Aufgabe 25: (Konvergenzradien von Potenzreihen) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n} \text{ und b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

c) Für welche reellen Zahlen x konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+2)^n}{5^{n+1} n} \; ?$$

Aufgabe 26: (Gliedweise Differentiation und Integration von Potenzreihen) Betrachten Sie die Potenzreihe

$$1/(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

a) Bestimmen Sie durch gliedweise Integration eine Potenzreihe für das Integral

$$\int_0^t \frac{1}{1+x}\, dx$$

für $|t| < 1$.

b) Bestimmen Sie durch gliedweise Differentiation eine Potenzreihe für die Ableitung

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{1+x}$$

für $|x| < 1$, und c) auch für die zweite Ableitung.

Aufgabe 27: (Werte von Potenzreihen)a) Bestimmen Sie für $|x+1| < 1$ die Summe der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x+1)^n.$$

www.zusatzkurs.de.vu

b) Berechnen Sie für $|x| < 1$ die Summe der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+1)+1}{n} x^n.$$

Aufgabe 28: (Werte von Potenzreihen)

a) Berechnen Sie für $|x| < 1$ die Summe der Reihe

$$1 - x^3 + x^6 - x^9 + ...$$

b) Berechnen Sie für $|x| < 1$ die Summe der Reihe

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2*3} + \frac{x^4}{3*4} - \frac{x^5}{4*5} + ...$$

Aufgabe 29: (Konvergenzradius)

Welchen Konvergenzradius haben folgende Potenzreihen:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} x^n, \quad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + n^2 2^n) x^n.$$

Aufgabe 30: (Potenzreihen; Hausübung, Abgabe 18.5.-20.5.2005 in den Übungsstunden)

Welchen Konvergenzradius haben folgende Potenzreihen

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k} \right)^{k^2} x^k \qquad \text{b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{b^{(k^2)}} x^k, \quad b > 1$$

c) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\frac{2}{3!} x^3 - \frac{4}{5!} x^5 + \frac{6}{7!} x^7 - ...$$

indem sie gliedweise differenzieren, den Wert der Reihe für die Ableitung bestimmen und dann integrieren.

Konvergenzradius (Vorkurs 2005 : Endziffer 0)

Aufgabe 4.1.1: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe:

$$\sum_{i=7}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{i \cdot x}{9}\right)^i \quad ?$$

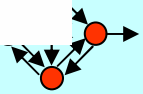
Gesucht ist der maximale Bereich in dem die Reihe konvergiert.

Aufgabe 4.1.6: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{i=5}^{\infty} \frac{5}{i^6} \cdot \left(\frac{8}{x}\right)^i \quad ?$$

Aufgabe 4.1.7: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe:

$$\sum_{i=6}^{\infty} \frac{(2 \cdot x - 6)^i}{i^2} \quad ?$$



Konvergenzradius (Vorkurs 2005 : Endziffer 0)

Aufgabe 4.1.8: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe:

$$\sum_{i=9}^{\infty} \frac{(5 \cdot x)^{\frac{i}{6}}}{9} \quad ?$$

Gesucht ist der maximale Bereich in dem die Reihe konvergiert.

Aufgabe 4.1.10: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe:

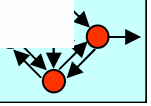
$$\sum_{i=8}^{\infty} (3 \cdot i + 8) \cdot (2 \cdot x + 2)^i \quad ?$$

Gesucht ist der maximale Bereich in dem die Reihe konvergiert.

Aufgabe 4.1.11: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe:

$$\sum_{i=3}^{\infty} \frac{x^i}{3 \cdot i + 4} \quad ?$$

Gesucht ist der maximale Bereich in dem die Reihe konvergiert.



7.3.3 Satz: Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar und die Ableitung sei dort stetig, dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

7.3.4 Satz: Strenge Monotonie

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f streng monoton wachsend. f ist streng monoton fallend, wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Beweis (für streng monoton wachsend): f streng monoton wachsend $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Wir beweisen den Satz indirekt:

Annahme: $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ aber es existieren $x_1 < x_2 \in (a, b)$ mit $f(x_1) > f(x_2)$, dann ist $m := \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ negativ und nach dem Mittelwertsatz 7.3.3 gibt es eine Zwischenstelle $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = m < 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

