Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 3

MV 04	Blatt 03	Kapitel 3.2	Grenzwerte
Brueche	Folgen	Nummer: 15 0 2004030001	Kl: 14G
Grad: 30 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 3.1.1: Bestimmen Sie den Wert, gegen den die Folge für $n \to \infty$ strebt:

$$\frac{12 \cdot n^2 + 16 \cdot n + 7}{8 - 10 \cdot n + 6 \cdot n^2}$$

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl im Bruch $(n \in 1..6)$ $x_n > 0$

Der Bruch lautet also: $\frac{x_1 \cdot n^2 + x_2 \cdot n + x_3}{x_4 - x_5 \cdot n + x_6 \cdot n^2}$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 12 \quad x_2 = 16 \quad x_3 = 7 \quad x_4 = 8 \quad x_5 = 10 \quad x_6 = 6.$

Erklärung:

Wenden Sie die Regel zum Erweitern von Brüchen an. Sei

$$a_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} b_i x^i}{\sum_{i=0}^{m} c_i x^i}$$

mit $b_n \neq 0 \neq c_m$, dann gilt

$$a_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} b_i x^i}{\sum_{i=0}^{m} c_i x^i} \to \begin{cases} \pm\infty & \text{falls } n > m \\ \frac{b_n}{c_n} & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{falls } n < m \end{cases}$$

Rechnung:

$$\begin{aligned} \frac{12 \cdot n^2 + 16 \cdot n + 7}{8 - 10 \cdot n + 6 \cdot n^2} &= \frac{\frac{12 \cdot n^2}{n^2} + \frac{16 \cdot n}{n^2} + \frac{7}{n^2}}{\frac{8}{n^2} - \frac{10 \cdot n}{n^2} + \frac{6 \cdot n^2}{n^2}} \\ &= \frac{12 + \frac{16}{n} + \frac{7}{n^2}}{\frac{8}{n^2} - \frac{10}{n} + 6} \\ &\to \frac{12 + 0 + 0}{0 - 0 + 6} = 2 \end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

[X] 2	[2] $\frac{35}{4}$	[3] $\frac{8}{5}$	[4] $\frac{7}{6}$
[5] 0	[6] $\frac{8}{7}$	[7] ∞	[8] $-\frac{35}{4}$
[9] $\frac{1}{2}$	[10] $\frac{7}{8}$	[11] $\frac{5}{8}$	[12] $\frac{3}{2}$

Fehlerinterpretation:

[X] 2	richtig
[2] $\frac{35}{4}$	DF: falsche Limesbildung
[3] $\frac{8}{5}$	DF: falsche Limesbildung
[4] $\frac{7}{6}$	DF: falsche Limesbildung
[5] 0	DF: falsche Limesbildung
[6] $\frac{8}{7}$	DF: falsche Limesbildung Kehrbruch
[7] ∞	DF: falsche Limesbildung
[8] $-\frac{35}{4}$	DF: falsche Limesbildung
[9] $\frac{1}{2}$	DF: falsche Limesbildung Kehrbruch
[10] $\frac{7}{8}$	DF: falsche Limesbildung
[11] $\frac{5}{8}$	DF: falsche Limesbildung Kehrbruch
[12] $\frac{3}{2}$	DF: falsche Limesbildung

MV 04	Blatt 03	Kapitel 3.2	Grenzwerte
Wurzel	Folgen	Nummer: 36 0 2004030003	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 3.1.2: Bestimmen Sie den Wert, gegen den die Folge für $n \to \infty$ strebt:

$$\sqrt{25 \cdot n^2 + 6 \cdot n + 10} - \sqrt{25 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 6}$$

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Wurzel $(n \in 1..6)$ $x_1 = x_4$ $x_n > 0$

Der Term lautet also: $\sqrt{x_1 \cdot n^2 + x_2 \cdot n + x_3} - \sqrt{x_4 \cdot n^2 + x_5 \cdot n + x_6}$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 25$ $x_2 = 6$ $x_3 = 10$ $x_4 = 25$ $x_5 = 4$ $x_6 = 6$.

