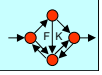
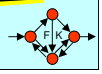
Wolfgang Schmid

Berechnung kürzester Wege in Graphen mit verbotenen Strukturen



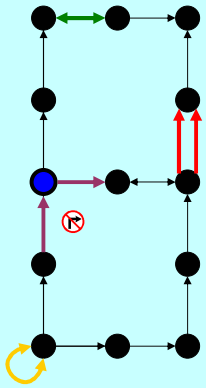
Kapitel 2: Inhaltsübersicht

- 2.1 Der Hauptsatz der Abbiegeverbotstheorie
- 2.2-2.3 Kürzeste Wege in Graphen mit Abbiegeverboten
- 2.4 Der Beweis der Hauptsatzes
- 2.5 k-kürzeste Wege mit dem Algorithmus von Azevedo
- 2.6 Kürzeste Wege in Graphen mit Wegeverboten
- 2.7 Eine Beweisskizze des Algorithmus



2.1.1 Einführende Definitionen

Ich werde mich an an die Graphdefinition (nach NolteMeier) halten,
die speziell auf Graphen mit Multikanten ausgerichtet ist.
Ein Graph $G := \{V, E, \alpha, \omega, \gamma\}$ besteht aus einer endlichen
Knotenmenge V, einer endlichen Kantenmenge E und
zwei Abbildungen $\alpha, \omega: E \to V$,
$\alpha(e)$ ist der Anfangsknoten von e $\quad (\alpha((u,v)) = u)$
$\omega(e)$ ist der Anfangsknoten von e $\quad (\omega((u,v)) = v)$
und einer Gewichtsfunktion $\gamma: E \to V$.
Kanten sind häufig mit $e_{u,v}$ bezeichnet.

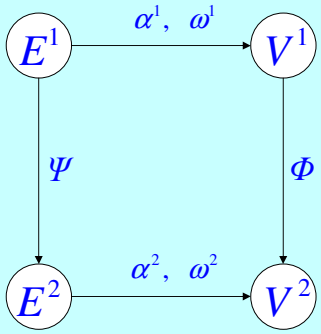


$g^+(v) := |\{e \in E \mid \alpha(e) = v\}|$ heißt der Ausgangsgrad eines Knotens v,
$g^-(v) := |\{e \in E \mid \omega(e) = v\}|$ heißt der Eingangsgrad von v.
$g^+(G) := \max_{v \in V}\{g^+(v)\}$ heißt Ausgangsgrad des Graphen G; $g^-(G)$ analog.

Wenn nicht anders vermerkt sind Graphen immer gerichtet und gewichtet.

2.1.2 Definition: Homomorphie zweier Graphen

Seien $G^1 := \{V^1, E^1, \alpha^1, \omega^1, \gamma^1\}$ und $G^2 := \{V^2, E^2, \alpha^2, \omega^2, \gamma^2\}$ Graphen, dann nennen wir ein Paar von Abbildungen $\Phi: V^1 \to V^2$ und $\Psi: E^1 \to E^2$ einen *Homomorphismus* von $G^1 \to G^2$ wenn sie Anfangs und Endknoten erhaltend sind:
$\alpha^2(\Psi(e)) = \Phi(\alpha^1(e))$, $\omega^2(\Psi(e)) = \Phi(\omega^1(e))$ und $\gamma^1(e) = \gamma^2(\Psi(e))$ für alle $e \in E^1$.
Ψ kann intuitiv auf Wege erweitert werden.

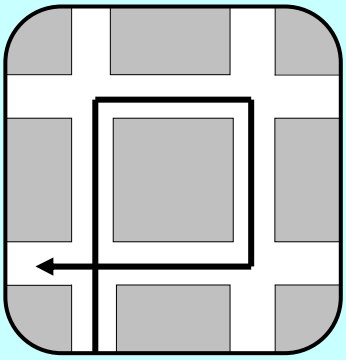


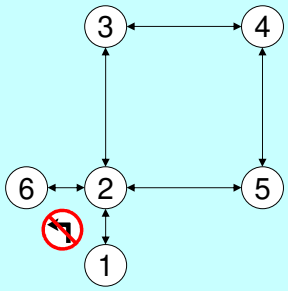
kommutatives Diagramm:

$\alpha^2 \circ \psi = \phi \circ \alpha^1$ und
$\omega^2 \circ \psi = \phi \circ \omega^1$

Sind ψ und ϕ bijektiv, so heißen die Graphen *isomorph*.

2.1.3 Definition: Abbiegeverbot





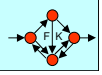
Gegeben sei der Graph $G := \{V, E, \alpha, \omega, \gamma\}$ mit $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,

$E = \{e_{1,2}, e_{2,1}, e_{2,3}, e_{2,5}, e_{2,6}, e_{3,2}, e_{3,4}, e_{4,3}, e_{4,5}, e_{5,2}, e_{5,4}, e_{6,2}\}$

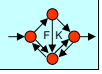
$\alpha(e_{i,j}) = v_i$, $\omega(e_{i,j}) = v_j$, $\gamma(e_{i,j}) = 1$ und mit dem Abbiegeverbot $t := (e_{1,2}, e_{2,6})$.

Ein Abbiegeverbot t ist also ein Kantenpaar (e_1, e_2) mit $\omega(e_1) = \alpha(e_2)$.

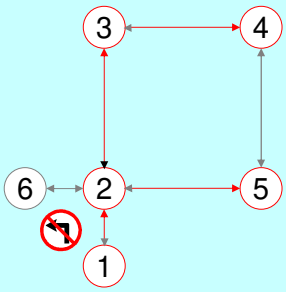
T ist die Menge aller Abbiegeverbote eines Graphen.



2.1.3 Schilder dieser Art gibt es tatsächlich

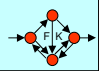


2.1.4 Die naive Methode



Wir wollen nun den kürzesten Weg zwischen v_1 und v_6 berechnen. Dazu wenden wir den Dijkstra - Algorithmus unter Berücksichtigung der Abbiegeverbote an.

Der Dijkstra - Algorithmus funktioniert nicht, da jeder Knoten nur einmal in den Kürzeste - Wege - Baum aufgenommen werden kann.
Das einfache Verbieten des Abbiegens reicht nicht aus, um kürzeste Wege in Graphen mit Abbiegeverboten zu bestimmen.

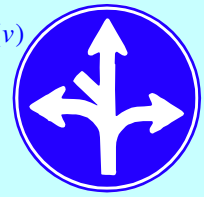


2.1.5 Hauptsatz der Abbiegeverbotstheorie (Schmid)

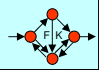
Sei $G := (V, E, \alpha, \omega, \gamma)$ ein Graph mit Abbiegeverboten $T = \{t_1, ..., t_k\}$.
Sei $E_0 = \{ e \in E \mid \exists\ t \in T : t = (e, e') \text{ mit } e' \in E \}$ und zu jedem $v \in V$ sei
$E_v := \{ e \in E_0 \mid \omega(e) = v \}$, dann gilt :

Erfolgt die Aufnahme von v in den Kürzeste - Wege - Baum über eine Kante $e \in E_0$, so muss v (möglicherweise) ein weiteres Mal - nicht über die Kante e - in den Kürzeste - Wege - Baum aufgenommen werden.

Bei einer Kürzeste - Wege - Berechnung muss v bis zu $|E_v| + 1 \leq g^-(v)$ mal in den Kürzeste - Wege - Baum aufgenommen werden.



Dieser Satz wird durch den Beweis der Gültigkeit des Verfahrens des verbotsorientierten Knotensplittings bewiesen.



2.1.6 Bildung von Äquivalenzklassen

Sei $G := (V, E, \alpha, \omega, \gamma)$ ein Graph mit Abbiegeverboten $T = \{t_1, \ldots, t_k\}$.

Auf der Menge aller Abbiegeverbote T definieren wir folgende Äquivalenzrelation:

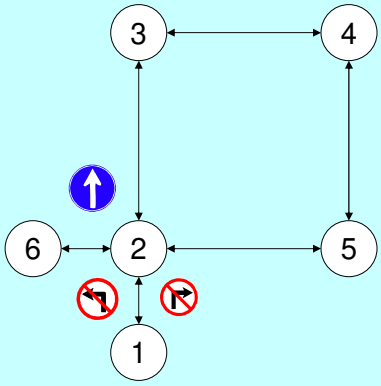
$(e_1, e_2) \approx (e_3, e_4) \Leftrightarrow e_1 = e_3$

$\approx$ ist reflexiv: $(e_1, e_2) \approx (e_1, e_2)$

$\approx$ ist symmetrisch $(e_1, e_2) \approx (e_3, e_4) \Leftrightarrow (e_3, e_4) \approx (e_1, e_2)$

$\approx$ ist transitiv $(e_1, e_2) \approx (e_3, e_4)$ und $(e_3, e_4) \approx (e_5, e_6)$

$\Rightarrow (e_1, e_2) \approx (e_5, e_6)$



Die Menge der Äquivalenzklassen kann von der Menge E_0 dargestellt werden. Im Folgenden sei die Menge E_0 in einer Preprocessingphase berechnet und die Abbiegeverbote in Äquivalenzklassen eingeteilt.

Im Beispiel ist $(e_{1,2}, e_{2,6})$ und $(e_{1,2}, e_{2,5})$ verboten.

Die Abbiegeverbote sind äquivalent. $E_0 = \{e_{1,2}\}$.

2.1.7 Kürzeste Wege in Graphen mit Abbiegeverboten

2.2 Dynamische Verfahren

- Algorithmusabhängig (--)
- Graph bleibt erhalten (keine Preprocessingphase) (+)
- Die Abbiegeverbote müssen weiterhin beachtet werden (--)
- flexibel gegenüber Veränderungen (+)

- Methode der Kantenaufnahme
- Methode der mehrfachen Knotenaufnahme
- naive Methode

2.3 Statische Verfahren

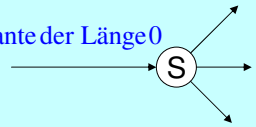
- Algorithmus ist beliebig (+)
- Graph wird verändert (Preprocessingphase) (--)
- Die Abbiegeverbote müssen nicht weiter beachtet werden (+)
- unflexibel gegenüber Veränderungen (--)

- Knotenorientierte Netzwerke
- Methode des Ziehens neuer Kanten
- Verbotsorientiertes Knotensplitting

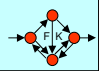
2.2.1 Methode der Kantenaufnahme (Standard)

$R := \{e_s\}$
while $R \neq \emptyset$ do
  Delete_min e wird in B aufgenommen
  For alle ausgehenden Kanten e' von $\omega(e)$ do
    if $(e,e') \notin T$ then Decrease_key(e')

e_s Kante der Länge 0

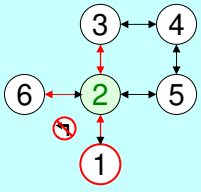


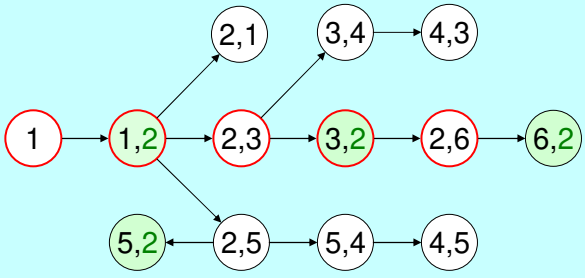
Delete_min hat Aufwand $O(\log m)$
Decrease_key wird $g^+(\omega(e))$ oft aufgerufen
Der Gesamtaufwand ist $O(m \cdot (\log m + g^+(\omega(e)))) \in O(m^2)$

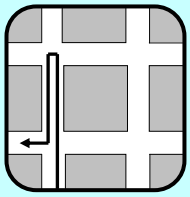


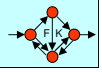
2.2.1 Methode der Kantenaufnahme

- Dynamisches Verfahren
- Statt der Knoten werden Kanten in den Kürzeste-Wege-Baum aufgenommen.
- Die Größe des Kürzeste-Wege-Baumes wächst mit der Anzahl der Kanten des Graphen.





