Übungsaufgaben (für Kapitel 1 bis 3)

Aufgabe 1: *Multiplikation*
Beschreiben Sie die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen.

a) Verwenden Sie eine iterierte Addition.
b) Beschreiben Sie den zeichenweise arbeitenden Algorithmus, den Sie aus der Grundschule kennen.
c) Nehmen Sie an, Sie hätten als Operation die Bildung des Quadrats einer Zahl zur Verfügung, d.h., es gibt den Operator square(x), der zu einer natürlichen Zahl x das Quadrat x^2 liefert. Wie kann man dann die Multiplikation durchführen?

Aufgabe 2: *Berechnung von div und mod*

Der Euklidische Algorithmus für den größten gemeinsamen Teiler ggT benutzt die Operation mod, die zu zwei natürlichen Zahlen a und b den Rest liefert, der bei der ganzzahligen Division a div b von a durch b übrig bleibt.
Es gilt: $a = b \cdot (a \ \underline{div}\ b) + a \ \underline{mod}\ b$ für $a \geq 0$ und $b > 0$.
Geben Sie zwei Algorithmen an, die a div b und a mod b gleichzeitig berechnen, und zwar

a) einmal zeichenweise (z.B. als array dargestellt) und
b) einmal ohne die Darstellung mit Ziffern zu verwenden.

Prüfen Sie Ihre Algorithmen mit einigen Ablaufprotokollen.

Aufgabe 3: *Ermitteln der Größe des Durchschnitts*
Gegeben seien zwei Feldvariablen A und B

type Zahlenfeld is array [1..n] of integer;
Zahlenfeld A, B;

Jede der Variablen A und B stellt eine Teilmenge der ganzen Zahlen dar und wir nehmen an, dass keine Zahl in A (bzw. in B) mehrfach vorkommt:

$\forall$ i, j $\in$ {1, 2, ..., n} and (i $\neq$ j) $\Rightarrow$ A[i] $\neq$ A[j].

Schreiben Sie ein Programm, welches n und die Felder A und B einliest (Sie können z.B. $n \leq 10000$ annehmen) und

1. feststellt, dass keine Zahl in A und in B mehrfach vorkommt, und in diesem Fall
2. ermittelt, wie viele Zahlen sowohl in A als auch in B vorkommen (Größe des Durchschnitts der durch A und B definierten Teilmengen von **Z**).

Aufgabe 4: *Zeichenverschiebung und quadratische Codierung*
Es sei Pos: **A** $\rightarrow$ {0, 1, 2, ..., 127} die Funktion, die jedem Zeichen seine Nummer im ASCII-Code zuordnet (siehe 1.4, z.B. Folien 52 und 57).
Es sei Val: {0, 1, 2, ..., 127} $\rightarrow$ **A** die Funktion, die jeder Zahl zwischen 0 und 127 das zugehörige Zeichen bzgl. des ASCII-Codes zuordnet.

a) Schreiben Sie einen Algorithmus, der zunächst eine Zahl k und danach eine Folge von Zeichen (das Ende der Folge sei durch ein von Ihnen zu bestimmendes Zeichen festgelegt) einliest und die um k Stellen im ASCII-Code zyklisch verschobene Folge dieser Zeichen ausgibt.
b) Wir wollen die Zeichen durch folgende Vorschrift verschlüsseln: Wenn das Zeichen α die Nummer Pos(α) = i besitzt, dann berechnen wir $j = i^2 \ \underline{mod}\ 128$ und ersetzen α durch das Zeichen β = Val(j).
Beispiel: α = 'U', Pos(U) = i = 85, j = 85^2 mod 128 = 7225 mod 128 = 57, β = Val(57) = '9'.
Schreiben Sie einen Algorithmus, der diese Verschlüsselung vornimmt, der also die Abbildung $\alpha \rightarrow \beta = Val((Pos(\alpha))^2 \ \underline{mod}\ 128)$ berechnet.

Ist diese Abbildung injektiv?
Diskutieren Sie Vor- und Nachteile dieser Abbildung.

