Aufgabe 1

Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y - 3z \\ \dot{y} &= x + 2y - 3z \\ \dot{z} &= 5x + y - 6z \end{aligned}$$

!

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{y} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungssysteme:

a) $$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= y_1 + y_2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= -2y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 4y_2 - 12 \\ y_2' &= -2y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 - 5y_2 - 5y_3 \\ y_2' &= -y_1 + 4y_2 + 2y_3 \\ y_3' &= 3y_1 - 5y_2 - 3y_3 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$Y' = PY + Q, \qquad Y(0) = Y_0$$

mit

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}, \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'' - xy = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$, durch einen Potenzreihenansatz. Wieviele Glieder der Potenzreihe müssen berücksichtigt werden, damit der Fehler in $[0, 1]$ höchstens 10^{-3} ist?

Aufgabe 5

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen. Geben Sie gegebenenfalls ein komplexes und ein reelles Fundamentalsystem an.

a) $y'' - y' - 6y = 5e^{2x}$

b) $y'' + 2y' = 1 + e^{-2x} + 3x^2$

c) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

d) $y'' - 6y' + 13y = 6e^{3x} \cos x.$

Aufgabe 6

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 2y' + y = 4e^{-x} \ln x.$