Satz 6.3. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von 6.1 sei f auf R nach x stetig partiell differenzierbar. Dann ist F stetig diffbar und es gilt*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy.$$

Man nennt diese Regel „Differentiation unter dem Integralzeichen“.

Aufgabe1

Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen

$$F(x) = \int_1^\infty \frac{x}{y^2}\, dy \qquad G(x) = \int_a^x e^{xy}\, dy$$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie das Doppelintegral des Polynoms $p(x,y) = xy(1-x-y)$ über das Dreieck $\{(x,y) : x, y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$.

Aufgabe 3 **3 Punkte**

Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ der Bereich im 1. Quadranten, der durch die Graphen der Gleichungen $y = 3 - x^2$ und $y = x^2 + 1$ begrenzt wird. Skizzieren Sie B und berechnen Sie das Doppelintegral

$$\iint_B \frac{x}{\sqrt{y}} dF.$$

Aufgabe 4

Sei K die Kugel um den Ursprung mit Radius R. Berechnen Sie das Volumenintegral

$$\iiint_K (x^2 + y^2) z^2 \, dV.$$

Aufgabe 5:

a.) Berechnen Sie für $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \to \ln(1 + x^2 + y^2) \in \mathbb{R}$ und $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ das Integral $\int\limits_\Omega f \, dV$ mit Hilfe von Polarkoordinaten.

b.) Berechnen Sie für $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to x^2 + y^2 - xz \in \mathbb{R}$ und $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ 0 \leq z\}$ das Integral $\int\limits_\Omega f \, dV$ mit Hilfe von Kugelkoordinaten.

Aufgabe 6:

Berechnen Sie das Volumen eines Kreiskegels

$$\Omega := \{(r \cos\phi, \ r \sin\phi, \ z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq R, \ 0 \leq \phi \leq 2\pi, \ \frac{hr}{R} \leq z \leq h\}$$

der Höhe $h > 0$ und dem Radius $R > 0$. Unter der Vorgabe, dass der Kreiskegel eine konstante Massendichte $\rho > 0$ aufweist, berechnen Sie den Schwerpunkt des Kreiskegels und das Trägheitsmoment bzgl. seiner Symmetrieachsen.