Aufgabe 5: *Datentypdeklarationen*
Beschreiben Sie folgende Daten mit Hilfe der in Kapitel 1 und 2 vorgestellten Datentypen und Konstruktoren:
a) Liste der Nummern der Großbuchstaben im ASCII_Code.
b) Menge der Vornamen aller Freunde und Freundinnen.
c) Zuordnung der Geburtsjahre zu jedem/r Freund/Freundin.
d) Datentyp für die Wochentage und Datentyp für sieben selbst zu definierende Wetterlagen (kühl, regnerisch, sonnig, ...).
e) Zuordnung von Wochentag und Wetterlage zu der bei dieser Situation geeigneten Kleidung.
f) Jede Teilmenge einer angeordneten Menge M mit n Elementen kann man durch einen n-stelligen Booleschen Vektor beschreiben, dessen i-te Komponente genau dann true ist, wenn das i-te Element in der Teilmenge liegt. Definieren Sie auf diese Weise den Datentyp "Menge der Teilmengen von M".

Aufgabe 6: *Terminierung?*
Ermitteln Sie, für welche Eingabewerte folgende Programme terminieren (= nach endlich vielen Schritten anhalten) und welche Funktion sie realisieren.

```
program P1 is
integer  k, m;
begin  read m;  k := 1;
       while m > k do  k := k+2; m := m+1 od;
       write k
end;
program P2 is
integer  k, m;
begin  read m;  k := -m;
       while m > 0 do  k:=k+2; m:= k od;
       write k
end;
```

Aufgabe 7: *Terminierung?*
Ermitteln Sie, für welche Eingabewerte folgendes Programm terminiert (zu "Pos" siehe Aufgabe 4).

```
program unbekannt is
integer  k; character  X; array [0..3] of character  DB;
begin
       for k:=0 to 3 do DB[k] := 'Z' od;
       read X;
       while X ≠ 'Z' do
              k := Pos(X);
              while DB[k] ≠ 'Z' do  k := (k+1) mod 4  od;
              DB [k] := X
       od;
       for k:=0 to 3 do  write DB[k]  od
end;
```

Aufgabe 8: *Operationen auf Sprachen*
Es sei A die zweielementige Menge A = {a, b}.
(1) Bilde zur Menge L = {a, bb} die Mengen LL und LLL.
(2) Skizzieren Sie ein Verfahren, das zu einem Wort $w \in A^*$ feststellt, ob $w \in L^*$ gilt oder nicht.
(3) Sei J = {ab}. Beschreiben Sie die Mengen J^* und $A^* \setminus J^*$.
(4) Sei K = {b, ab}. Beschreiben Sie die Menge $(K \cup L)^*$.
(5) Beschreiben Sie die Menge $\{(abb)^n \mid n>0\}$ mit Hilfe der Sprachen J und K und der Sprachoperationen Vereinigung, Differenz, Durchschnitt, Konkatenation und/oder Iteration.
(6) Sei H = {ba, bb}. Geben Sie einen Algorithmus für das Wortproblem der Menge $(H \cup J)^*$ an, d.h., geben Sie ein Verfahren an, das zu jedem Wort $w \in A^*$ feststellt, ob $w \in (H \cup J)^*$ gilt oder nicht.

Aufgabe 9: *Erzeugte kontextfreie Sprachen*

Es seien $V = \{S, A\}$ und $\Sigma = \{0, 1\}$. Welche Sprachen L_i werden von folgenden kontextfreien Grammatiken $G_i = (V, \Sigma, P_i, S)$ erzeugt mit $i = 1, 2, ..., 9$ und

$P_1 = \{ S \rightarrow 0, S \rightarrow 1 \}$

$P_2 = \{ S \rightarrow 1, S \rightarrow S, S \rightarrow 0, A \rightarrow 0 \}$

$P_3 = \{ S \rightarrow 0S, S \rightarrow 00 \}$

$P_4 = \{ S \rightarrow S1, S \rightarrow 00, S \rightarrow 1, A \rightarrow 1, A \rightarrow AS \}$

$P_5 = \{ S \rightarrow 0A0, S \rightarrow 1, A \rightarrow 0S0 \}$

$P_6 = \{ S \rightarrow 0AS, S \rightarrow 0, A \rightarrow 1A1, A \rightarrow 1 \}$

