Die Regeln von de l‘Hospital

Aufgabe 6 (Anwendungen der Regeln von de l’Hospital)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen mit den Regeln von de l’Hospital

a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-1}{\sin 4x} = -\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-2x+5}{2x^2+3x+1} = 2$

c) $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = -\frac{3}{5}$

d) $\lim_{x\downarrow 0}(x^2 \ln x) = 0$

e) $\lim_{x\downarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x} = \infty$

f) $\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt[3]{x^3 - x^2}) = \frac{1}{3}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x-\arctan x}{x^2 \ln(1+x)} = \frac{1}{6}$

h) $\lim_{x\uparrow 0}(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e$

i) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^2$

j) $\lim_{x\downarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$

k) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{e}$

l) $\lim_{x\downarrow 0} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x = 1$

Taylorentwicklungen

Aufgabe 1) *Taylorentwicklungen*

Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Taylorreihe:

a) $f(x) = 1 - x + 4x^3$

b) $f(x) = \cos 3x$

c) $f(x) = e^{x^3}$

d) $f(x) = \ln(1 + x)$

e) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

f) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

g) $f(x) = x \cdot \cos x$

h) $f(x) = (1 - x) \cdot e^x$

i) $f(x) = x^2 \cdot \ln(1 - x)$

j) $f(x) = \sqrt{1 - x}$

Anwendungen von Taylorreihen

Aufgabe 2) *Beweise von Formeln*

Zeigen Sie mittels Taylorreihenentwicklung, daß die folgenden Beziehungen gelten

a) $(\sin(2x))' = 2 \cdot \cos(2x)$
b) $\int \sin(2x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$
c) $\ln(1-x)^2 = 2 \cdot \ln(1-x)$

Aufgabe 3) *Ungleichung*

Beweisen Sie mit Hilfe der Taylorschen Formel die Ungleichung

$$x + x^3/3 \leq \tan x \text{ für alle } x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Aufgabe 4) *Grenzwerte*

Berechnen Sie mittels einer Taylorreihenentwicklung folgende Grenzwerte

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$