

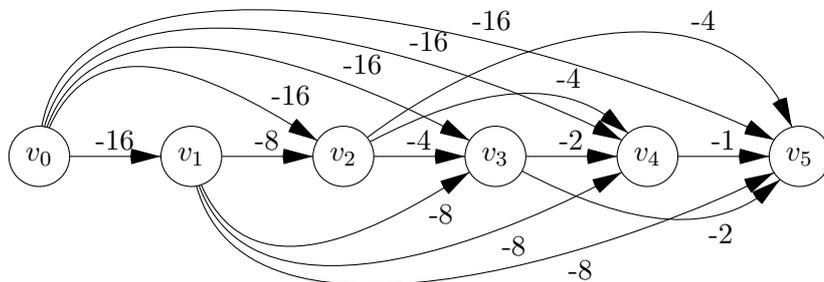
Übungsblatt 01

Ausgabe: 28.04.

Besprechung am Ende der nächsten Vorlesung

Ablauf der Übungen: Die Übungen sind weitgehend in die Vorlesung integriert. Es werden nicht alle Aufgaben besprochen und zum Teil nur Lösungshinweise gegeben. Sie haben jedoch die Möglichkeit, Abgaben zu machen, die dann auch korrigiert werden. Bei Interesse kann die Übung auch in den Vorlesungsblock Freitag 8h00-9h30 (Raum 0.124) ausgedehnt werden.

1. (leicht) **Teilwege kürzester Wege sind kürzeste Wege:** In diesem Lemma wurde nicht vorausgesetzt, dass der Graph keine negativen Zyklen haben darf. Bleibt das Lemma auch in Graphen mit negativen Zyklen gültig? Begründen Sie Ihre Antwort.
2. (leicht) **Zyklen im Teilgraphen der kürzesten Wege:** Geben Sie Beispiele für Graphen ohne negative Zyklen an, für die der Graph G' , der die Kanten aller kürzesten Wege in G mit Startknoten v_0 enthält, Zyklen hat. Geben Sie verschiedene Kürzeste-Wege-Bäume für G mit Startknoten v_0 an. Welcher dieser Bäume wird vom Algorithmus aus Satz I.1.7 (Existenz des Kürzeste-Wege-Baums) bestimmt?
3. (mittel) **Alle kürzesten Wege:** Ein Kürzeste-Wege-Baum beschreibt für jeden Zielknoten z jeweils einen kürzesten Weg vom Startknoten v_0 zu z . Überlegen Sie sich, wie man aus dem G' aus Aufgabe 2 alle kürzesten Wege von v_0 nach z bestimmen kann. Achten Sie insbesondere auf den Fall, dass G' Zyklen hat.
4. (mittel-schwer) **Worst-Case-Laufzeit des generischen Kürzeste-Wege-Algorithmus:** Betrachten Sie diesen Graphen:



Hat der Graph die Knoten $V = \{v_0, \dots, v_n\}$, so sei $E = \{(v_i, v_j) \mid 0 \leq i < j \leq n\}$ und $\gamma(v_i, v_j) = -2^{n-1-i}$. Bestimmen Sie die Worst-Case-Laufzeit in den so konstruierten Graphen (abhängig von n). Gibt es Graphen, bei denen die Worst-Case-Laufzeit des generischen Algorithmus noch schlechter ist?

5. (mittel-schwer) **Kürzeste-Wege-Baum-Berechnung:** Merkt man sich im generischen Kürzeste-Wege-Algorithmus zu dem Knoten v den *Vorgänger* u (d. h., die Kante (u, v) hat die Verringerung von $D(v)$ bewirkt), so ergeben die Knoten v mit den (zuletzt) gemerkten Vorgängern $\text{pred}(v)$ die Kanten $(\text{pred}(v), v)$ eines Kürzeste-Wege-Baums.

Beweisen Sie diese Behauptung.