$P_7 = \{ S \rightarrow AA, A \rightarrow 0A0, A \rightarrow 1 \}$

$P_8 = \{ S \rightarrow AS, A \rightarrow \varepsilon, A \rightarrow 0S1, S \rightarrow A \}$

$P_9 = \{ S \rightarrow SAS, A \rightarrow 10, A \rightarrow 0S1A, S \rightarrow A \}$

Aufgabe 10: *(Beliebige) Grammatiken konstruieren*

Konstruieren Sie Grammatiken $G_i = (V_i, \Sigma, P_i, S)$ mit $\Sigma = \{0, 1\}$, die folgende Sprachen L_i erzeugen (hier ist w^R das gespiegelte Wort w, d.h., wenn $w = a_1a_2...a_n$ ist, dann ist $w^R = a_n..a_2a_1$):

$L_1 = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\} = \Sigma^+$

$L_2 = \{ w \in \Sigma^* \mid w \text{ hat eine gerade Länge} \}$

$L_3 = \{ 0^n10^n \mid n > 0 \}$

$L_4 = \{ (0^n10^n)^m \mid n > 0, m > 0 \}$

$L_5 = \{ ww^R \mid w \in \Sigma^* \}$

$L_6 = \{ w^2 \mid w \in \Sigma^* \}$

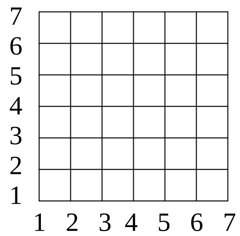
$L_7 = \{ 0^n10^n10^n \mid n > 0 \}$

$L_8 = \{ w \in \Sigma^* \mid w \text{ besitzt gleich viele Zeichen 0 und 1} \}$

$L_9 = \{ 0^n \mid \text{Es gibt ein } k \geq 0 \text{ mit } n = 2^k \}$

Aufgabe 11: *Charakterisierung von "diagonalen Wegen"*

Es sei ein $n \times n$-Gitter gegeben:



für $n = 7$

$\rightarrow$ entspricht a und $\uparrow$ entspricht b

Es sollen genau die Wege beschrieben werden, die vom Punkt (1,1) unten links zum Punkt (n,n) oben rechts führen. Hierfür bedeute das Zeichen a "gehe zum nächsten Punkt rechts" und b bedeute "gehe zum nächsten Punkt nach oben". Das Wort abab..ab = $(ab)^n$ beschreibt dann einen solchen "diagonalen Weg" ebenso wie das Wort a^nb^n.

a) Beschreiben Sie die Menge aller Wörter, die einen Weg vom Punkt (1,1) zum Punkt (n,n) beschreiben.

b) Geben Sie eine Grammatik an, die für alle n genau alle diese Wörter erzeugt.

Aufgabe 12: *Umwandlung in Syntaxdiagramme*

Geben Sie zu folgenden kontextfreien Grammatiken $G_i = (V, \Sigma, P_i, S)$ mit $V = \{S, A, B\}$ und $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$ möglichst einfache Syntaxdiagramme an:

$P_1 = \{ S \rightarrow 0SS, S \rightarrow 1 \}$

$P_2 = \{ S \rightarrow AA, S \rightarrow 0, A \rightarrow AA, A \rightarrow 1, A \rightarrow AS \}$

$P_3 = \{ S \rightarrow 0B1S3, S \rightarrow 0B1S2S3, S \rightarrow 00, B \rightarrow 11 \}$

$P_4 = \{ S \rightarrow A0S, S \rightarrow A, A \rightarrow B1A, A \rightarrow B, B \rightarrow 2S2, B \rightarrow 3 \}$

$P_5 = \{ S \rightarrow ABS, A \rightarrow 0A1, A \rightarrow \varepsilon, B \rightarrow 0B, B \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow 2 \}$

$P_6 = \{ S \rightarrow A1B, S \rightarrow B1A, A \rightarrow 0A0, A \rightarrow 1, B \rightarrow 0B, B \rightarrow 0 \}$