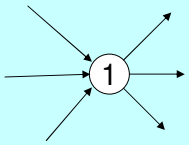




2.2.2 Methode der mehrfachen Knotenaufnahme (Hauptsatz)

$R := v_s$

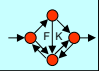
while $R \neq \emptyset$ do



Delete_min v wird in B aufgenommen

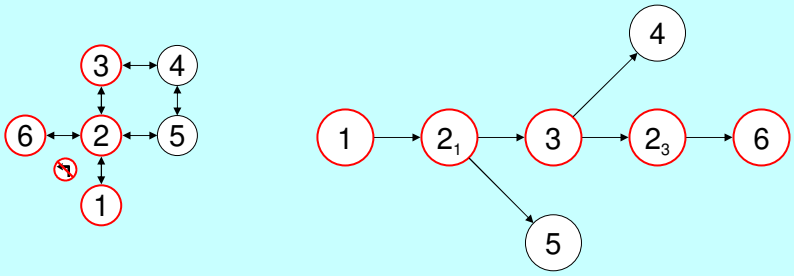
For alle ausgehenden Kanten e' von v do
if $(e,e') \notin T$ then begin
if $e' \in E_0$ then Decrease_key($\omega(e')_{\text{über } e'}$)
else Decrease_key($\omega(e')$)

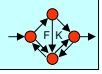
Die Anzahl der aufgenommenen Knoten ist $n+|E_0|$.
Damit ist der Gesamtaufwand des Algorithmus $O(m+((n+|E_0|)\cdot\log(n+|E_0|)) \in O(m\cdot\log m)$.



2.2.2 Methode der mehrfachen Knotenaufnahme

- Dynamisches Verfahren
- Wird ein Knoten über eine Kante, von der aus Abbiegeverbote existieren (Menge E_0), in den Kürzeste-Wege-Baum aufgenommen, so darf dieser ein weiteres Mal, aber nicht über diese Kante, aufgenommen werden.
- Die Größe des Kürzeste-Wege-Baumes wächst mit der Anzahl der Knoten und der Anzahl der Abbiegeverbote des Graphen.





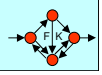
2.3.1 Definition Wegeäquivalenz

Sei $G^1 := \{V^1, E^1, \alpha^1, \omega^1, \gamma^1\}$ ein Graph mit Abbiegeverboten T
und $G^2 := \{V^2, E^2, \alpha^2, \omega^2, \gamma^2\}$ ein Graph ohne Verbote, und es existiert
ein Homomorphismus (Φ, Ψ) von G^2 nach G^1
dann heißt G^2 eine verbotsfreie Erweiterung von $G^1 : \Leftrightarrow$

(VE 1) Φ, Ψ sind surjektiv

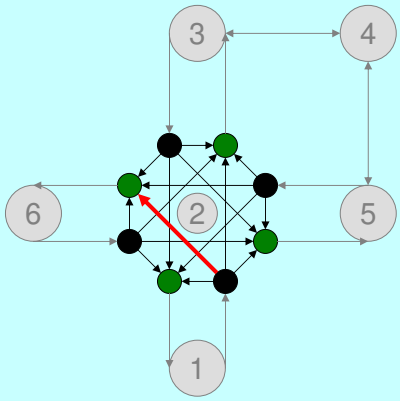
(VE 2) Zu jedem, nicht verbotenen Weg w^1 in G^1 existiert ein Weg
w^2 in G^2 mit $\Psi(w^2) = w^1$.

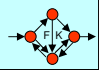
(VE 3) Zu jedem Weg w^2 in G^2 gilt :
$\Psi(w^2)$ enthält keinen verbotenen Teilweg.



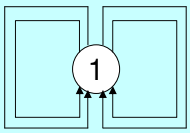
2.3.2 Knotenorientierte Netzwerke (Standard)

- Statisches Verfahren
- Jede Einfall- und Ausfallstraße erhält einen eigenen Knoten
- Das Abbiegen wird durch die Verbindung einer Einfallstraße mit einer Ausfallstraße dargestellt
- Das Löschen dieser Verbindung bedeutet ein Abbiegeverbot
- Flexibel wie ein dynamisches Verfahren
- Jeder Knoten v erzeugt $g^+(v) + g^-(v)$ Knoten und $g^+(v) \cdot g^-(v)$ Kanten
- Die Anzahl der neuen Knoten ist $O(m)$, die Anzahl der neuen Kanten ist $O(m^2)$

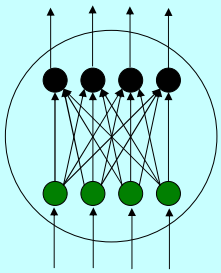




2.3.3 Das worst case Beispiel



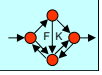
.... m Kanten



Sei $V = \{v_1\}, E = \{e_1,..,e_m\}$ mit $\alpha(e_i) = \omega(e_i)\ i = 1..m$
Der Knoten v_1 wird in $2m$ Knoten gesplittet
und erzeugt m^2 Kanten.

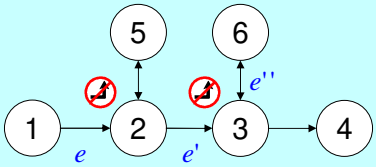
Das Verfahren erzeugt $O(2 \cdot m)$ Knoten und $\sum_{v \in V} g^-(v) \cdot g^+(v) \in O(m^2)$ Kanten.

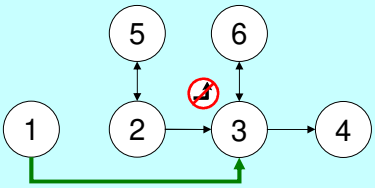
Damit liegt der Aufwand des Verfahrens in $O(m^2)$



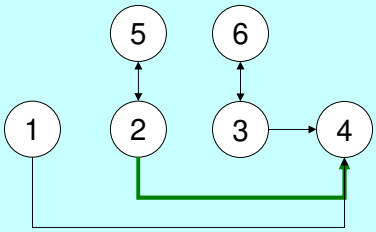
2.3.4 Die Methode des Ziehens neuer Kanten (Reissenberger/Brüchert)

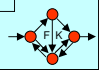
Zu jeder Kante $e \in E_0$ und zu jeder Kante e' mit $\omega(e) = \alpha(e')$ und $(e,e') \notin T$ definieren wir eine neue Kante $\hat{e}$ mit $\alpha(\hat{e}) = \alpha(e)$ und $\omega(\hat{e}) = \omega(e')$.
Falls $e' \in E_0$, so muss zu jedem $(e',e'') \in T$ das Abbiegeverbot $(\hat{e},e'')$ in T aufgenommen werden.
Die Kante e sowie das Abbiegeverbot (e,e') werden gelöscht.





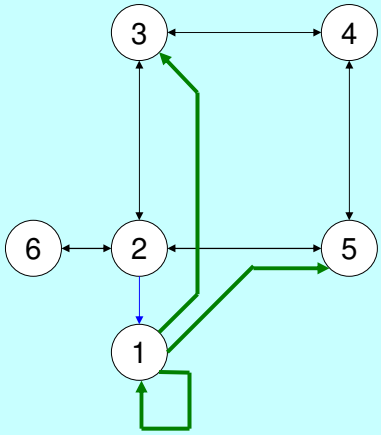
$T = \{(e_{2,3}, e_{3,6}), (e_{1,3}, e_{3,6})\}$



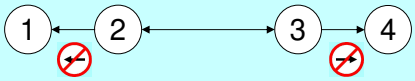


2.3.4 Die Methode des Ziehens neuer Kanten

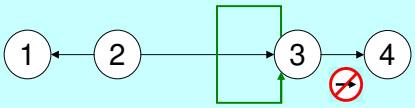
- Statisches Verfahren
- Jedes Abbiegeverbot wird durch Ziehen einer neuen Kante, welche die erlaubten Wege darstellt, überbrückt.
- Die neuen Kanten können einen ganzen Weg beinhalten.
- Knoten mit Abbiegeverbot können eventuell nicht mehr erreicht werden.
- Bei verschiedenen Abarbeitungsfolgen der Abbiegeverbote sind die resultierenden Graphen eventuell nicht äquivalent.
- Die Größe des Kürzeste-Wege-Baumes wächst mit der Anzahl der Knoten und der Anzahl der Abbiegeverbote des Graphen.



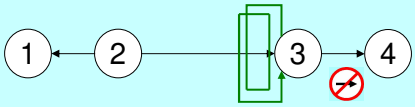
2.3.5 Die Methode terminiert nicht immer ?!



$$T = \{(e_{3,2}, e_{2,1}), (e_{2,3}, e_{3,4})\}$$



$$T_{neu} = \{(e_{3,3}, e_{3,4}), (e_{2,3}, e_{3,4})\}$$

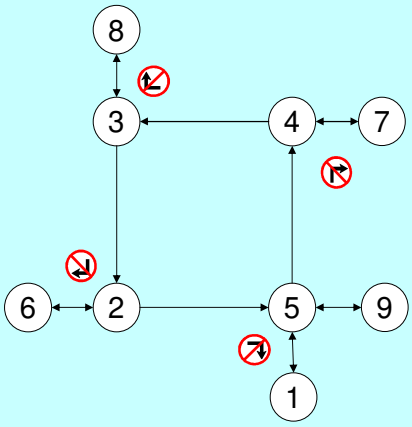


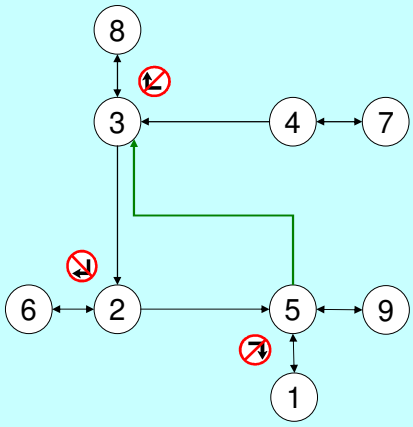
$$T_{neu} = \{(e_{3,3}, e_{3,4}), (e_{2,3}, e_{3,4})\}$$

Hausaufgabe:

Finden Sie eine Bedingung dafür, dass das Verfahren terminiert.

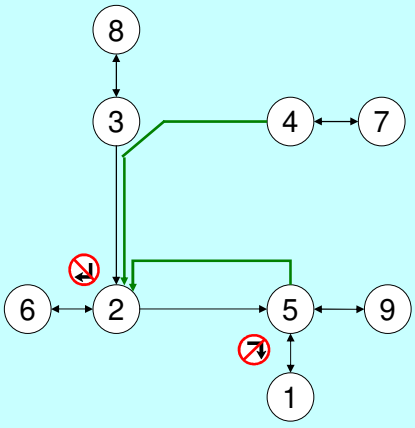
2.3.6 Die Abhängigkeit von der Reihenfolge

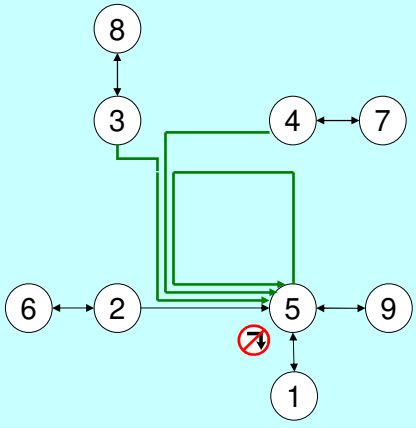




$$T_{neu} = (T \cup (e_{5,3}, e_{3,8})) \setminus (e_{5,4}, e_{4,7}) \}$$

2.3.6 Die Abhängigkeit von der Reihenfolge (2. Teil)

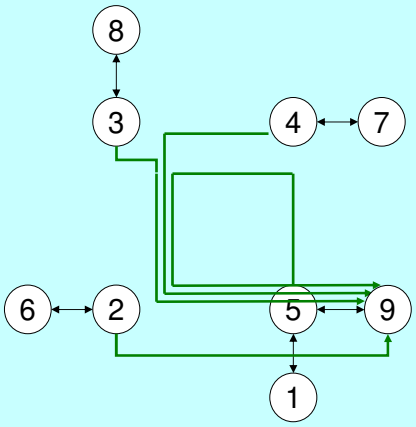




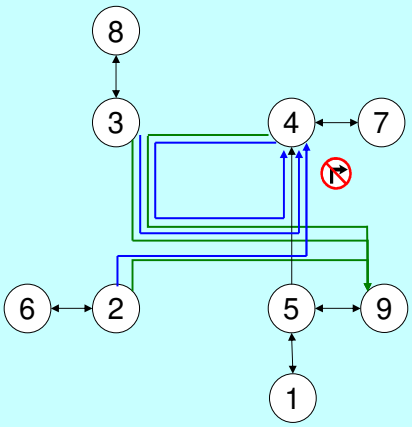
$$T_{neu} = (T \cup (e_{4,2}, e_{2,6}) \cup (e_{5,2}, e_{2,6})) \setminus ((e_{5,3}, e_{3,8}) \cup (e_{4,3}, e_{3,8}))$$

$$T_{neu} = (T \cup (e_{5,5}, e_{5,1}) \cup (e_{4,5}, e_{5,1}) \cup (e_{3,5}, e_{5,1})) \setminus ((e_{3,2}, e_{2,6}) \cup (e_{4,2}, e_{2,6}) \cup (e_{5,2}, e_{2,6}))$$

2.3.6 Die Abhängigkeit von der Reihenfolge (3. Teil)

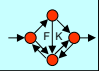


$T_{neu} = \emptyset$



Reihenfolge :

$(e_{4,3}, e_{3,8})\,(e_{3,2}, e_{2,6})\,(e_{2,5}, e_{5,1})\,(e_{2,5}, e_{5,4})$



2.4 Der Beweis des Hauptsatzes

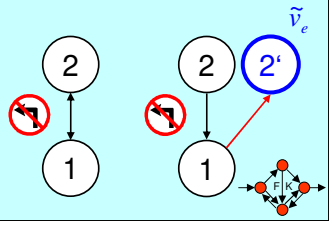
2.4.1 Erster Schritt des Algorithmus (blaue Knoten)

Sei $G := (V, E, \alpha, \omega, \gamma)$ ein Graph mit Abbiegeverboten $T = \{t_1, ..., t_k\}$. Wir konstruieren eine verbotsfreie Erweiterung $\tilde{G} := (\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{\alpha}, \tilde{\omega}, \tilde{\gamma})$. E_0 ist die Menge aller Kanten, von welchen aus ein Abbiegeverbot beginnt : $E_0 := \{ e \in E \mid \exists\ t \in T : t = (e, e') \text{ mit } e' \in E \}$
Die Kanten aus E_0 sind die roten Kanten, die Kanten aus $E \setminus E_0$ sind die schwarzen Kanten.