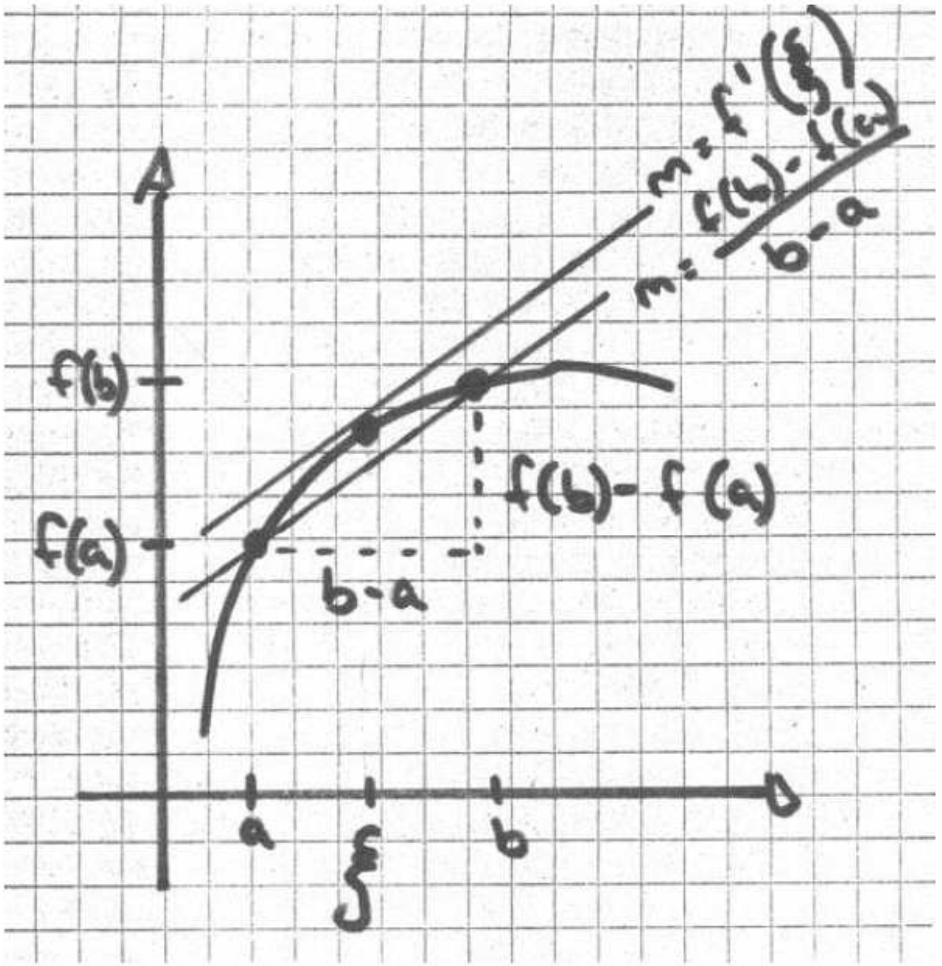


Abb. 72 *Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung*

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Aufgabe 3:

Sei $f : (0,1) \to (0,1)$ differenzierbar mit $\mid f'(x) \mid \leq K < 1 \ \forall x \in (0,1)$. Sei $x_0 \in (0,1)$ beliebig und für alle $n \geq 0 : x_{n+1} = f(x_n)$. Zeigen Sie, daß die Folge (x_n) konvergiert.

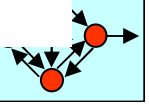
Hinweis: Betrachten Sie $x_{n+1} - x_n$, benutzen Sie den Mittelwertsatz.

7.4.7 Satz: Restglied der Taylorreihe

Sei $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ $(n+1)$ mal differenzierbar, dann gilt für alle $x \in (-a, a)$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0) \cdot x}{1!} + \frac{f''(0) \cdot x^2}{2!} + .. + \frac{f^n(0) \cdot x^n}{n!} + R_{n+1}(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{f^i(0) \cdot x^i}{i!} \right) + R_{n+1}(x)$$

$$\text{mit} \qquad R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$



7.5.1 Beispiel: Ableiten mit Taylorreihen (cos x)' = - sin x

Wir zeigen $(\cos x)' = -\sin x$ mittels Taylorreihenentwicklung:

$$
\begin{aligned}
(\cos x)' &= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}\right)' && \text{Taylorreihenentwicklung}\\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}\right)' && \text{Summenregel (und mehr)}\\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n \cdot 2n \cdot x^{2n-1}}{(2n)!} && \text{Potenzregel}\\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!} && \text{erster Summand ist 0 und 2n gekürzt}\\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{m+1=1}^{m+1=k} \frac{(-1)^{m+1} \cdot x^{2(m+1)-1}}{(2(m+1)-1)!} && \text{Indexverschiebung } n = m+1\\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{m=k-1} (-1) \cdot \frac{(-1)^m \cdot x^{2m+1}}{(2m+1)!} && \text{Klammern aufgelöst}\\
&= -\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m \cdot x^{2m+1}}{(2m+1)!} && k \to \infty\\
&= -\sin x
\end{aligned}
$$

7.5.4 Beispiel: Lösung von Integralen mittels Taylorreihen

Wir können keine Stammfunktion für e^{x^2} angeben!? Doch! Wir können eine Taylorreihe angeben, die eine Stammfunktion darstellt.

$$
\begin{aligned}
\int e^{x^2} dx &= \int \lim_{M\to\infty} \sum_{i=0}^{M} \frac{(x^2)^i}{i!} dx && \text{Taylorreihe mit Substitution } x \to x^2\\
&= \lim_{M\to\infty} \int \sum_{i=0}^{M} \frac{x^{2\cdot i}}{i!} dx && \text{Integration und lim vertauscht (siehe Studium)}\\
&= \lim_{M\to\infty} \sum_{i=0}^{M} \int \frac{x^{2\cdot i}}{i!} dx && \text{Integration und } \textstyle\sum \text{ vertauscht mit Satz 8.2.3}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{i! \cdot (2i+1)} && \text{integriert}
\end{aligned}
$$

Damit kann eine Stammfunktion zumindest punktweise berechnet werden. Eine geschlossene Darstellung einer Stammfunktion bleibt aber unbekannt.