Erklärung:

Sei $a_n = \sqrt{b_n} - \sqrt{c_n}$, und b_n, c_n sind asymptotisch gleich und $\sqrt{b_n} + \sqrt{c_n} > 0$ und $\sqrt{b_n} + \sqrt{c_n}$ geht nicht gegen 0, dann gilt

$$a_n \quad = \quad \sqrt{b_n} - \sqrt{c_n} \quad = \quad \frac{(\sqrt{b_n} - \sqrt{c_n}) \cdot (\sqrt{b_n} + \sqrt{c_n})}{\sqrt{b_n} + \sqrt{c_n}} \quad = \quad \frac{b_n - c_n}{\sqrt{b_n} + \sqrt{c_n}}.$$

Rechnung:

$\sqrt{25 \cdot n^2 + 6 \cdot n + 10} - \sqrt{25 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 6}$

$= \frac{(\sqrt{25 \cdot n^2 + 6 \cdot n + 10} - \sqrt{25 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 6}) \cdot (\sqrt{25 \cdot n^2 + 6 \cdot n + 10} + \sqrt{25 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 6})}{\sqrt{25 \cdot n^2 + 6 \cdot n + 10} + \sqrt{25 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 6}}$ Regel: Differenzen von Wurzeln

$= \frac{25 \cdot n^2 + 6 \cdot n + 10 - (25 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 6)}{\sqrt{n^2(25 + \frac{6}{n} + \frac{10}{n^2})} + \sqrt{n^2(25 + \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2})}}$ 3. binomische Formel

$= \frac{2 \cdot n + 4}{n \cdot \sqrt{25 + \frac{6}{n} + \frac{10}{n^2}} + \sqrt{25 + \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2}}}$ teilweise Wurzel gezogen

$= \frac{2 + \frac{4}{n}}{\sqrt{25 + \frac{6}{n} + \frac{10}{n^2}} + \sqrt{25 + \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2}}}$ n gekürzt

$\to \frac{2+0}{\sqrt{25+0+0} + \sqrt{25+0+0}} = \frac{2}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$

Angebotene Lösungen:

[1] $\frac{2}{25}$	[2] $\sqrt{12}$	[3] 5	[4] $\frac{2}{5}$
[5] 20	[6] $\sqrt{20}$	[7] $\frac{4}{25}$	[8] 25
[9] 40	[×] $\frac{1}{5}$	[11] ∞	[12] $\frac{4}{5}$

Fehlerinterpretation:

[1]	$\frac{2}{25}$	RF: Wurzel nicht gezogen
[2]	$\sqrt{12}$	DF: Regel nicht verstanden
[3]	5	DF: Regel nicht verstanden
[4]	$\frac{2}{5}$	DF: Regel nicht verstanden
[5]	20	DF: Dividiert statt multipliziert
[6]	$\sqrt{20}$	DF: Regel nicht verstanden
[7]	$\frac{4}{25}$	RF: Wurzel nicht gezogen
[8]	25	DF: Regel nicht verstanden
[9]	40	DF: Dividiert statt multipliziert
[×]	$\frac{1}{5}$	richtig
[11]	∞	DF: Regel nicht verstanden
[12]	$\frac{4}{5}$	RF: 2 im Nenner vergessen

MV 04	Blatt 03	Kapitel 3.2	Grenzwerte
eFktn	Folgen	Nummer: 37 0 2004030007	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle:	W	

Aufgabe 3.1.3: Bestimmen Sie den Wert, gegen den die Folge für $n \to \infty$ strebt:

$$\left| \left(\frac{2 - 2 \cdot n}{n - 2} \right)^{7 \cdot n - 3} \right|$$

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl im Term $(n \in 1..4)$ $x_n > 1, x_3 > 2$

Der Term lautet also: $\left| \left(\frac{x_1 - 2 \cdot n}{n - x_2} \right)^{x_3 \cdot n - x_4} \right|$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 7 \quad x_4 = 3.$

Erklärung:

Finden Sie zuerst den Grenzwert g des Klammerausdruckes. Gegen welchen Wert strebt g^n?

Rechnung:

$$\left| \left(\frac{2 - 2 \cdot n}{n - 2} \right)^{7 \cdot n - 3} \right| = \left| \left(-2 + \frac{-2}{n - 2} \right)^{7 \cdot n - 3} \right| \quad \text{dies verhält sich wie } |(-2)^{7 \cdot n}| \to \infty$$

∞ wird nicht als Grenzwert angesehen. Deshalb gibt es keinen Grenzwert.