Zu jeder Kante e aus E_0 definieren wir einen neuen Knoten $\tilde{v}_e \notin V$ (blauer Knoten).
der erzeugenden (roten) Kante aus E_0 wird dieser Knoten als Endknoten zugewiesen :

$\tilde{\alpha}(e) := \alpha(e)$ $\qquad$ $\tilde{\omega}(e) := \tilde{v}_e$

$\tilde{V} := V \dot{\cup} \bigcup_{e \in E_0} \tilde{v}_e$ $\qquad$ damit ist $|\tilde{V}| = |V| + |E_0| \in O(n+m)$



2.4.2 Zweiter Schritt des Algorithmus (neue Kanten)

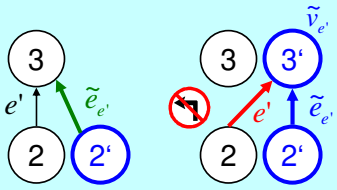
Zu jeder (roten) Kante $e \in E_0$ definieren wir eine Menge N_e als Menge aller Kanten, die von e aus erreichbar sind: $N_e := \{ e' \in E \mid \omega(e) = \alpha(e') \text{ und } (e, e') \notin T \}$
Dies sind genau die Kanten, in die von der Kante e aus abgebogen werden darf.

Jede dieser Kanten wird ebenfalls verdoppelt. Sei $\tilde{e}_{e'}$ (blaue und grüne Kanten) das Duplikat der Kante e' aus N_e dann definieren wir:

$$\tilde{\alpha}(\tilde{e}_{e'}) := \tilde{v}_e \qquad \tilde{\omega}(\tilde{e}_{e'}) := \begin{cases} \omega(e') & \text{falls } e' \notin E_0 \text{ (grüne Kanten)} \\ \tilde{v}_{e'} & \text{falls } e' \in E_0 \text{ (blaue Kanten)} \end{cases} \qquad \tilde{\gamma}(\tilde{e}_{e'}) = \gamma(e')$$

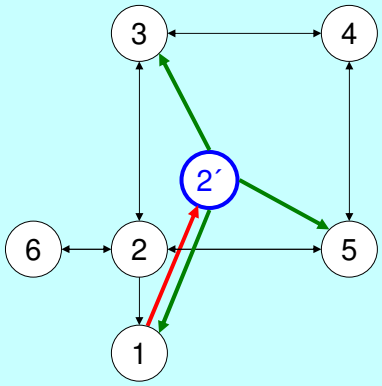
$$\tilde{E} := E \dot{\cup} \bigcup_{e \in E_0} \left(\bigcup_{e' \in N_e} \tilde{e}_{e'} \right) \qquad \text{damit ist}$$

$$|\tilde{E}| = |E| + \left(\sum_{e \in E_0} g^+(\omega(e)) \right) - |T| \leq |E| + g^+(G) \cdot |E_0|$$



2.4.3 Die Methode des verbotsorientierten Knotensplitting (Schmid)

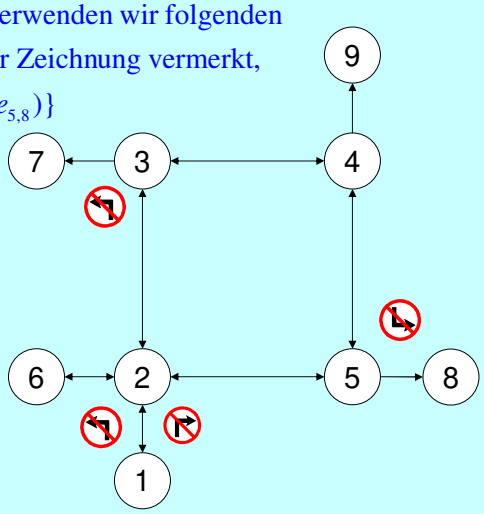
- Statisches Verfahren
- Der Endknoten jeder Kante, von der aus Abbiegeverbote existieren, wird gesplittet und der Kante als Endknoten zugewiesen.
- Originalknoten und Duplikat stellen die selbe Kreuzung dar.
- Nur die Kanten, in die abgebogen werden darf, werden gezogen.
- Die Größe des kürzeste-Wege-Baumes wächst mit der Anzahl der Knoten und der Anzahl der Abbiegeverbote des Graphen.



2.4.4 Beispielgraph

Um die folgenden Schritte zu erläutern verwenden wir folgenden Beispielgraph : $V = \{v_1, .. v_9\}$, E wie in der Zeichnung vermerkt,
$T = \{(e_{1,2}, e_{2,6}), (e_{1,2}, e_{2,5}), (e_{2,3}, e_{3,7}), (e_{4,5}, e_{5,8})\}$

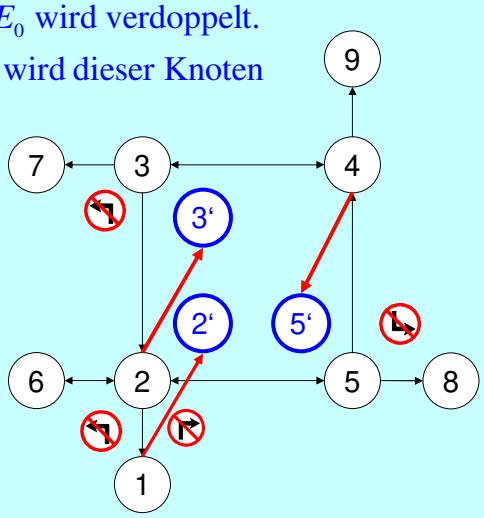
$E_0 = \{e_{1,2}, e_{2,3}, e_{4,5}\}$



2.4.4 Beispielgraph nach der Knotenverdopplung

Jeder Endknoten einer Kante aus E_0 wird verdoppelt.
Der entsprechenden Kante aus E_0 wird dieser Knoten als Endknoten zugewiesen.

$E_0 = \{e_{1,2}, e_{2,3}, e_{4,5}\}$
$V_{neu} = \{v_1, .. v_9, v_2', v_3', v_5'\}$



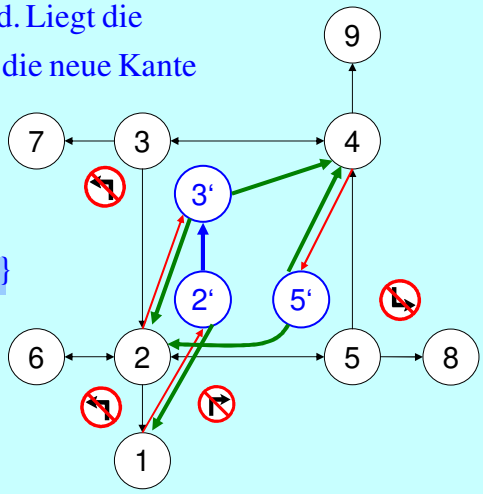
2.4.4 Die Verbindung mit den erlaubten Richtungen

Von den neuen Knoten aus werden nur die Kanten gezogen, welche nicht verboten sind. Liegt die entsprechende Kante in E_0, so wird die neue Kante mit dem neuen Knoten verbunden.

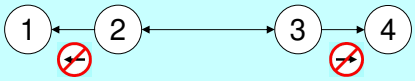
$E_0 = \{e_{1,2}, e_{2,3}, e_{4,5}\}$

$E = E \cup \{e_{2',1}, e_{3',2}, e_{3',4}, e_{5',2}, e_{5',4}, e_{2',3}\}$

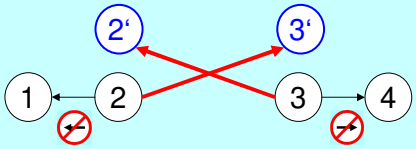
$V_{neu} = \{v_1, .. v_9, v_2', v_3', v_5'\}$

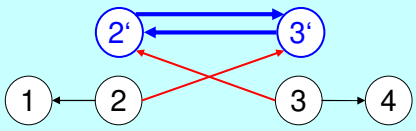


2.4.5 Erstes Problembeispiel der Methode des Ziehens neuer Kanten

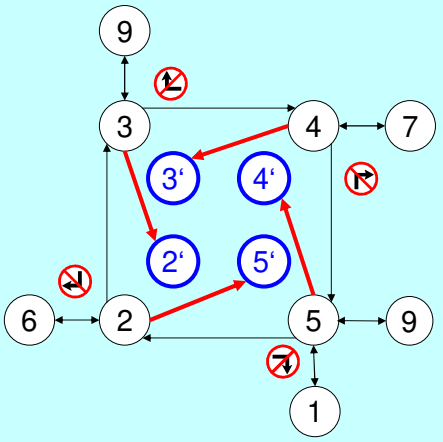


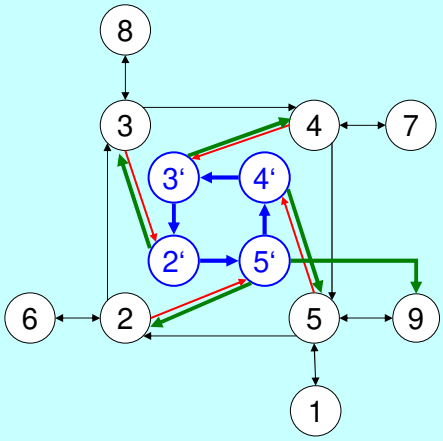
$T = \{(e_{3,2}, e_{2,1}), (e_{2,3}, e_{3,4})\}$





2.4.5 Das zweite Problembeispiel der Methode des Ziehens neuer Kanten





2.4.6 Der Beweisüberblick

- Grundidee: Die Kanten werden durch ihren Anfangsknoten klassifiziert (2.4.8)
- Homomorphie: Die Grapherweiterung ist homomorph zum Ausgangsgraphen (2.4.9)
- Wegeäquivalenz: Die im erweiterten Graphen berechneten kürzesten Wege sind die kürzesten Wege im Ausgangsgraphen unter Berücksichtigung der Abbiegeverbote (2.4.10 und 2.4.11).
- Minimalität: Im erweiterten Graph darf keine Kante weggelassen werden (2.4.12)

2.4.7 Die Definition der kanonischen Projektionen

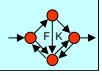
Sei $G=(V,E)$ ein Graph mit Abbiegeverboten T und $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$ dessen Erweiterung, dann definieren wir die Projektionen Π wie folgt :

$$\Pi_1(v) := \begin{cases} v & \text{falls } v \in V \quad \text{(schwarzer Knoten)} \\ \omega(e) & \text{falls } v = v_e \notin V \text{ von } e \in E_0 \text{ erzeugt (blauer Knoten) wurde} \end{cases}$$

$$\Pi_2(e) := \begin{cases} e & \text{falls } e \in E \text{ (schwarze oder rote Kante)} \\ e' & \text{falls } e \notin E \text{ von } e' \in N_{e_0}\ (e_0 \in E_0) \text{ erzeugt (blaue oder grüne Kante) wurde} \end{cases}$$

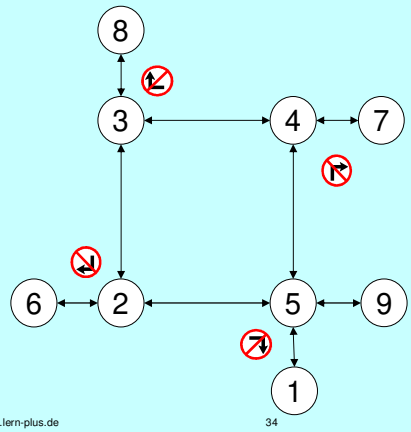
Mit dieser Definition sind Π_1 und Π_2 surjektiv und erfüllen damit die Bedingung (VE 1).

