Dr. S. Lewandowski Universität Stuttgart, Fak. 5, FMI-FK, SS 2006

Wegeprobleme in Graphen Übungsblatt 08

Ausgabe: 14.07. Besprechung am 21.07., 8h45–9h30

Ablauf der Übungen: Die Übungen werden freitags von 8h45–9h30 (Raum 0.124) besprochen oder es werden Lösungshinweise gegeben. **Sie haben die Möglichkeit, Abgaben zu machen, die dann korrigiert werden.**

Eine allgemeine Empfehlung: Programmieren Sie die hier vorgestellten Algorithmen aus oder rechnen Sie zumindest unbedingt einige Beispiele durch, um die Eigenheiten der einzelnen Verfahren besser kennenzulernen.

Potentialfunktionen finden in der Literatur hauptsächlich in drei Formen bei der Kürzeste-Wege-Suche Verwendung: Beim APSP-Problem in Graphen mit negativen Kantengewichten (Reduzierung der n SSSP-Probleme auf ein SSSP-Problem und n SSSP-Probleme mit Kantengewichten ≥ 0), bei Skalierungsalgorithmen (siehe Kapitel 6 meiner Dissertation, werden wir hier nicht weiter betrachten) und zur Korrektur von Kürzeste-Wege-Bäumen, wenn sich nur wenige Kantengewichte ändern. Wir werden uns auf diesem Übungsblatt mit dem letzteren Aspekt der Potentialfunktionen auseinandersetzen. Hierbei werden wir einige Ideen und Algorithmen aus der gesamten Vorlesung wiederverwenden.

1. (leicht–mittel) **Dijkstra:** Erlaubt man beliebige Kantengewichte bei Dijkstras Algorithmus, so muss man Knoten ggf. erneut in den Rand aufnehmen und die Laufzeit kann exponentiell werden (wir haben dies schon untersucht). Zeigen Sie, dass für den Fall, dass nur vom Startknoten negative Kanten ausgehen, Dijkstras Algorithmus genau dann Knoten mehrfach in den Rand aufnimmt, wenn der Graph negative Zyklen hat. Wie (und mit welcher Laufzeit) stellt man fest, ob der Graph negative Zyklen hat? Hinweis: Mit Potentialfunktionen kann man hierbei sinnvoll argumentieren, es geht hier aber auch ohne.

2. (mittel–schwer) **Nachträgliche Veränderung von Kantengewichten:** Nachdem wir in einem Graphen mit beliebigen Kantengewichten einen Kürzeste-Wege-Baum bestimmt haben, stellen wir fest, dass wir einige Kantengewichte zu niedrig gewählt haben. Entwerfen Sie einen Algorithmus zur Korrektur des Kürzeste-Wege-Baums. Beachten Sie dabei, dass im Graphen negative Kanten vorkommen können! Welchen Aufwand in O-Notation hat Ihr Algorithmus? Untersuchen Sie die folgenden Fälle:

   (a) Beliebig viele Kanten werden jeweils um einen beliebigen Betrag verlängert.

   (b) Manche Kanten werden verkürzt und manche werden verlängert.

   (c) Der Graph habe ganzzahlige Kantengewichte und die Summe der Verlängerungen betrage k (keine Kante wird verkürzt).

   (d) Alle Kanten werden um den gleichen Betrag k verlängert (Hinweis: hierfür gibt es einen schnelleren Algorithmus als für Aufgabenteil (c)).

3. (mittel–schwer) **Aufteilung von Kantengewichten:** Gegeben sei ein Graph und ein Startknoten. Seien $\gamma_1(\cdot)$ und $\gamma_2(\cdot)$ zwei Gewichtsfunktionen und $\mathrm{d}_1(\cdot)$ und $\mathrm{d}_2(\cdot)$ jeweils die kürzesten Entfernungen zum Startknoten bzgl. $\gamma_1(\cdot)$ bzw. $\gamma_2(\cdot)$. Zeigen Sie zunächst: Im Allgemeinen gilt für die kürzesten Entfernungen im Graphen mit $\gamma(\cdot) = \gamma_1(\cdot) + \gamma_2(\cdot)$ nicht, dass $\mathrm{d}(\cdot) = \mathrm{d}_1(\cdot) + \mathrm{d}_2(\cdot)$.

   Überlegen Sie sich, wie sich $\mathrm{d}(\cdot)$ in Abhängigkeit von $\mathrm{d}_1(\cdot)$ und $\mathrm{d}_2(\cdot)$ darstellen lässt und überlegen Sie eine Beispielanwendung, bei der mit diesem Ansatz ein besserer Worst-Case erreicht werden kann, als wenn man direkt einen der Standard-Algorithmen einsetzt.