Angebotene Lösungen:

[1] $\ln 4 - \ln 7$	[2] 1	[3] e^0	[4] $\frac{7}{2}$
[5] e^1	[X] ∞	[7] e^2	[8] $\ln 7$
[9] $-\infty$	[10] 28	[11] e^{28}	[12] $\ln 2$

Fehlerinterpretation:

[1]	$\ln 4 - \ln 7$	DF: Regel nicht verstanden
[2]	1	DF: Regel nicht verstanden
[3]	e^0	RF: Potenzgesetz falsch angewendet
[4]	$\frac{7}{2}$	DF: Regel nicht verstanden
[5]	e^1	DF: Regel nicht verstanden
[X]	∞	richtig
[7]	e^2	DF: Regel nicht verstanden
[8]	$\ln 7$	DF: Regel nicht verstanden
[9]	$-\infty$	DF: Regel nicht verstanden
[10]	28	DF: Regel nicht verstanden
[11]	e^{28}	RF: Potenzgesetz falsch angewendet
[12]	$\ln 2$	DF: Regel nicht verstanden

MV 04	Blatt 03	Kapitel 3.2	Grenzwerte
Brueche	Folgen	Nummer: 46 0 2004030002	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 3.1.4: Bestimmen Sie den Wert, gegen den die Folge für $n \to \infty$ strebt:

$$\frac{6 \cdot 2^n + 6 \cdot 4^n + 3}{1 - 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 4^n}$$

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl im Bruch $(n \in 1..6)$ $x_n > 0$

Der Bruch lautet also: $\frac{x_1 \cdot 2^n + x_2 \cdot 4^n + x_3}{x_4 - x_5 \cdot 2^n + x_6 \cdot 4^n}$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6 \quad x_2 = 6 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = 1 \quad x_5 = 2 \quad x_6 = 3.$

Erklärung:

Wenden Sie die Regel zum Erweitern von Brüchen an. Sei

$$a_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} b_i x^i}{\sum_{i=0}^{m} c_i x^i}$$

mit $b_n \neq 0 \neq c_m$, dann gilt

$$a_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} b_i x^i}{\sum_{i=0}^{m} c_i x^i} \to \begin{cases} \pm\infty & \text{falls } n > m \\ \frac{b_n}{c_n} & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{falls } n < m \end{cases}$$

Rechnung:

Sei $w = 2^n$, dann geht mit n auch w gegen ∞, und es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{6 \cdot 2^n + 6 \cdot 4^n + 3}{1 - 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 4^n} &= \frac{6 \cdot 2^n + 6 \cdot (2^n)^2 + 3}{1 - 2 \cdot 2^n + 3 \cdot (2^n)^2} \\ &= \frac{6 \cdot w + 6 \cdot w^2 + 3}{1 - 2 \cdot w + 3 \cdot w^2} \\ &= \frac{\frac{6}{w} + 6 + \frac{3}{w^2}}{\frac{1}{w^2} - \frac{2}{w} \cdot w + 3} \\ &\to \frac{0 + 6 + 0}{0 - 0 + 3} = 2 \end{aligned}$$

Eine Rücksubstitution ist nicht erforderlich.

Angebotene Lösungen:

[1] 6	[2] $\frac{15}{2}$	[3] 0	[4] $\frac{1}{3}$
[5] ∞	[6] 3^6	[7] $\frac{1}{2}$	[8] 6^3
[9] $\frac{2}{15}$	[10] 1	[X] 2	[12] $\frac{\log 6}{\log 2}$

Fehlerinterpretation:

[1] 6	DF: falsche Limesbildung
[2] $\frac{15}{2}$	DF: falsche Limesbildung
[3] 0	DF: falsche Limesbildung
[4] $\frac{1}{3}$	DF: falsche Limesbildung, Kehrbruch
[5] ∞	DF: falsche Limesbildung
[6] 3^6	DF: potenziert
[7] $\frac{1}{2}$	DF: falsche Limesbildung, Kehrbruch
[8] 6^3	DF: potenziert
[9] $\frac{2}{15}$	DF: falsche Limesbildung, Kehrbruch
[10] 1	DF: falsche Limesbildung
[X] 2	richtig
[12] $\frac{\log 6}{\log 2}$	DF: logarithmiert

MV 04	Blatt 03	Kapitel 3.2	Grenzwerte
eFktn	Folgen	Nummer: 60 0 2004030005	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 3.1.5: Bestimmen Sie den Wert, gegen den die Folge für $n \to \infty$ strebt:

$$\left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^{2n+4}$$

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl $(n \in 1..3)\ x_n > 1$

Der Term lautet also: $\left(1 + \frac{1}{n - x_1}\right)^{x_2\, n + x_3}$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 4$.