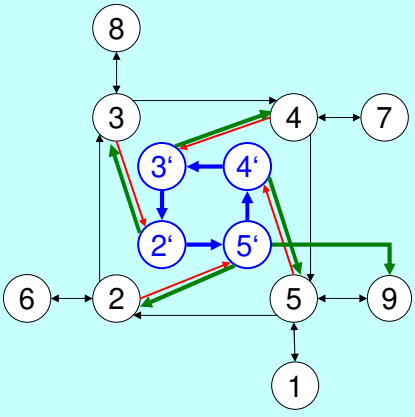
Wenn klar ist welche Projektion gemeint ist, schreiben wir auch Π statt Π_1 bzw. Π_2 .

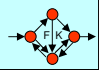


2.4.8 Klassifikation der Kanten durch Anfangs und Endknoten

$e \in E \setminus E_0$	$\Leftrightarrow$	e ist schwarz	$\Leftrightarrow$	$\tilde{\alpha}(e) \in V \quad \tilde{\omega}(e) \in V$
$e \in E_0$	$\Leftrightarrow$	e ist rot	$\Leftrightarrow$	$\tilde{\alpha}(e) \in V \quad \tilde{\omega}(e) \notin V$
$e \notin E, \Pi(e) \in E \setminus E_0$	$\Leftrightarrow$	e ist grün	$\Leftrightarrow$	$\tilde{\alpha}(e) \notin V \quad \tilde{\omega}(e) \in V$
$e \notin E, \Pi(e) \in E_0$	$\Leftrightarrow$	e ist blau	$\Leftrightarrow$	$\tilde{\alpha}(e) \notin V \quad \tilde{\omega}(e) \notin V$



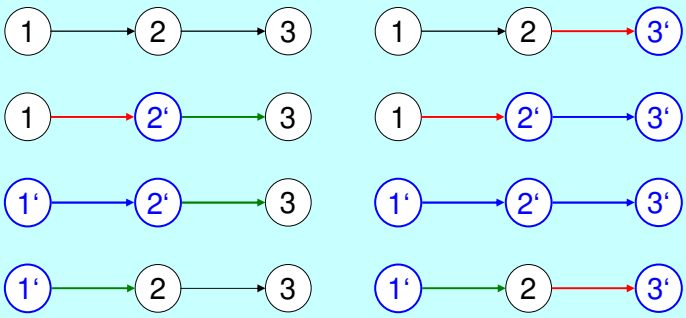




2.4.8 mögliche Knoten / Kantenfolgen in $\tilde{G}$

Startkantenfarbe — schwarzes und blaues Level

- Schwarz
- Rot
- Blau
- Grün



Sei e eine grüne oder schwarze Kante, dann gilt $\Pi(e) \in E \setminus E_0$.
Sei e eine rote oder blaue Kante, dann gilt $\Pi(e) \in E_0$.

2.4.9 Die Homomorphie (1.Teil: schwarze und rote Kanten)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Abbiegeverboten T und $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ dessen Erweiterung, dann gilt: $\alpha(\Pi_2(e)) = \Pi_1(\tilde{\alpha}(e))$ und $\omega(\Pi_2(e)) = \Pi_1(\tilde{\omega}(e))$ (siehe 2.3.1).

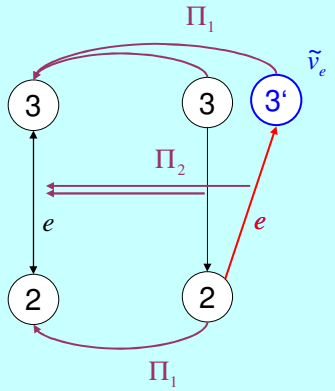
Beweis:
Sei $e \in E$, dann gilt (schwarze oder rote Kante):

$(v_2 =)$ $\alpha(\Pi_2(e)) = \alpha(e)$ (Definition von Π_2)
$= \Pi_1(\tilde{\alpha}(e))$ $(\tilde{\alpha}(e) \in V)$

analoges gilt für ω, falls $e \notin E_0$ also falls e schwarz ist.

Sei $e \in E_0$ (rot), dann gilt:

$(v_3 =)$ $\omega(\Pi_2(e)) = \omega(e)$ (Definition von Π_2)
$= \Pi_1(\tilde{v}_e)$ (Definition von Π_1)
$= \Pi_1(\tilde{\omega}(e))$ (mit 2.4.1)



2.4.9 Die Homomorphie (2. Teil: grüne Kanten)

Sei $\tilde{e} \notin E$ von $e' \in N_e$, $e' \notin E_0$ erzeugt, dann gilt: $\tilde{e}$ ist grün und

$(v_3 =)\quad \alpha(\Pi_2(\tilde{e})) = \alpha(e')$ (Definition von Π_2 und e' erzeugt $\tilde{e}$)

$= \omega(e)$ (e, e' ist ein Weg, nach Definition von N_e)

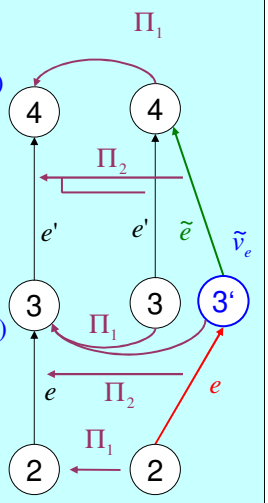
$= \Pi_1(\tilde{v}_e)$ (Definition von Π_1; $e \in E_0$)

$= \Pi_1(\tilde{\alpha}(\tilde{e}))$ (Definition von $\tilde{\alpha}$)

$(v_4 =)\quad \omega(\Pi_2(\tilde{e})) = \omega(e')$ (Definition von Π_2 und e' erzeugt $\tilde{e}$)

$= \Pi_1(\tilde{\omega}(e'))$ ($e' \in E \setminus E_0$ (schwarz) und Definition von $\tilde{\omega}$)

$= \Pi_1(\tilde{\omega}(\tilde{e}))$ (2.4.2)



2.4.9 Die Homomorphie (3. Teil – blaue Kanten)

Sei $\tilde{e} \notin E$ von $e' \in N_e$, $e' \in E_0$ erzeugt, dann gilt: $\tilde{e}$ ist blau und

$(v_3 =)\quad \alpha(\Pi_2(\tilde{e})) = \alpha(e')$ (Definition von Π_2 und e' erzeugt $\tilde{e}$)

$= \omega(e)$ (e, e' ist ein Weg, nach Definition von N_e)

$= \Pi_1(\tilde{v}_e)$ (Definition von Π_1)

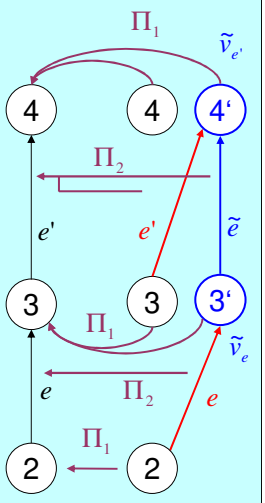
$= \Pi_1(\tilde{\alpha}(\tilde{e}))$ (Definition von $\tilde{\alpha}$)

$(v_4 =)\quad \omega(\Pi_2(\tilde{e})) = \omega(e')$ (Definition von Π_2 und e' erzeugt $\tilde{e}$)

$= \Pi_1(v_{e'})$ (Definition von Π_1 und $v_{e'}$)

$= \Pi_1(\tilde{\omega}(e'))$ (Definition von $v_{e'}$)

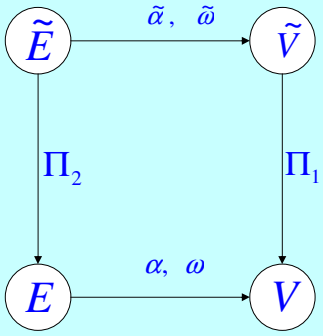
$= \Pi_1(\tilde{\omega}(\tilde{e}))$ (2.4.2)



2.4.9 Der erweiterte Graph ist homomorph zu G

Für alle $e \in \tilde{E}$ gilt: $\alpha(\Pi_2(e)) = \Pi_1(\tilde{\alpha}(e))$ und $\omega(\Pi_2(e)) = \Pi_1(\tilde{\omega}(e))$

nach 2.1.2 ist also $\tilde{G}$ homomorph zu G.



2.4.10 Jeder, nicht verbotene Weg besitzt ein Äquivalent (VE 2)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Abbiegeverboten T und $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ dessen Erweiterung
dann gilt: Zu jedem erlaubten Weg $w := (e_1, .., e_n)$ mit $(e_i, e_{i+1}) \notin T$ (i = 1 .. $n-1$) in G
existiert ein Weg $\tilde{w} := (\tilde{e}_1, .., \tilde{e}_n)$ in $\tilde{G}$ mit $\Pi(\tilde{e}_i) = e_i$ für i = 1..n und $\alpha(e_1) \in V$.

Beweis: Wir konstruieren den Weg $\tilde{w}$: Sei $e_i \in w$
1. Fall: Sei $\tilde{e}_{i-1}$ schwarz oder grün oder $i = 1$, dann definieren wir $\tilde{e}_i := e_i$.
$\tilde{e}_i$ ist damit schwarz oder grün, es gilt $\Pi(\tilde{e}_i) = e_i$ und es gilt:

$\tilde{\omega}(\tilde{e}_{i-1}) = \tilde{\omega}(e_{i-1})$ nach Definition von $\tilde{\omega}$
$= \tilde{\alpha}(e_i)$ w ist ein Weg
$= \tilde{\alpha}(\tilde{e}_i)$ nach Definition von $\tilde{e}_i$.

2. Fall: Sei $\tilde{e}_{i-1}$ blau oder rot, dann gilt: $e_{i-1} \in E_0$ und e_i ist (weil $(e_{i-1}, e_i) \notin T$) als Element von $N_{e_{i-1}}$ verdoppelt worden – dieses Duplikat heisse $\hat{e}_i$. Wir definieren $\tilde{e}_i := \hat{e}_i$ (blau oder grün).
Es gilt: $\Pi(\tilde{e}_i) = e_i$ (2.4.7) und

$\tilde{\omega}(\tilde{e}_{i-1}) = \tilde{v}_{e_{i-1}}$ nach Definition von $\tilde{\omega}$
$= \tilde{\alpha}(\tilde{e}_i)$ (2.4.2)

2.4.11 Kein Weg in $\tilde{G}$ enthält Abbiegeverbot (VE 3)

Sei $G=(V,E)$ ein Graph mit Abbiegeverboten T und $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$ dessen Erweiterung und sei $\tilde{w}:=(\tilde{e}_1,..,\tilde{e}_n)$ ein Weg in $\tilde{G}$, dann gilt $w:=(\Pi(\tilde{e}_1),..,\Pi(\tilde{e}_n))$ ist ein Weg in G, der kein Abbiegeverbot enthält.

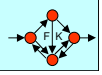
Beweis: Sei $\tilde{w}$ ein beliebiger Weg in $\tilde{G}$, und sei $\tilde{e}_i$ $i=2..n$ gewählt, dann gilt :

(1) $\Pi(\tilde{w})$ ist ein Weg :

$$\begin{aligned}\omega(\Pi(\tilde{e}_{i-1})) &= \Pi(\tilde{\omega}(\tilde{e}_{i-1})) && \text{Homomorphie}\\ &= \Pi(\tilde{\alpha}(\tilde{e}_i)) && (\,\tilde{w}\text{ ist ein Weg}\,)\\ &= \alpha(\Pi(\tilde{e}_i)) && \text{Homomorphie}\end{aligned}$$

(2) Annahme : $\Pi(\tilde{w})$ enthält ein Abbiegeverbot $(e_{i-1},e_i)\in T$, dann gilt :

$\tilde{e}_{i-1}$ ist blau oder rot und $\tilde{\omega}(\tilde{e}_{i-1})=\tilde{v}_{e_{i-1}}$. Mit 2.4.8 ist $\tilde{e}_i$ blau oder grün und ist nach 2.4.2 von einer Kante erzeugt worden in die von e_{i-1} aus abgebogen werden darf (Widerspruch zu $(e_{i-1},e_i)\in T$).



2.4.12 Die Minimalität

Zu jedem $\tilde{e}\in\tilde{E}$ existiert ein erlaubter Weg $w:=(e_1,..,e_n)$ in G mit der Eigenschaft, dass alle Wege $\tilde{w}:=(\tilde{e}_1,..,\tilde{e}_n)$ in $\tilde{G}$, mit $\Pi(\tilde{e}_i)=e_i$ und

(*) $\tilde{\alpha}(\tilde{e}_1)\in V$, die Kante $\tilde{e}$ enthalten.

