Wegeprobleme in Graphen **Übungsblatt 05**

Ausgabe: 26.05. Besprechung am 02.06., 8h45–9h30

Ablauf der Übungen: Die Übungen werden freitags, 8h45–9h30 (Raum 0.124) und zum Teil in der Vorlesung besprochen oder es werden Lösungshinweise gegeben. **Sie haben die Möglichkeit, Abgaben zu machen, die dann korrigiert werden.**

Eine allgemeine Empfehlung: Programmieren Sie die hier vorgestellten Algorithmen aus oder rechnen Sie zumindest unbedingt einige Beispiele durch, um die Eigenheiten der einzelnen Verfahren besser kennenzulernen.

---

1. (leicht) **A^*-Algorithmus:** Sind den Knoten Koordinaten (in der Ebene) zugeordnet, so kann der euklidische Abstand als Schätzfunktion verwendet werden. Zeigen Sie: Die so gewählte Schätzfunktion ist sowohl zulässig als auch konsistent.

2. (mittel) **A^*-Algorithmus:** Das Schiebepuzzle besteht aus einem 4×4 Felder großen Quadrat. Die Felder sind mit 1 bis 15 durchnummeriert (ein Feld bleibt frei). Zu Beginn sind die Zahlen zufällig auf die 16 möglichen Plätze verteilt. Auf das freie Feld kann jeweils eine der direkt benachbarten Zahlen verschoben werden und so kann man von einem Zustand des Spiels in den nächsten übergehen. Ziel ist es, den Zustand zu erreichen, bei dem die Zahlen 1 bis 15 von links oben nach rechts unten (zeilenweise) sortiert sind und das Feld rechts unten frei ist.

   Aufgabe: Finden Sie eine zulässige und konsistente Schätzfunktion, um im Zustandsgraphen dieses Spiels mit Hilfe des A^*-Algorithmus eine Folge von möglichst wenigen Zügen zum Zielzustand zu ermitteln. (Jeder Zustand des Spielfelds ist ein Knoten, eine Kante wird gezogen, wenn der Übergang zwischen den Zuständen möglich ist.)

3. (leicht–mittel) **A^*-Algorithmus:** Entwerfen Sie einen Graphen mit ≥ 7 Knoten, der negative Kanten enthalten darf (keine negativen Zyklen), und eine zugehörige konsistente Schätzfunktion (aufgrund der negativen Kantengewichte wird dies keine Luftlinienentfernung sein können). Führen Sie den A^*-Algorithmus auf diesem Graphen durch. Ist das Ergebnis korrekt? (Hinweis: Bei den Standardgegenbeispielen für den Dijkstra-Algorithmus ist die konstante Schätzfunktion 0 nicht konsistent! Diese können also nicht als Gegenbeispiele für den A^*-Algorithmus mit negativen Kanten genommen werden.)

   Anmerkung: Wir werden den Zusammenhang zwischen Dijkstra und A^*-Algorithmus im Rahmen der Potentialfunktionen später noch genauer untersuchen.

4. (leicht–mittel) **A^*-Algorithmus:** Zeigen Sie: In Graphen mit konsistenter Schätzfunktion werden die Knoten in aufsteigender Reihenfolge der geschätzten Gesamtentfernung aufgenommen (d.h. in aufsteigender Reihenfolge der Werte $\mathrm{d}(\cdot)+\mathrm{ed}_z(\cdot)$). Brauchen Sie in Ihrem Beweis als Voraussetzung, dass die Kantengewichte alle positiv sind?

5. (leicht–schwer) **Zwei Linearzeit-Algorithmen:** In ungewichteten Graphen (bzw. Graphen, in denen alle Kantengewichte 1 sind) lassen sich durch einfache Breitensuche in $O(n+m)$ die kürzesten Wege vom Startknoten zu allen anderen Knoten berechnen.

   (leicht–mittel) Entwerfen Sie einen $O(n+m)$-Algorithmus, wenn für alle $e \in E$ die Kantengewichte ganzzahlig sind und $1 \leq \gamma(e) \leq 3$ gilt.

   (schwer) Entwerfen Sie einen $O(n+m)$-Algorithmus, wenn für alle $e \in E$ für die Kantengewichte $1 \leq \gamma(e) \leq 3$ gilt (nicht notwendigerweise ganzzahlig).