Erklärung:

Sie können durch Umformung die Formel $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n = e^x$ anwenden.

Rechnung:

$$\begin{array}{lcll} \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^{2n+4} & = & \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2(m+2)+4} & \text{Substitution } m = n-2 \\ & = & \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+2+2}\right)^2 & \text{Potenzgesetze} \\ & = & \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^2 \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^4\right)^2 & \text{Potenzgesetze} \\ & \to & e^2 \cdot \left(1^4\right)^2 = e^2 & e \text{ - Limes und mit } n \text{ geht auch } m \text{ gegen } \infty \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

[1]	e^4	[2]	0	[3]	$-\infty$	[4]	$\ln 2$
[5]	$\frac{2}{3}$	[6]	1	[X]	e^2	[8]	2
[9]	∞	[10]	$\ln 4$	[11]	161	[12]	162

Fehlerinterpretation:

[1]	e^4	DF: Regel nicht verstanden	
[2]	0	DF: Regel nicht verstanden	
[3]	$-\infty$	DF: Regel nicht verstanden	
[4]	$\ln 2$	DF: Regel nicht verstanden	
[5]	$\frac{2}{3}$	DF: Regel nicht verstanden	
[6]	1	DF: Regel nicht verstanden	
[X]	e^2	richtig	
[8]	2	DF: Regel nicht verstanden	
[9]	∞	DF: Regel nicht verstanden	
[10]	$\ln 4$	DF: Regel nicht verstanden	
[11]	161	GL:	geratene Lösung
[12]	162	GL:	geratene Lösung

MV 04	Blatt 03	Kapitel 3.2	Grenzwerte
eFktn	Folgen	Nummer: 67 0 2004030006	Kl: 14G
Grad: 50 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 3.1.6: Bestimmen Sie den Wert, gegen den die Folge für $n \to \infty$ strebt:

$$\left(\frac{n+9}{n-3}\right)^{\frac{n}{5}+6}$$

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl $(n \in 1..4)\ x_n > 1, x_3 > 2$

Der Term lautet also: $\left(\frac{n + x_1}{n - x_2}\right)^{\frac{n}{x_3} + x_4}$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 9 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 6$.

Erklärung:

Sie können durch Umformung die Formel $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$ anwenden.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll}
\left(\frac{n+9}{n-3}\right)^{\frac{n}{5}+6} & = & \left(1+\frac{9+3}{n-3}\right)^{\frac{n+30}{5}} & \text{Polynomdivision mit Rest} \\
& = & \left(1+\frac{12}{m}\right)^{\frac{(m+3)+30}{5}} & \text{Substitution } m = n-3 \\
& = & \sqrt[5]{\left(1+\frac{12}{m}\right)^{m+33}} & \text{Potenzgesetze} \\
& = & \sqrt[5]{\left(1+\frac{12}{m}\right)^{m}\cdot\left(1+\frac{12}{m}\right)^{33}} & \text{Potenzgesetze} \\
& \to & \sqrt[5]{e^{12}\cdot 1^{33}} = e^{\frac{12}{5}} & e \text{ - Limes und mit } n \text{ geht auch } m \text{ gegen } \infty
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

[1] 3	[X] $e^{\frac{12}{5}}$	[3] $-\infty$	[4] 1
[5] ∞	[6] $\frac{5}{9}$	[7] $\ln 5$	[8] $\frac{12}{5}$
[9] $\ln 3$	[10] e^{60}	[11] e^9	[12] 0

Fehlerinterpretation:

[1]	3	DF: Regel nicht verstanden
[X]	$e^{\frac{12}{5}}$	richtig
[3]	$-\infty$	DF: Regel nicht verstanden
[4]	1	DF: Regel nicht verstanden
[5]	∞	DF: Regel nicht verstanden
[6]	$\frac{5}{9}$	DF: Regel nicht verstanden
[7]	$\ln 5$	DF: Regel nicht verstanden
[8]	$\frac{12}{5}$	DF: Regel nicht verstanden
[9]	$\ln 3$	DF: Regel nicht verstanden
[10]	e^{60}	RF: Potenzgesetz falsch angewendet
[11]	e^9	DF: Regel nicht verstanden
[12]	0	DF: Regel nicht verstanden

MV 04	Blatt 03	Kapitel 3.2	Grenzwerte
Wurzel	Folgen	Nummer: 90 0 2004030004	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 3.1.7: Bestimmen Sie den Wert, gegen den die Folge für $n \to \infty$ strebt:

$$\sqrt{16\cdot n^2 + 9\cdot n + 16} \; - 4n \; + \; 2$$

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl im Term $(n \in 1..5)$ $x_1 = (x_4)^2$ $x_n > 0$

Der Term lautet also: $\sqrt{x_1\cdot n^2 \; + \; x_2\cdot n \; + \; x_3} \; - \; x_4 n \; + \; x_5$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 16$ $\quad x_2 = 9$ $\quad x_3 = 16$ $\quad x_4 = 4$ $\quad x_5 = 2$.