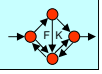
Beweis: Sei $a^-(v)$ die Anzahl der Abbiegeverbote (e_1,e_2), mit $\omega(e_1)=v$ (Anzahl der Abbiegeverbote am Knoten v). Nach Konstruktion gilt :

Die Menge $\Pi^{-1}(e)=\begin{cases}\text{eine rote Kante und bis zu } a^-(\omega(e)) \text{ blaue Kanten falls } e\in E_0\\ \text{eine schwarze Kante und und bis zu } a^-(\omega(e)) \text{ grüne Kanten falls } e\notin E_0\end{cases}$

1. Fall: Sei $\tilde{e}$ schwarz oder rot, dann definieren wir $w=e$, dann gilt mit oben $\Pi^{-1}(e)\cap\{\tilde{e}\in\tilde{E}\mid\tilde{\alpha}(\tilde{e})\in V\}=\{e\}$ und damit ist einelementig.

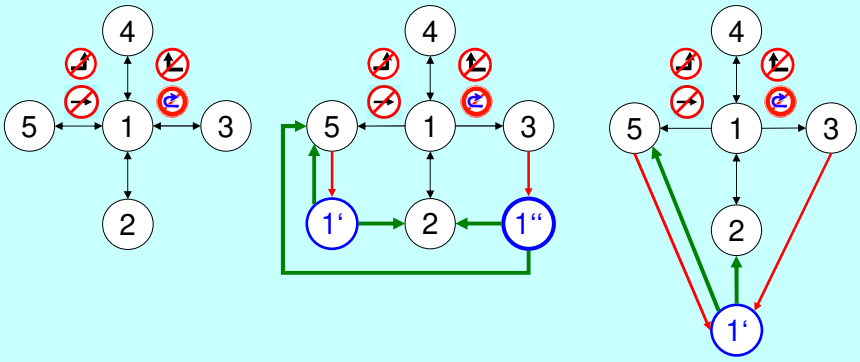
2. Fall: Sei $\tilde{e}=\tilde{e}_{e'}$ blau oder grün, dann wurde $\tilde{e}_{e'}$ von einer Kante $e'\in E_0$ erzeugt), dann ist $(e',\tilde{e}_{e'})\notin T$ ein (erlaubter) Weg mit $\tilde{\alpha}(e')\in V$ und mit oben ist die Kante e' eindeutig.

Hausaufgabe: Suchen Sie schärfere Minimalitätsaussagen für diese Erweiterung.



2.4.13 Die Verbesserung von Lewandowski (6.07.2004)

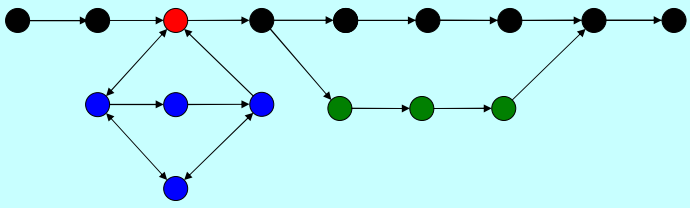
Seien $e_1, e_2 \in E_0$, $\omega(e_1) = \omega(e_2)$ und $N_{e_1} = N_{e_2}$, dann können die Knoten $\tilde{v}_{e_1}$ und $\tilde{v}_{e_2}$ zusammengefasst werden, und damit müssen die Kanten aus $N_{e_1} = N_{e_2}$ nur ein mal verdoppelt werden.



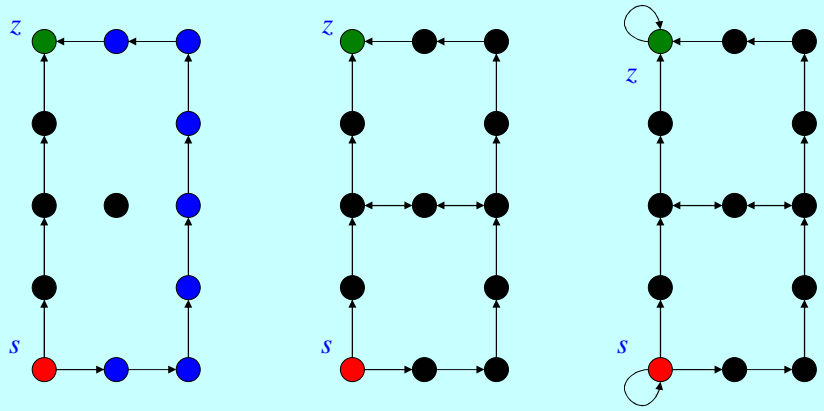
2.5 k-kürzeste Wege mit dem Algorithmus von Azevedo

2.5.1 Definition für k - kürzeste Wege

Gegeben sei ein *Graph* $G := (V, E, \alpha, \omega, \gamma)$ sowie ein Startknoten s und ein Zielknoten z.
Ein Weg w heißt *zyklenfrei* :$\Leftrightarrow$ kein Knoten kommt in w mehrfach vor.
Sei W die Menge aller Wege von s nach z (dies können bis zu $(|V|-1)!$ zyklenfreie Wege sein).
Ein Weg w_1 heißt *kürzester Weg* von s nach z :$\Leftrightarrow \gamma(w) \geq \gamma(w_1)$ für alle $w \in W$
(dieser ist i.A. nicht eindeutig). Sei $w_1 \in$ W fest gewählt,
dann heißt w_2 *zweitkürzester Weg* von s nach z :$\Leftrightarrow \gamma(w) \geq \gamma(w_2)$ für alle $w \in W \setminus \{w_1\}$.
Ein Weg heißt *k - kürzester Weg* von s nach z :$\Leftrightarrow \gamma(w) \geq \gamma(w_k)$ für alle $w \in W \setminus \{w_1, ..., w_{k-1}\}$.

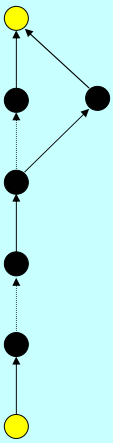


2.5.2 Zweitkürzeste Wege in einem Graphen - (einführende Beispiele)



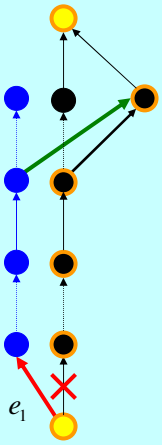
- Gesucht ist der zweitkürzeste Weg von s nach z
- Dijkstra ist dem Problem zweit kürzester Wege nicht gewachsen
- Algorithmus oder Graphveränderung ist notwendig

2.5.3 Algorithmus von Azevedo (1990) modifiziert von Schmid

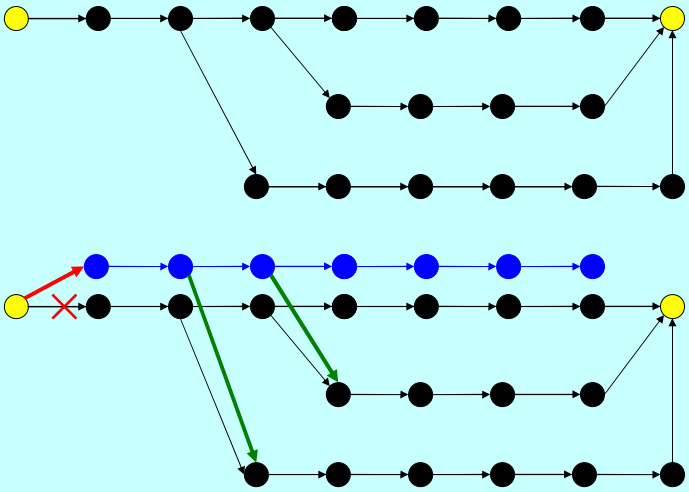


- Statisches Verfahren (verändert nur den Graph – nicht aber den kürzeste Wege- Algorithmus)
- Azevedo verwendet die Methode Pathdeletion (Wegeverbote).

1. Erschaffe einen neuen Startknoten und einen neuen Zielknoten (später).
2. Verdopple den kürzesten Weg ohne erste und letzte Kante bzw. Knoten. (Wegeverdopplung)
3. Weise der ersten Kante einen neuen Endknoten zu. (Umleitung)
4. Ziehe alle Kanten über die der kürzeste Weg verlassen werden kann. (Verbindung mit dem Ausgangsgraphen)

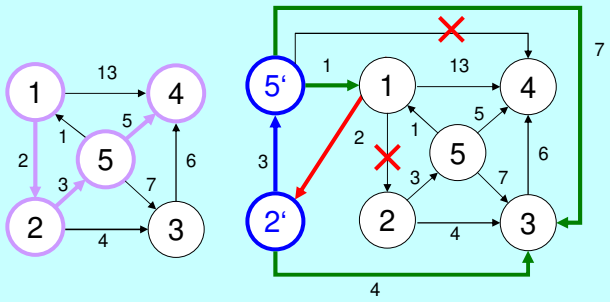


2.5.4 Beispiel für den modifizierten Algorithmus von Azevedo

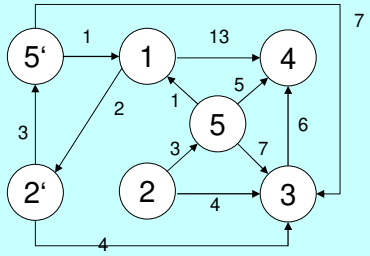


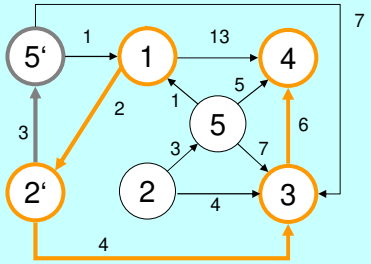
- Der kürzeste Weg ist nicht mehr begehbar. Der zweit und drittkürzeste Weg sind noch möglich.

2.5.4 Der zweitkürzeste Weg von 1 nach 4

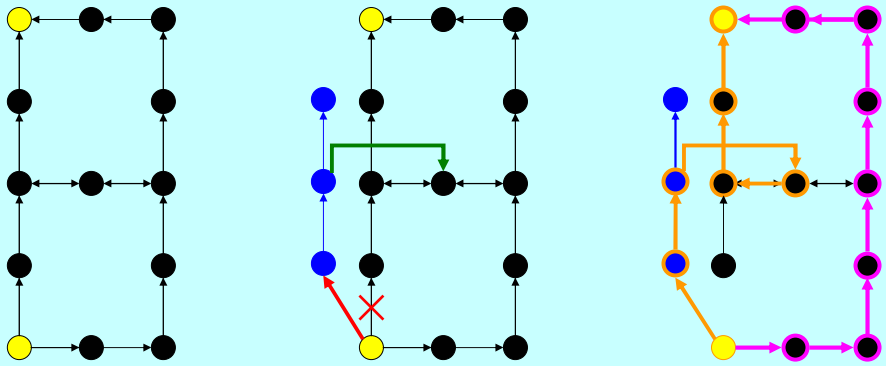


Der verdoppelte Weg ist blau
Die Verbindung mit dem Ausgangsgraphen grün.
Die Kanten (2',5) und (5',4) werden nicht gezogen. Die Kante (1,2) wir zur Kante (1,2').

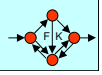




2.5.5 Beispiel für zweitkürzesten Weg mit Schlinge



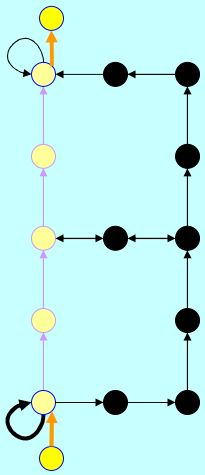
- Der zweitkürzeste Weg ist nicht der vermutete (grüne) Weg, sondern der rote Weg, der sich vom kürzesten Weg nur durch eine Schlinge unterscheidet.
- Länge des roten Weges = 6 < 8 = Länge des grünen Weges



2.5.6 Der erste Schritt

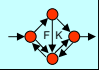
Problem:

Der Algorithmus von Azevedo kann in dieser Form einen zweitkürzesten Weg der Form
Schlinge - (alter) kürzester Weg oder
(alter) kürzester Weg – Schlinge nicht erkennen.

