum mit geringerer mittlerer Suchdauer entstehen. Der optimale Suchbaum kann schrittweise aus seinen Unterbäumen aufgebaut werden. Dazu müssen die optimalen Suchbäume für (zusammenhängende) Teilfolgen der Elemente berechnet werden und dann über jede mögliche Wahl der Wurzel minimiert werden (siehe auch Folien 85+86, Punkt 3.2.3.5). Berechnen Sie für alle Teilfolgen alle optimalen Suchbäume (dies entspricht dem schrittweisen Durchführen des Programms 3.2.3.6)

Dringende Empfehlung: auch wenn Sie in der Folgeaufgabe das Programm erweitern und somit auch ausführbar vorliegen haben, sollten Sie die Bäume von Hand einmal durchrechnen! Sie müssen beim Votieren dies an der Tafel (und später ggf. in der Klausur) können!

- 3. Konstruktion optimaler Suchbäume II** (mittel) (schriftlich, 5 Punkte)
 Testen Sie mit Hilfe des Programms 3.2.3.6, ob die von Ihnen von Hand ermittelten optimalen Suchbäume korrekt sind. Erweitern Sie das Programm, so dass aus den $R[i, j]$ der Suchbaum konstruiert wird und geben Sie diesen in geeigneter Form aus.
- 4. Monotonie der Wurzeln** (mittel–schwer) (votieren, 4 Punkte)
 Ist die Wurzel eines optimalen Suchbaums für die Elemente $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}$ schon berechnet und man fügt dann das Element a_j (mit $a_j > a_k, k = i, \dots, j-1$) ein, so vergrößert sich dadurch nur das Gewicht des rechten Unterbaums (warum?). Daher wird der Index der Wurzel eines optimalen Suchbaums nicht kleiner sein. Analoges gilt, wenn die Wurzel eines optimalen Suchbaums für die Elemente $a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j$ schon berechnet ist und man dann das Element a_i einfügt. Es gilt also $R[i, j-1] \leq R[i, j] \leq R[i+1, j]$ (siehe auch Hinweis 3 auf Folie 91). Verändern Sie Ihr Programm, so dass diese Eigenschaft berücksichtigt wird. Für welche Teilfolgen (im Beispiel „Claus“, „...“, „Zimmer“) werden die optimalen Suchbäume nun noch berechnet? Welche Kombinationsmöglichkeiten der Unterbäume werden dabei noch berücksichtigt?
- 5. Erfolglose Suche** (leicht) (schriftlich, 1 Punkt)
 Bei der Berücksichtigung der erfolglosen Suche werden im Suchbaum Blätter eingefügt, die die offenen Intervalle der erfolglosen Suche repräsentieren (siehe auch Hinweis 4 auf Folie 92/93). Wie groß kann diese Anzahl werden? Beweisen Sie Ihre Behauptung.
- 6. Zusatzaufgabe: Erfolglose Suche II** (mittel-schwer) (schriftlich, 6 Punkte)
 In vielen Anwendungen wird man auch nach Elementen suchen, die nicht im Suchbaum gespeichert sind (und somit die Suche erfolglos bleibt). Ist dieser Anteil sehr dominant, so ist ein möglichst ausgeglichener Baum optimal (warum?).
 Wir verändern nun noch unser Programm, so dass die nicht erfolgreichen Suchen ebenfalls berücksichtigt werden. Seien 50% der Anfragen nach Namen, die nicht im Suchbaum gespeichert sind (die Häufigkeiten für „Claus“, „...“, „Zimmer“ halbieren sich also), in je 5% der Fälle wird nach Namen gesucht, die lexikographisch zwischen den Schlüsselementen liegen, nur nach Namen, die lexikographisch zwischen „Lewandowski“ und „Schiller“ liegen, wird mit Häufigkeit von 15% gesucht (zusammen sind dies dann je 50% für Häufigkeiten von Namen, die im bzw. nicht im Suchbaum liegen). Berechnen Sie einen optimalen Suchbaum mit diesen 15 „Elementen“. Verändern Sie Ihr Programm so, dass sichergestellt ist, dass die Knoten, die eine erfolglose Suche repräsentieren, stets Blätter im optimalen Suchbaum werden?
- 7. AVL-Bäume** (leicht–mittel) (votieren, 2 Punkte)
 Fügen Sie die Elemente „Claus“, „Holub“, „Jehlicka“, „Zimmer“, „Schiller“, „Lewandowski“ und „Kahl“ in dieser Reihenfolge in einen anfangs leeren AVL-Baum ein. Welche Rotationen müssen Sie durchführen?

Es werden maximal 20 (der erreichbaren 26) Punkte des Aufgabenblattes gewertet.
 Alles weitere unter