Erklärung:

Sei $a_n = \sqrt{b_n} - \sqrt{c_n}$, und b_n, c_n sind asymptotisch gleich und $\sqrt{b_n} + \sqrt{c_n} > 0$ und $\sqrt{b_n} + \sqrt{c_n}$ geht nicht gegen 0, dann gilt

$$a_n \quad = \quad \sqrt{b_n} - \sqrt{c_n} \quad = \quad \frac{(\sqrt{b_n} - \sqrt{c_n})\cdot(\sqrt{b_n} + \sqrt{c_n})}{\sqrt{b_n} + \sqrt{c_n}} \quad = \quad \frac{b_n - c_n}{\sqrt{b_n} + \sqrt{c_n}}.$$

Eine Folge der Form $(an + b)$ $a, b \geq 0$ kann auch als $\sqrt{(an+b)^2}$ geschrieben werden.

Rechnung:

$\sqrt{16 \cdot n^2 + 9 \cdot n + 16} - 4n + 2$

$= \frac{\left(\sqrt{16 \cdot n^2 + 9 \cdot n + 16} - \sqrt{(4n-2)^2}\right) \cdot \left(\sqrt{16 \cdot n^2 + 9 \cdot n + 16} + \sqrt{(4n-2)^2}\right)}{\sqrt{16 \cdot n^2 + 9 \cdot n + 16} + \sqrt{(4n-2)^2}}$ Regel: Differenzen von Wurzeln

$= \frac{16 \cdot n^2 + 9 \cdot n + 16 - (4n-2)^2}{\sqrt{n^2(16 + \frac{9}{n} + \frac{16}{n^2})} + \sqrt{n^2(16 - \frac{16}{n} + \frac{4}{n^2})}}$ 3. binomische Formel

$= \frac{(9+16) \cdot n + 16 - 4}{n \cdot (\sqrt{16 + \frac{9}{n} + \frac{16}{n^2}} + \sqrt{16 - \frac{16}{n} + \frac{4}{n^2}})}$ teilweise Wurzel gezogen

$= \frac{25 + \frac{12}{n}}{\sqrt{16 + \frac{9}{n} + \frac{16}{n^2}} + \sqrt{16 - \frac{16}{n} + \frac{4}{n^2}}}$ n gekürzt

$\rightarrow \frac{25+0}{\sqrt{16+0+0} + \sqrt{16-0+0}} = \frac{25}{8}$

Angebotene Lösungen:

[1] $\frac{17}{8}$	[2] $\sqrt{35}$	[×] $\frac{25}{8}$	[4] $\frac{7}{8}$
[5] 4	[6] $\frac{25}{32}$	[7] 16	[8] $\frac{7}{4}$
[9] $\frac{25}{16}$	[10] 0	[11] $\frac{25}{4}$	[12] $\frac{17}{4}$

Fehlerinterpretation:

[1]	$\frac{17}{8}$	RF: 2 im Zähler vergessen
[2]	$\sqrt{35}$	DF: Regel nicht verstanden
[×]	$\frac{25}{8}$	richtig
[4]	$\frac{7}{8}$	DF: Regel nicht verstanden
[5]	4	DF: Regel nicht verstanden
[6]	$\frac{25}{32}$	RF: Wurzel nicht gezogen
[7]	16	DF: Regel nicht verstanden
[8]	$\frac{7}{4}$	RF: 2 im Nenner vergessen
[9]	$\frac{25}{16}$	RF: 2 im Nenner vergessen und Wurzel nicht gezogen
[10]	0	DF: Regel nicht verstanden
[11]	$\frac{25}{4}$	RF: 2 im Nenner vergessen
[12]	$\frac{17}{4}$	RF: 2 im Zähler und Nenner vergessen

Allgemeine Hinweise:

Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu