Extremwerte mehrdimensionaler Funktionen

1 Vorgelegt sei die Funktion

$$f(x,y,z) = 2x^2 + 2x \cdot y + y^2 + 2x + 1 + (y-1)(z-2)^2.$$

Man zeige:

a Der Punkt (x,y,z)=(-1,1,2) ist die einzige kritische Stelle der Funktion.

b Man kläre, ob an (-1,1,2) ein relatives (lokale) Extremum vorliegt.

2 Vorgelegt sei die Funktion

$$f(x,y,z) = x^2 + 2x \cdot y + 2y^2 + z^2.$$

Man zeige:

a Der Punkt (x,y,z)=(0,0,0) ist die einzige kritische Stelle der Funktion.

b Man kläre, ob an (0,0,0) ein relatives (lokale) Extremum vorliegt.

Extremwerte mehrdimensionaler Funktionen

Ist f(x,y,z) an einer Stelle (x_0,y_0,z_0) differenzierbar und erfüllt dort die notwendige Bedingung für einen Extremwert, so verwenden wir die Hesse Matrix Auskunft zur weiteren Information. Die Hesse-Matrix sieht so aus.

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0,z_0) & f_{xy}(x_0,y_0,z_0) & f_{xz}(x_0,y_0,z_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0,z_0) & f_{yy}(x_0,y_0,z_0) & f_{yz}(x_0,y_0,z_0) \\ f_{zx}(x_0,y_0,z_0) & f_{zy}(x_0,y_0,z_0) & f_{zz}(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}.$$

Die Frage, ob an der Stelle (x_0,y_0,z_0) ein Extremwert oder ein Sattelpunkt vorliegt, kann beantwortet werden, wenn $\det H \neq 0$ (H ist regulär) ist. Wir bestimmen dann die Eigenwerte $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. Besitzen

1 alle drei **Eigenwerte** ein **gemeinsames Vorzeichen**, so liegt ein **Extremwert** vor,

   a Ist das Vorzeichen positiv, so liegt ein **Minimum** vor,

   b Ist das Vorzeichen negativ, so liegt ein **Maximum** vor,

2 die drei **Eigenwerte verschiedene Vorzeichen**, so liegt ein **Sattelpunkt** vor.

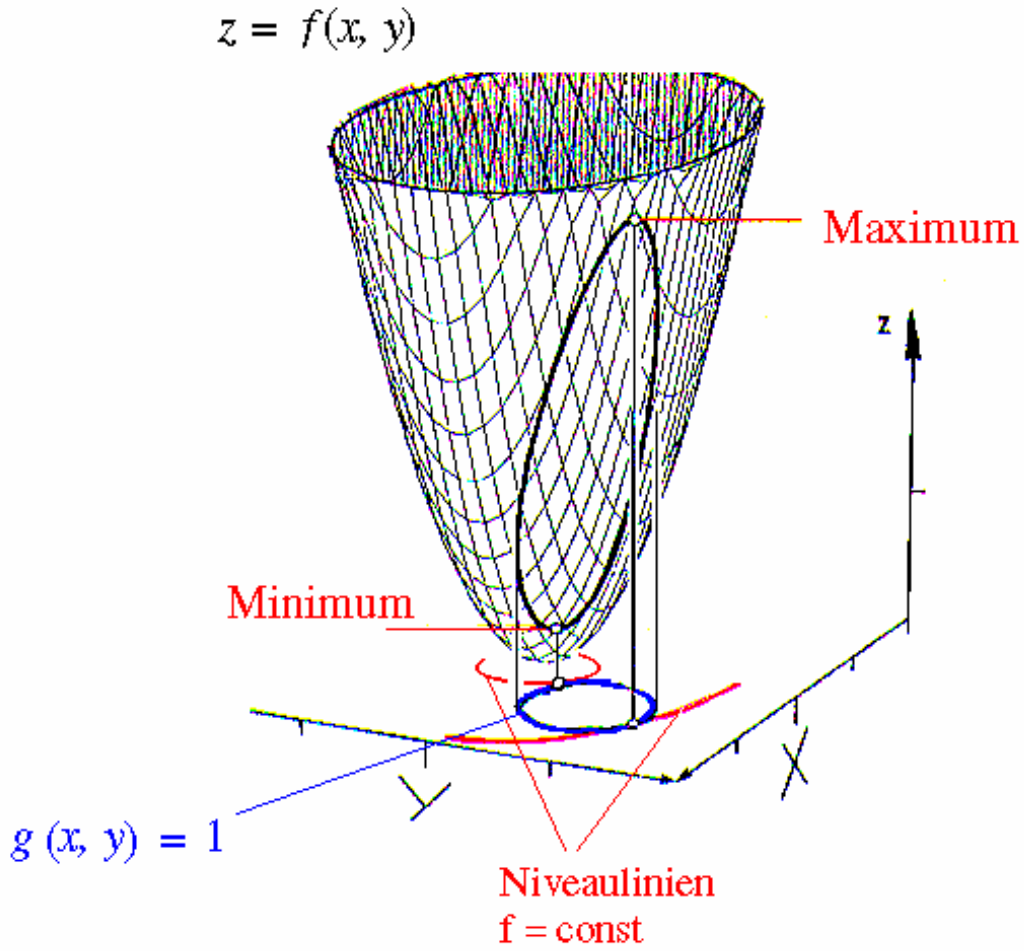
Wenn $\det H = 0$, also wenn H nicht regulär ist,ergibt dieses Verfahren kein Ergebnis.

Ein Extremwertproblem mit Nebenbedingung

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = \text{Extr!}$$

mit der Nebenbedingung

$$g(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$



Aufgabe 1:

Bestimmen Sie das globale Maximum und das globale Minimum der Funktion $f(x,y) = 2x - 4y$ auf der Menge $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 8y^2 \leq 1\}$, falls diese existieren.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = (x+y)^2 + (x-y)^2$$

und das Gebiet

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}.$$

Bestimmen Sie das globale Maximum und Minimum von f auf D.

Aufgabe 3:

Welcher Punkt auf der Parabel $y^2 = 6x$ hat minimalen Abstand zum Punkt (3,12)?

Aufgabe 1:

Es sei f diejenige Funktion, die einem Punkt der Ellipse $\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 = 5\}$ seinen Abstand zum Nullpunkt zuordnet. Hat f auf der Ellipse ein Maximum bzw. ein Minimum? Welche Gleichungen muss ein Punkt, in dem f ein Maximum bzw. Minimum annimmt, notwendigerweise erfüllen?

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy + y + z^3$ unter der Nebenbedingung $x^2 = y^2$.

b) Argumentieren Sie anschaulich, dass f auf der Nebenbedingung $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^2\}$ kein lokales Maximum oder Minimum annimmt.

Extremwerte mit Nebenbedingungen (35 min)

Aufgabe 1:

Ein Unternehmen produziert ein Gut unter Einsatz von zwei Produktionsfaktoren x_1 und x_2.

Die Produktionsfunktion lautet:

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$$

Bestimmen Sie das Minimum der Gesamtkostenfunktion $K(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2$

unter der Nebenbedingung, dass $\sqrt{x_1 x_2} = 10$ Einheiten hergestellt werden.

Aufgabe 2: Man bestimme die Extremwerte der Funktion

$$u : \mathbf{R}^{++} \times \mathbf{R}^{++} \longrightarrow \mathbf{R} \qquad \text{mit} \qquad u(x, y) = x^{\frac{3}{5}} y^{\frac{1}{4}}$$

unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 8x + 5y - 680 = 0$. Von welcher Art ist der Extremwert?