len noch eine andere rechnerisch einfache Methode besprechen, die auf inhomogene Gleichungen mit konstanten Koeffizienten anwendbar ist, deren rechte Seiten sich ganz rational aus den Funktionen x, $e^{\alpha x}$, $\cos\beta x$, $\sin\gamma x$ zusammensetzen:

Grundzüge der Operatorenmethode

Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$(3.23)\quad \mathcal{D}[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = r(x)$$

läßt sich formal in der Form

$$p\left(\frac{d}{dx}\right) y = r(x)$$

schreiben, wobei $p\left(\frac{d}{dx}\right)$ das dem Polynom

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

zugeordnete "Differentialpolynom" ist:

$$p\left(\frac{d}{dx}\right) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + \ldots + a_0 .$$

Wegen $\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^l f\right] = \left(\frac{d}{dx}\right)^{k+l} f$

gilt

$$p\left(\frac{d}{dx}\right)\left[q\left(\frac{d}{dx}\right)y\right] = \left[p\left(\frac{d}{dx}\right) q\left(\frac{d}{dx}\right)\right] y ,$$

d. h. der Hintereinanderausführung zweier Differentialpolynome entspricht die Multiplikation der zugehörigen Polynome. Insbesondere läßt sich nach dem Fundamentalsatz der Algebra jedes Differentialpolynom in Linearfaktoren zerlegen (wobei es nicht auf die Reihenfolge ankommt)

$$p\left(\frac{d}{dx}\right)y = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{d}{dx} - \lambda_n\right) y .$$

Jede Lösung y der inhomogenen Gleichung

$$\mathcal{D}[y] = p\left(\frac{d}{dx}\right) y = r(x)$$

Schreiben wir formal in der Form

$$y = \left[p\left(\frac{d}{dx}\right)\right]^{-1} r = \frac{1}{p\left(\frac{d}{dx}\right)} r$$

Der "inverse Differentialoperator" $\left[p\left(\frac{d}{dx}\right)\right]^{-1}$ ist somit nur bis auf eine additive Lösung der homogenen Gleichung bestimmt. Da wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung als bekannt ansehen können, genügt es, im folgenden irgendeine (partikuläre) Lösung $\left[p\left(\frac{d}{dx}\right)\right]^{-1} r$ der inhomogenen Gleichung zu bestimmen.

Das Grundprinzip der Operatorenmethode beruht darauf, daß man $\left[p\left(\frac{d}{dx}\right)\right]^{-1} r$ sehr einfach bestimmen kann, falls r die Form

$$r(x) = q(x) e^{\alpha x} \quad (q \text{ Polynom}, \alpha \text{ reell oder komplex})$$

besitzt.

Wir betrachten zunächst den Fall $\alpha = 0$:

$$r(x) = q(x) = \text{Polynom in } x$$

Der Zerlegung

$$p\left(\frac{d}{dx}\right) = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{d}{dx} - \lambda_n\right)$$

entspricht die Zerlegung

$$\left[p\left(\frac{d}{dx}\right)\right]^{-1} = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)^{-1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{d}{dx} - \lambda_n\right)^{-1}$$

wegen

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_i\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_i\right)^{-1} r = r.$$

Mit der ersten Zerlegung ist daher auch die zweite von der Reihenfolge der Linearfaktoren unabhängig. Ist insbesondere 0 k-fache Nullstelle von p, d.h. gilt

$$p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_k x^k \text{ mit } a_k \neq 0,$$

so gilt

$$\left[p\left(\frac{d}{dx}\right)\right]^{-1} q = \left(\frac{d}{dx}\right)^{-k} \frac{1}{a_k + a_{k+1}\frac{d}{dx} + \ldots + a_n\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k}} q$$

$$= \frac{1}{a_k}\left(\frac{d}{dx}\right)^{-k} \frac{1}{1 - r\left(\frac{d}{dx}\right)} q$$

mit
$$r(x) = -\frac{1}{a_s}\left[a_{s+1}x + \dots + a_n x^{n-s}\right].$$

~~Zur Bildung von~~ Der Operator $\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}$ bewirkt Ermittlung einer Stammfunktion. Zur Bildung von $\left(\frac{d}{dx}\right)^{-s} f$ ist also f s-mal zu integrieren. Zur Bestimmung von $\frac{1}{1-r\left(\frac{d}{dx}\right)} q$ entwickeln wir $\frac{1}{1-r\left(\frac{d}{dx}\right)} = \left[1 - r\left(\frac{d}{dx}\right)\right]^{-1}$ in eine geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-r\left(\frac{d}{dx}\right)} = 1 + r\left(\frac{d}{dx}\right) + \left[r\left(\frac{d}{dx}\right)\right]^2 + \dots$$

Da $q(x)$ ein Polynom ist, sind in der Reihe

$$\left[\sum_{j=0}^{\infty}\left[r\left(\frac{d}{dx}\right)\right]^j\right] q(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\left[r\left(\frac{d}{dx}\right)\right]^j q(x)$$

nur endlich viele Glieder von Null verschieden. Wegen

$$\left[1 - r\left(\frac{d}{dx}\right)\right]\sum_{j=0}^{\infty}\left[r\left(\frac{d}{dx}\right)\right]^j q(x)$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left[r\left(\frac{d}{dx}\right)\right]^j q(x) - \sum_{j=1}^{\infty}\left[r\left(\frac{d}{dx}\right)\right]^j q(x) = q(x)$$

ist
$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\left[r\left(\frac{d}{dx}\right)\right]^j q(x)$$

eine Lösung der Gleichung

$$\left[1 - r\left(\frac{d}{dx}\right)\right] y = q(x), \quad \text{d.h. es gilt}$$

$$\frac{1}{1-r\left(\frac{d}{dx}\right)} q(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\left[r\left(\frac{d}{dx}\right)\right]^j q(x).$$

<u>Zur Diskussion des Falls</u>

$$r(x) = q(x)\, e^{\alpha x} \qquad \text{mit } \alpha \neq 0$$

zeigen wir: Ist $z(x)$ eine Lösung der Gleichung

$$z'(x) + (\alpha - \lambda)\, z(x) = q(x),$$

so ist
$$y(x) = e^{\alpha x}\, z(x)$$

eine Lösung der Gleichung

$$y'(x) - \lambda y(x) = e^{\alpha x} q(x).$$

In der Tat es gilt $\left(\frac{d}{dx}-\lambda\right) y(x) = \left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)\left[e^{\alpha x} z(x)\right]$

$$= e^{\alpha x}\left[z'(x) + \alpha z(x) - \lambda z(x)\right] = e^{\alpha x} q(x).$$

aus
$$z(x) = \left(\frac{d}{dx}+\alpha-\lambda\right)^{-1} q(x)$$

folgt also
$$y(x) = e^{\alpha x} z(x) = \left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)^{-1}\left[e^{\alpha x} q(x)\right]$$

und somit
$$\left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)^{-1}\left[e^{\alpha x} q(x)\right] = e^{\alpha x}\left(\frac{d}{dx}+\alpha-\lambda\right)^{-1} q(x).$$

Durch n-fache Anwendung dieser Relation ergibt sich für jedes Polynom $p(x)$ (vom Grad n) die Beziehung

$$(3.24) \qquad \left[p\left(\frac{d}{dx}\right)\right]^{-1}\left[e^{\alpha x} q(x)\right] = e^{\alpha x}\left[p\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)\right]^{-1} q(x)$$

(3.24) ermöglicht es, Exponentialfaktoren vor den Operator zu ziehen.

Bsp

Wir diskutieren nun die Anwendung dieser Regeln an einigen Beispielen:

a) $y'' - 2y' + y = e^x(1+2x+3x^2)$

$$p\left(\frac{d}{dx}\right) = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 - 2\frac{d}{dx} + 1 = \left(\frac{d}{dx}-1\right)^2$$

Im folgenden schreiben wir für $\frac{d}{dx}$ etwas kürzer D:

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{(D-1)^2}\left[e^x(1+2x+3x^2)\right]$$

$$= e^x \frac{1}{D^2-1+1}(1+2x+3x^2)$$

$$= e^x D^{-2}(1+2x+3x^2) = e^x\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)$$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung $y(x) = \left(c_1 + c_2 x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)e^x$

b) $y''' - 3y' + 2y = x^2 e^x$

Homogene Dgl $y = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$

$\lambda_1 = 1$ ist Lösung $\Rightarrow (\lambda^3 - 3\lambda + 2) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) =$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 = (\lambda-1)(\lambda+2)$

$\rightsquigarrow$ Allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{x} + c_3 e^{-}$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl.

$$y_p(x) = \frac{1}{p(D)}(x^2 e^x) = \frac{1}{(D-1)^2(D+2)}(x^2 e^x)$$

$$= e^x \frac{1}{D^2(D+3)} x^2 = \frac{1}{3} e^x D^{-2} \frac{1}{1+D/3} x^2$$

$$= \frac{1}{3} e^x D^{-2}\left[1 - \frac{D}{3} + \frac{D^2}{9}\right] x^2$$

weitere Glieder sind hier unnötig

$$= \frac{1}{3} e^x \left[D^{-2} - \frac{D^{-1}}{3} + \frac{1}{9}\right] x^2$$

$$= \frac{1}{3} e^x \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{9}\right)$$

$\rightsquigarrow$ Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{36}x^4\right)e^x + c_3 e^{-2x}$$

Am Beispiel ist zu erkennen: Die Methode ist besonders vorteilhaft, wenn "Resonanz" vorliegt, d.h. die auf der rechten Seite auftretende Funktion $e^{\alpha x}$ Lösung der homogenen Dgl. ist. Dann ist es auch vorteilhaft, die Linearfaktorzerlegung des charakteristischen Polynoms zu benutzen.

c) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cos x = \mathrm{Re}\left[e^{(-1+i)x}\right]$

$$y_p(x) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{(D^2+2D+2}\left[e^{(-1+i)x}\right]\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{e^{(-1+i)x} \frac{1}{(D-1+i)^2 + 2(D-1+i) + 2} 1\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{e^{(-1+i)x} \frac{1}{D^2 + \cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{2D} + 2iD - \cancel{2i} + \cancel{2D} - \cancel{2} + \cancel{2i} + \cancel{2}} 1\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{e^{(-1+i)x} D^{-1} \frac{1}{2i + D} 1\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{e^{(-1+i)x}}{2i} x\right\}$$

$$= \frac{x}{2} e^{-x} \sin x$$

Lösung der homogenen Dgl.:

$$\lambda^2+2\lambda+\quad=(\lambda+1)^2+1=0 \quad \curvearrowright \lambda_{1,2}=-1\pm i$$

$\curvearrowright$ Allgemeine Lösung:

$$y=e^{-x}\left(c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{x}{2}\sin x\right)$$

[Partikuläre Lösung mit Linearfaktorzerlegung

$$y_p(x)=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{(D+1-i)(D+1+i)}\left[e^{(-1+i)x}\right]\right\}$$

$$=\mathrm{Re}\left\{e^{(-1+i)x}\frac{1}{D(D+2i)}1\right\}=\mathrm{Re}\left\{e^{(-1+i)x}D^{-1}\cdot\frac{1}{2i}\right\}$$

d) $y''+6y'+9y=x^3$

homogene Dgl. $\lambda^2+6\lambda+9=0;(\lambda+3)^2=0$

$\curvearrowright$ $y(x)=(c_1+c_2x)e^{-3x}$ ist allgemeine Lösung der ~~ho~~ homogenen Dgl

Partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl.:

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2+6D+9}x^3=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-(-6D-D^2)\frac{1}{9}}x^3$$

$$=\frac{1}{9}\left[1-\frac{1}{9}(6D+D^2)+\frac{1}{81}(6D+D^2)^2-(6D+D^2)^3\frac{1}{9\cdot 81}\right]x^3$$

$$=\frac{1}{9}\left[1-\frac{2}{3}D-\frac{1}{9}D^2+\frac{4}{9}D^2+\frac{4}{27}D^3-\frac{6\cdot 36}{9\cdot 81}D^3\right]x^3$$

$$=\frac{1}{9}\left[1-\frac{2}{3}D+\frac{1}{3}D^2+\frac{4}{27}D^3-\frac{8}{27}D^3\right]x^3$$

$$=\frac{1}{9}\left(x^3-2x^2+2x-\frac{4}{27}\cdot 3\cdot 2\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(x^3-2x^2+2x-\frac{8}{9}\right)$$

$\curvearrowright$ $y(x)=(c_1+c_2x)e^{-3x}+\frac{1}{9}\left(x^3-2x^2+2x-\frac{8}{9}\right)$

ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. 10.2.81

11.2.81

[Besteht die rechte Seite aus einer Linearkombination verschiedener Exponentialfunktionen, so nützt man