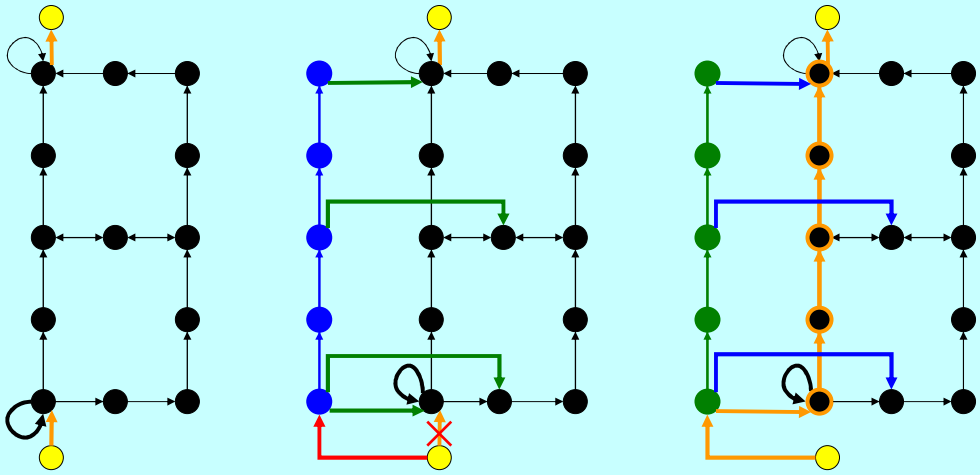


Lösung:

- Erschaffe einen neuen Startknoten und einen neuen Zielknoten
- Verbinde den neuen Startknoten mit dem alten Startknoten durch eine Kante der Länge 0.
- Verbinde den alten Zielknoten mit dem neuen Zielknoten durch eine Kante der Länge 0.



Beispiel für einen erweiterten Graphen incl. 1 Schritt



Der zweitkürzeste Weg (orange) beinhaltet die Schlinge beim Startknoten

2.5.7 Aufwand des Verfahrens von Azevedo

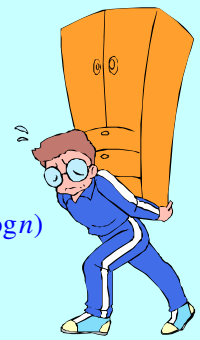
Der kürzeste Weg zwischen 2 Knoten kann maximal $|V| = n$ Knoten und $n-1$ Kanten beinhalten. Die Anzahl, der vom kürzesten Weg wegweisenden Kanten ist maximal $|E| - 2 = m - 2$. Damit ist die Anzahl der neu erschaffenen Elemente maximal n Knoten und $m-2$ Kanten. Der Platzbedarf kann sich also fast verdoppeln.

Der Aufwand, den zweit - kürzesten Weg zu berechnen, kann also bei Anwendung des Dijkstra - Algorithmus *zwei* mal so lange dauern wie die Berechnung des kürzesten Weges.

$$\text{Aufwand} = \text{Dijkstra}(G) + \text{Erweiterung} + \text{Dijkstra}(G_{erw})$$
$$= O(m + n \cdot \log n) + O(m+n) + O(m + n \cdot \log n) = O(m + n \cdot \log n)$$

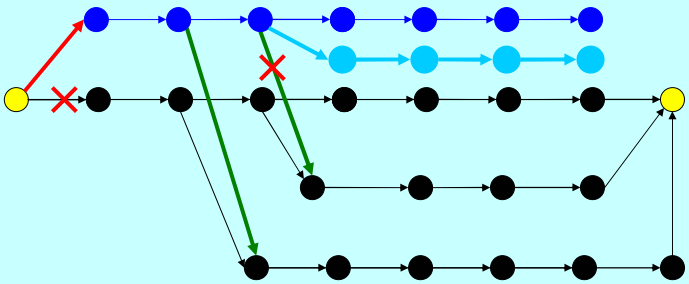
Damit ist Azevedo $= O(m + n \cdot \log n) \leq$ Hoffman $= O(n^2)$

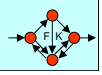
(falls $m \in O(n^2)$) $<$ Pollack $= O(n\,(n+m) \cdot \log n\,)$



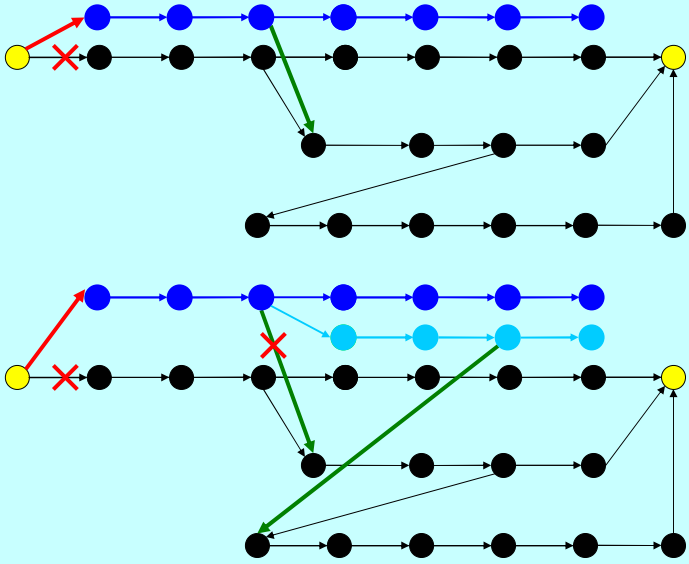
2.5.8 Drittkürzeste Wege nach Azevedo

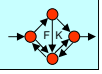
Erschaffe einen neuen Startknoten und einen neuen Zielknoten. Berechne den kürzesten Weg w_1 und den zweitkürzesten Weg $w_2 = (e_1^2, .. , e_{m_2}^2)$. Der gemeinsame maximale Anfangsweg $(e_1^1 = e_1^2, e_2^1 = e_2^2, ... , e_j^1 = e_j^2)$ muß nicht verdoppelt werden. Es werden nur die Kanten $(e_{j+2}^2, .. , e_{m_2-1}^2)$ und die dazugehörigen Knoten verdoppelt. Die Kante e_{j+1}^2 über die der kürzeste Weg verlassen wird, bekommt einen neuen Endknoten. Ziehe alle Kanten über die w_2 verlassen werden kann.





2.5.8 Drittkürzeste Wege nach Azevedo





2.5.9 k - kürzeste Wege nach Azevedo

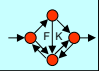
Berechnung des $k+1$ kürzesten Weges:

Erschaffe einen neuen Startknoten und einen neuen Zielknoten. Berechne die k - kürzesten Weg $w_1, .., w_k$ (mit w_i $(e_1^i, .. , e_{m_i}^i)$). Der gemeinsame maximale Anfangsweg $(e_1^l = e_1^k,\ e_2^l = e_2^k,\ ... ,e_j^l = e_j^k)$ mit $l < k$, j maximal, muß nicht verdoppelt werden. Es werden nur die Kanten $(e_{j+2}^k, .. , e_{m_k-1}^k)$ und die dazugehörigen Knoten verdoppelt. Die Kante e_{j+1}^k über die w_l verlassen wird, bekommt einen neuen Endknoten. Ziehe alle Kanten über die w_k verlassen werden kann.

$$\text{Aufwand} = \text{Dijkstra}(G) + \text{Erw.} + \text{Dijkstra}(2 \cdot G) + \text{Erw.} + ... + \text{Dijkstra}(k \cdot G)$$

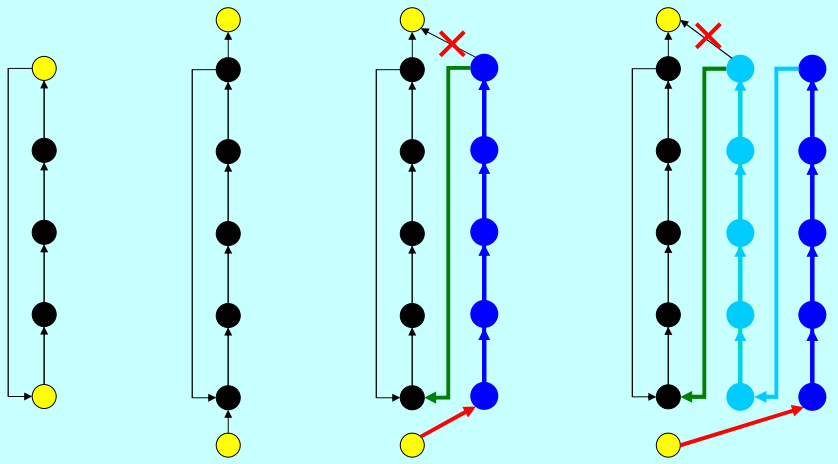
$$= \left(\sum_{i=1}^{k} O(i \cdot (m + n \cdot \log n)) + O(m+n) \right) - O(m+n)$$

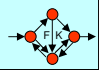
Damit liegt der Aufwand bei $O(k^2 \cdot (m + n \cdot \log n))$.



2.5.10 Der schlimmste Fall

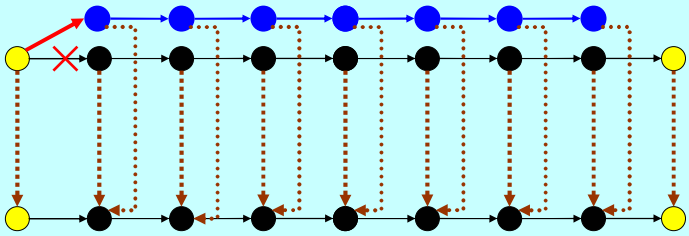
Gegeben sei ein Graph, der nur aus einem Zyklus besteht. Der k - kürzeste Weg von s nach z ergibt sich aus dem kürzesten Weg und dem anschliessenden k-1 maligen Durchlaufen des kompletten Graphen.





2.5.11 Beweisüberblick des Algorithmus von Azevedo

- Jeder Weg im erweiterten Graphen ist auch ein Weg im Ausgangsgraphen (die zeigt man über kanonische Projektionen = inverse Abbildung der Wegeverdopplung).
- Alle Wege (außer Wegen, die die k-kürzesten Wege enthalten) im Ausgangsgraphen, sind auch Wege im erweiteten Graphen (man konstruiert den Verlauf eines gegebenen Weges im erweiterten Graph).
  Genau die k-kürzesten Wege sind verboten.



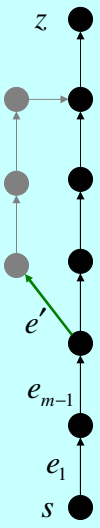
2.5.12 Der Algorithmus von Hoffman & Pavley

Berechnung aller kürzesten Wege zum Zielknoten hin.
Der kürzeste Weg $(e_1,..,e_n)$ vom Start zum Zielknoten ist damit ebenfalls berechnet.

Nimm von jedem Anfangsknoten jeder Kante e_i des kürzesten Weges jede Kante $e \neq e_i$ mit $\alpha(e) = \alpha(e_i)$ und berechne den zweitkürzesten Weg als

$$\min_{i=1}^{n+1} \min_{e} \{ d(s,\alpha(e)) + \gamma(e) + d(\omega(e),z) \mid \text{mit } \alpha(e) = \alpha(e_i) \}$$

Der zweitkürzeste Weg ist also
$(e_1,..,e_{m-1},e') +$ kürzester Weg von $\omega(e)$ nach z.

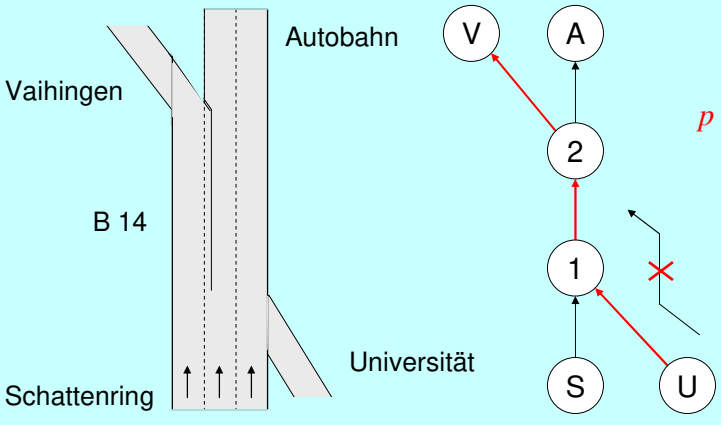


2.6 (Kürzeste) Wege in Graphen mit Wegeverboten

- Reduktion auf relevante Wegeverbote und Äquivalenzklassenbildung (2.6.3)
- Die Wegeverdopplung (2.6.4)
- Der Wegebaum (2.6.5)
- Verbinden der gesplitteten Wege mit dem Ausgangsgraphen (2.6.7)
- Verbinden der gesplitteten Wege untereinander (2.6.9)

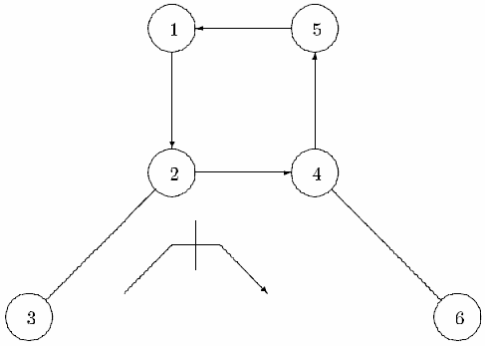
2.6.1 Definition Wegeverbot

Eine Kantenfolge $w := (e_1,..,e_n)$ heißt Weg, wenn $\omega(e_i) = \alpha(e_{i+1})\ \ i = 1..n-1.$
Ein Weg $p := (e_1,..,e_n)$ heißt $Wegeverbot$, wenn die Sequenz $(e_1,..,e_n)$ in keinem Weg vorkommen darf. P ist die Menge aller Wegeverbote.

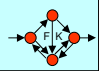


$$p := (e_{u,1}, e_{1,2}, e_{2,v})$$

2.6.2 Kanten müssen evtl. mehrfach befahren werden



Beim Fahren von v_3 nach v_6 muss die Kante $e_{(2,4)}$ mehrfach befahren werden



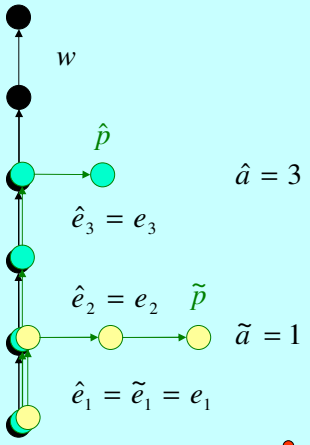
2.6.3 Reduktion, Klassenbildung und Anfangswege

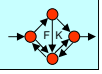
Existieren Wegeverbote p, p' mit p ist Teilweg von p', so muß das größere Wegeverbot p' nicht mehr betrachtet werden.

Die erste Kante von p hat eine wichtige Bedeutung.
Äquivalenzklassenbildung: $\hat{p} \cong \tilde{p} \Leftrightarrow \hat{e}_1 = \tilde{e}_1$

Für $w \in W$ und $\tilde{p} \in P$ mit $\tilde{e}_1 = e_1$ sei
$a := aga(\tilde{p}, w) := \max\{ k \mid \tilde{e}_i = e_i \text{ für } i = 1..k \}$
die Anzahl der gemeinsamen Anfangskanten von w und $\tilde{p}$. $\tilde{p}$ heißt *Anfangsweg* von w.

$\hat{p}$ heißt ein *maximaler Anfangsweg*, wenn $aga(\hat{p}, w) = \max\{ aga(p, w) \mid p \in P \}$.





2.6.4 Die Wegeverdopplung

Idee : Erste Kante eines Wegeverbotes umleiten, um dann den letzten Schritt zu verbieten.

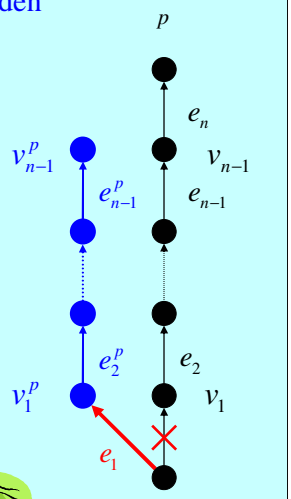
Wir betrachten ein Wegeverbot : $p := (e_1, \ldots, e_n)$.

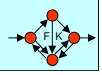
Verdopple die Knoten und Kanten von p ohne erstes und letztes Element :

Knoten : $v_1^p, \ldots, v_{n-1}^p$, Kanten : $e_2^p, \ldots, e_{n-1}^p$.

Weise e_1 einen neuen Endknoten zu : $\omega(e_1) := v_1^p$

Die kanonische Projektion weist Duplikaten ihre Originale zu : $\Pi(e_i^p) = e_i$





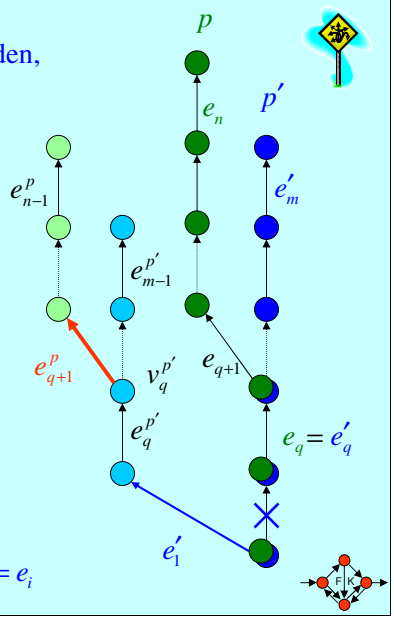
2.6.5 Der Wegebaum

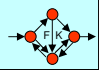
Wir betrachten schrittweise jedes Wegeverbot p.
Wenn bereits Wegeverbote aus $[p]$ gesplittet wurden, so muß p nicht von Anfang an gesplittet werden.

Sei $p' := (e'_1, \ldots, e'_m)$ der maximale Anfangsweg von p in der Menge aller Wegeverbote, die bereits bearbeitet wurden. Die Anzahl der gemeinsamen Anfangskanten sei q.

Wir verdoppeln die Elemente des Wege-verbotes p erst ab Kante $q+1$ und hängen diese an den maximalen Anfangsweg an :

$\alpha(e_{q+1}^p) := v_q^{p'}$ $\quad \alpha(e_{i+1}^p) := \omega(e_i^p) = v_i^p$ $\quad \Pi(e_i^p) := e_i$





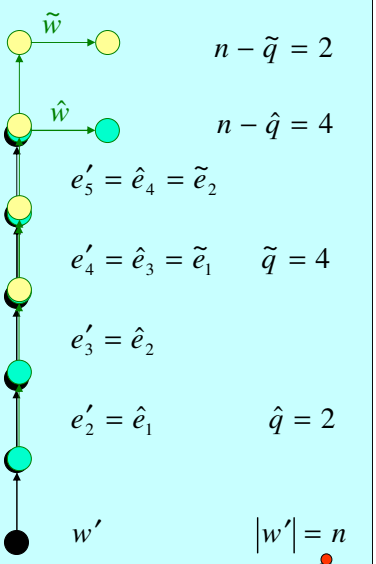
2.6.6 Endwege

$\tilde{w}$ heißt *Endweg* von w', wenn ein Index $\tilde{q} \geq 0$ existiert, so daß $e'_{q+i} = \tilde{e}_i$ für $1 \leq i \leq n - \tilde{q}$.

$\tilde{w}$ beginnt innerhalb von w' verläuft dann gleich bis zum Ende von w' geht dann eventuell noch weiter.

$n - \tilde{q}$ ist die Anzahl der gemeinsamen Endkanten.

Ein Endweg $\hat{w}$ heißt *maximal* wenn $n - \hat{q}$ maximal ist.

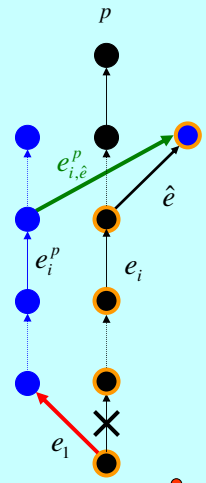


2.6.7 Die Verbindung mit dem Ausgangsgraphen

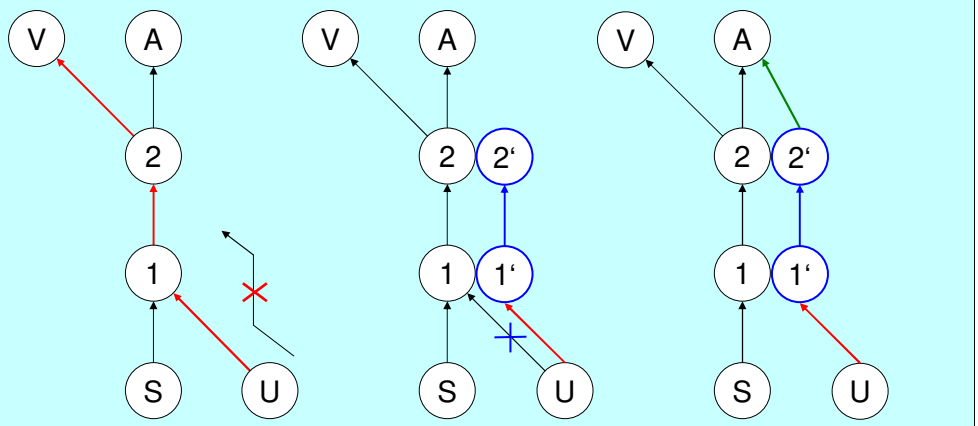
Zu jeder Kante $\hat{e}$ mit $\alpha(\hat{e}) = \omega(e_i)$ betrachten wir den Weg $w := (e_1, .., e_i, \hat{e})$, der mit der gleichen Kante (e_1) beginnt wie p, ein Stück parallel verläuft und p über die Kante $\hat{e}$ verläßt.

1. Fall : Es gibt kein p', das Endweg von w ist.

Über die Kantenfolge $(e_i, \hat{e})$ kann p ohne weitere Beachtung von Verboten verlassen werden. Zu jedem dieser Kantenpaare definieren wir eine neue Kante $e^p_{i,\hat{e}}$ mit $\alpha(e^p_{i,\hat{e}}) := v^p_i$, $\omega(e^p_{i,\hat{e}}) := \omega(\hat{e})$ und $\Pi(e^p_{i,\hat{e}}) := \hat{e}$, die das Duplikat von p mit dem Ausgangsgraphen verbindet. Die Kante $\hat{e}$ kann mehrfach gesplittet werden.



2.6.8 Lösung des einführenden Beispiels

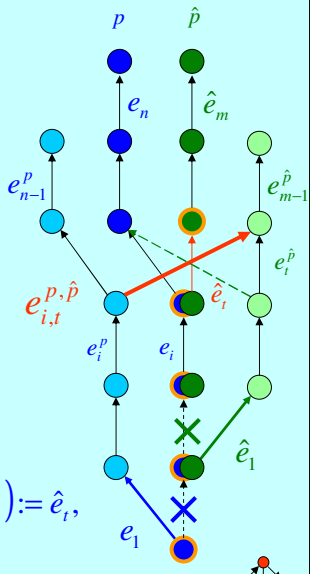


2.6.9 Die Verbindung mit den gesplitteten Wegen

Zu jeder Kante $\hat{e}$ mit $\alpha(\hat{e}) = \omega(e_i)$ betrachten wir wieder den Weg $w := (e_1,..,e_i,\hat{e})$.

2. Fall : Es gibt Wegeverbote p', die Endwege von w sind mit $p' \notin [p]$, und sei $\hat{p}$ der maximale dieser Endwege mit $\hat{e}_t = \hat{e}$.

Über die Kantenfolge $(e_i, \hat{e}_t)$ kann p verlassen werden, wenn u.a. $\hat{p}$ weiterhin beachtet wird. Zu jedem dieser Kantenpaare definieren wir eine neue Kante $e_{i,t}^{p,\hat{p}}$ mit $\alpha(e_{i,t}^{p,\hat{p}}) := v_i^p$, $\omega(e_{i,t}^{p,\hat{p}}) := v_t^{\hat{p}}$ und $\Pi(e_{i,t}^{p,\hat{p}}) := \hat{e}_t$, welche die gesplitteten Wege von p und $\hat{p}$ verbindet.



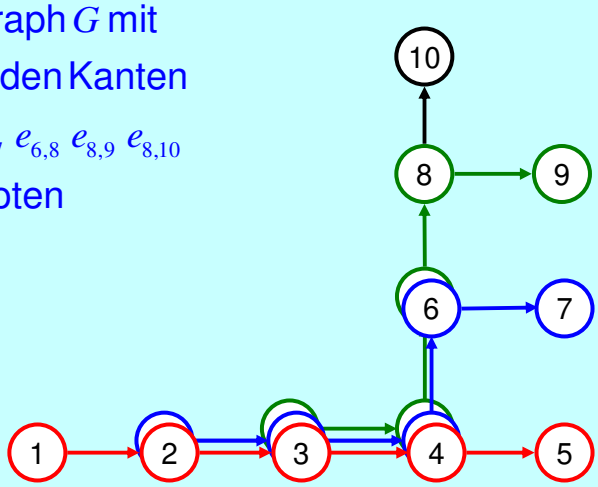
2.6.10 Beispiel für eine Grapherweiterung

Gegeben sei ein Graph G mit
den Knoten $v_1,..,v_{10}$, den Kanten
$e_{1,2}\ e_{2,3}\ e_{3,4}\ e_{4,5}\ e_{4,6}\ e_{6,7}\ e_{6,8}\ e_{8,9}\ e_{8,10}$
und den Wegeverboten

$p_1 := e_{1,2}\ e_{2,3}\ e_{3,4}\ e_{4,5}$,

$p_2 := e_{2,3}\ e_{3,4}\ e_{4,6}\ e_{6,7}$

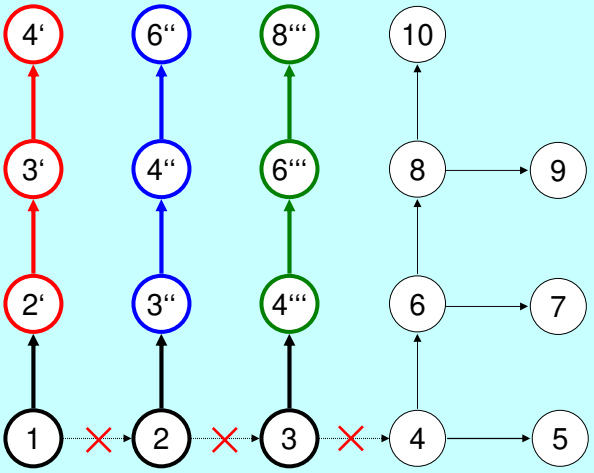
$p_3 := e_{3,4}\ e_{4,6}\ e_{6,8}\ e_{8,9}$.



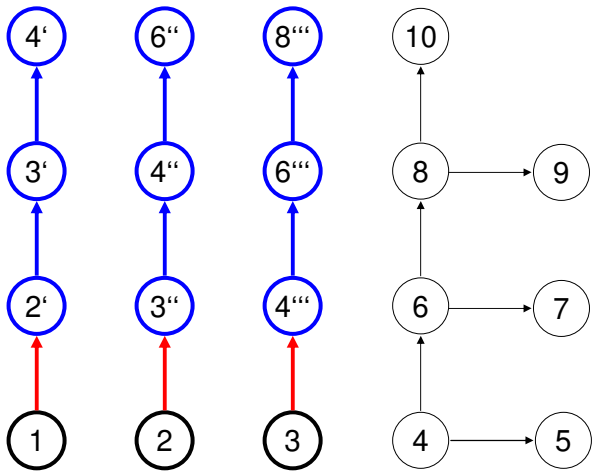
2.6.10 Beispiel nach der Wegeverdopplung

Das Wegeverbot
$p_1 := e_{1,2}\ e_{2,3}\ e_{3,4}\ e_{4,5}$,
erzeugt
die Kanten $e_{2',3'}\ e_{3',4'}$
und die Knoten
$v_{2'}\ v_{3'}\ v_{4'}$.
$e_{4,5}$ und v_5 werden
nicht gesplittet.
Der Kante $e_{1,2}$ wird
ein neuer Endknoten
zugewiesen :

$\omega(e_{1,2}) := v_{2'}$

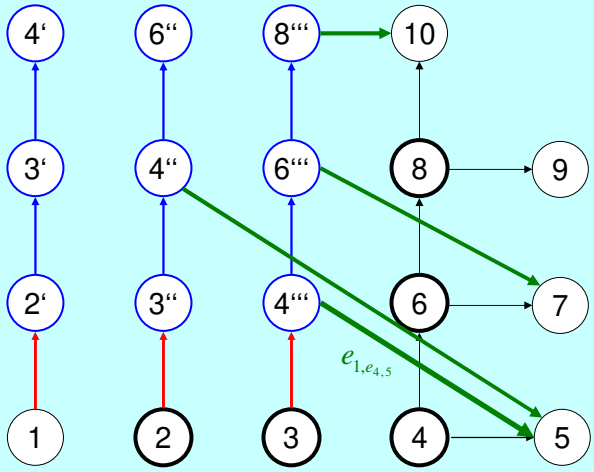


2.6.10 Beispiel nach der Wegeverdopplung



Beispiel nach der Verbindung mit dem Ausgangsgraphen

$p_3 := e_{3,4}\ e_{4,6}\ e_{6,8}\ e_{8,9}$
kann über die drei Kombinationen
$(e_{3,4}\ e_{4,5})(e_{4,6}\ e_{6,7})$
$(e_{6,8}\ e_{8,10})$
ohne Beachtung von Verboten verlassen werden.



$$(e_{3,4}\ e_{4,5}) = (e_1^{p_3}\ e_{4,5}) \rightarrow e_{1,e_{4,5}}$$

Beispiel nach der Verbindung der gesplitteten Wege

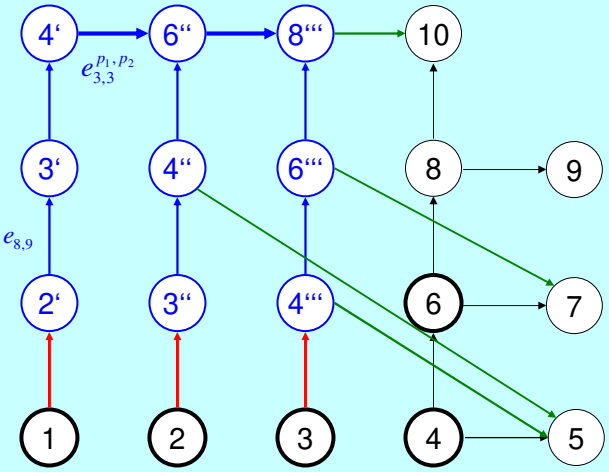
$p_1 := e_{1,2}\ e_{2,3}\ e_{3,4}\ e_{4,5}$ kann über die Kante $e_{4,6}$ verlassen werden, wenn p_2 und p_3 weiterhin beachtet werden.

$w =$ $e_{1,2}$ $e_{2,3}$ $e_{3,4}$ $e_{4,6}$

$p_2 =$ $e_{2,3}$ $e_{3,4}$ $e_{4,6}$ $e_{6,7}$

$p_3 =$ $e_{3,4}$ $e_{4,6}$ $e_{6,8}$ $e_{8,9}$

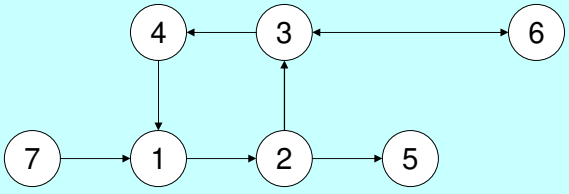
p_2 und p_3 sind Endwege von w. p_2 ist maximaler Endweg, deshalb wird die Erweiterung mit p_2 verbunden.



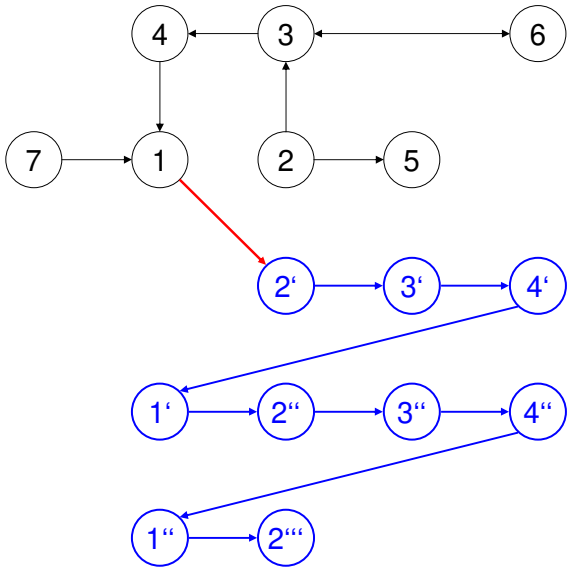
$$\left(e_{3,4}\ e_{4,6}\right) = \left(e_3^{p_1}\ e_3^{p_2}\right) \rightarrow e_{3,3}^{p_1,p_2}$$

2.6.11 Beispiel mit selbstüberlappendem Wegeverbot

Gegeben sei ein Graph G mit den Knoten $v_1, \ldots, v_7$ und den Kanten $e_{1,2}\ e_{2,3}\ e_{2,5}\ e_{3,4}\ e_{3,6}\ e_{4,1}\ e_{6,3}\ e_{7,1}$ und dem Wegeverbot $1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 5$. Das bedeutet, daß das zwei oder mehrmalige Umfahren Häuserblocks $1, 2, 3, 4$ und das anschließende Abbiegen nach 5 verboten ist.

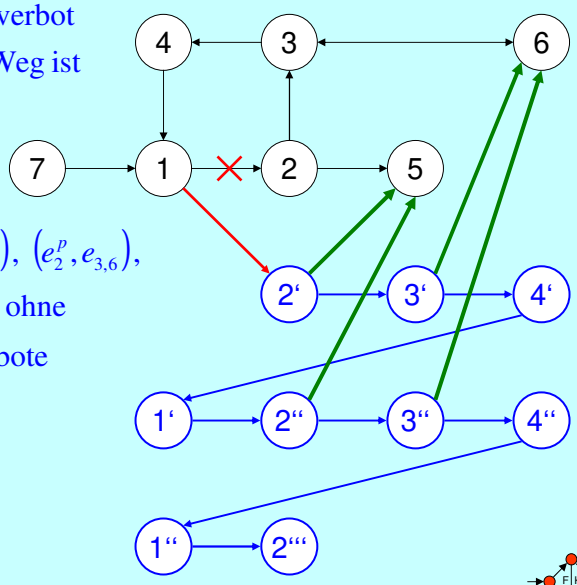


2.6.11 Das Häuserblockbeispiel mit verdoppeltem Weg



2.6.11 Das Häuserblockbeispiel mit verdoppeltem Weg

Zuerst wird wieder das Wegeverbot verdoppelt. Der verdoppelte Weg ist grün dargestellt.



Über die Kantenpaare $\left(e_1^p, e_{2,5}\right)$, $\left(e_2^p, e_{3,6}\right)$, $\left(e_5^p, e_{2,5}\right)$ und $\left(e_2^p, e_{3,6}\right)$ kann p ohne Beachtung weiterer Wegeverbote wieder verlassen werden.
Deshalb werden die Kanten $e_{2',5}$, $e_{3',6}$, $e_{2'',5}$ und $e_{3'',6}$, (blau) gezogen.

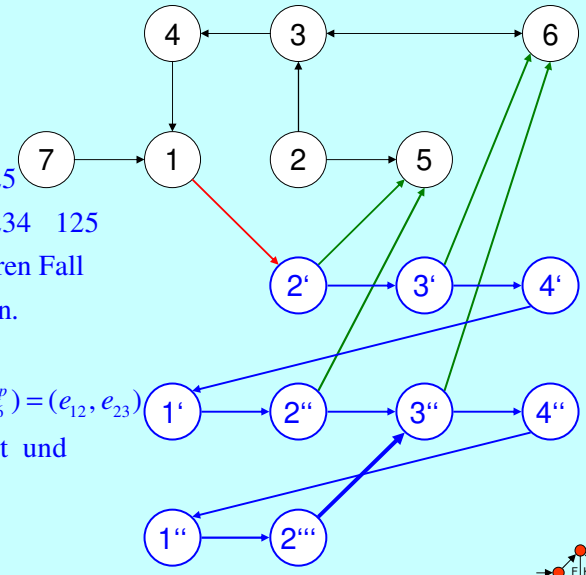
2.6.11 Wegegraph des Häuserblockbeispiels

Der Weg $w := 1234\,1234\,123$
besitzt das Wegeverbot p
zwei Mal als Endweg :

$w =$ 1234 1234 123
$p =$ 1234 1234 125
$p =$ 1234 1234 125

im oberen Fall mit 6 im unteren Fall
mit 2 gemeinsamen Endkanten.

Deshalb wird zum Paar $(e_9^p, e_6^p) = (e_{12}, e_{23})$
eine neue Kante $e_{9,6}^{p,p}$ definiert und
so 2''' mit 3'' verbunden.



2.7 Beweisüberblick

- Grundidee: Klassifikation der Kanten durch Ihre Anfangs- und Endknoten.
- Church-Rosser Eigenschaft (Konfluenz): Der Wegegraph ist von der Reihenfolge der behandelten Wegeverbote unabhängig.
- Homomorphie: Die kanonischen Projektionen sind surjektiv und inzidenzerhaltend.
- Wegeäquivalenz: Die möglichen Wege des Wegegraphen sind genau die erlaubten Wege im Ausgangsgraphen.
- Minimalität: Vom Wegegraph darf keine Kante oder Knoten weggelassen werden.

2.7.1 Zusammenfassung und Ausblick

- Entwicklung dynamischer und statischer Algorithmen zur Berechnung kürzester Wege in Graphen mit Abbiegeverboten.
- Erweiterung eines statischen Algorithmus auf Wegeverbote.

- Der entwickelte Algorithmus (2.6) stellt eine Verbesserung des Algorithmus von Azevedo zur Berechnung k-kürzester Wege (2.5) dar.
- Der vorgestellte Algorithmus kann mit den aktuellen Methoden zur Routenplanung kombiniert werden.
- Übertragung des Verfahrens auf andere Bereiche wie z.B. Logistik.

- Reduktion der Wegeverbote durch schrittweises Betrachten. Derzeit werden alle Wegeverbote auf einmal betrachtet.
- Erweiterung eines dynamischen Abbiegeverbots-Algorithmus auf Wegeverbote.