

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 4

MV 04	Blatt 04	Kapitel 3.3	Konvergenzbereiche
Reihen	Folgen	Nummer: 2 0 2004040002	Kl: 14G
Grad: 40	Zeit: 30	Quelle: keine	W

Aufgabe 4.1.1: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe:

$$\sum_{i=9}^{\infty} \frac{(4 \cdot x - 8)^i}{i^2} ?$$

Gesucht ist der maximale Bereich in dem die Reihe konvergiert.

Parameter:

$x_n = n$ -te Zahl in der Reihe ($n \in \mathbb{N}$) $x_n > 1$

Die Reihe lautet also: $\sum_{i=x_1}^{\infty} \frac{(x_2 \cdot x - x_3)^i}{i^2}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 9$ $x_2 = 4$ $x_3 = 8$.

Erklärung:

Wir wenden das Quotientenkriterium an: $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q < 1 \Rightarrow a_n$ konvergent. Dazu substituieren wir zuerst $y = 4 \cdot x - 8$.

Rechnung:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{y^{(n+1)}}{\frac{(n+1)^2}{y^n}} \right| \\ &= \left| \frac{y^{(n+1)} \cdot n^2}{y^n \cdot (n+1)^2} \right| \quad \text{weil } \frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \\ &= \left| y \cdot \frac{n^2}{n^2 + 2 \cdot n + 1} \right| = \left| y \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \right| \quad y^n \text{ gekürzt} \\ &\rightarrow \left| y \cdot \frac{1}{1} \right| = |y| \end{aligned}$$

Also ist $\left| y \cdot \frac{n^2}{n^2 + 2 \cdot n + 1} \right| < q < 1$ (von einer Stelle an), wenn $|y| < q < 1$ ist, also wenn $y \in (-1, 1)$. Was gilt an den Rändern, also für $y = 1$ oder $y = -1$?

$$\begin{aligned} y = 1 : \quad & \sum_{i=9}^{\infty} \frac{1^i}{i^2} \\ &= \sum_{i=9}^{\infty} \frac{1}{i^2} \quad \text{konvergiert nach dem Integralkriterium} \\ y = -1 : \quad & \sum_{i=9}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i^2} \quad \text{konvergiert nach Leibnitz} \end{aligned}$$

Also konvergiert die Reihe für $y \in [-1, 1]$. Rücksubstitution:

$$\begin{aligned} y \in [-1, 1] &\Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq 4 \cdot x - 8 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -1 + 8 \leq 4 \cdot x \leq 1 + 8 \\ &\Leftrightarrow \frac{7}{4} \leq x \leq \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Also konvergiert die Reihe für $x \in \left[\frac{7}{4}, \frac{9}{4} \right]$.

Angebotene Lösungen:

- | | | | | | | | |
|----------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $x \in [-\frac{4}{9}, \frac{4}{3}]$ | <input type="checkbox"/> 2 | $x \in [-1, 1]$ | <input type="checkbox"/> 3 | $x \in (\frac{7}{4}, \frac{9}{4})$ | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | $x \in [\frac{7}{4}, \frac{9}{4}]$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $x = 0$ | <input type="checkbox"/> 6 | $x \in (-9, 9)$ | <input type="checkbox"/> 7 | $x \in (-4, 4]$ | <input type="checkbox"/> 8 | $x \in \mathbf{R}$ |
| <input type="checkbox"/> 9 | $x \in (-1, 1)$ | <input type="checkbox"/> 10 | $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ | <input type="checkbox"/> 11 | $x \in [-8, 8]$ | <input type="checkbox"/> 12 | $x \in [-1, 1)$ |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|---------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $x \in [-\frac{4}{9}, \frac{4}{3}]$ | DF: Wirr geraten |
| <input type="checkbox"/> 2 | $x \in [-1, 1]$ | DF: Substitution fehlt |
| <input type="checkbox"/> 3 | $x \in (\frac{7}{4}, \frac{9}{4})$ | DF: Ränder nicht untersucht |
| <input checked="" type="checkbox"/> 4 | $x \in [\frac{7}{4}, \frac{9}{4}]$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 5 | $x = 0$ | DF: Quotientenkriterium falsch |
| <input type="checkbox"/> 6 | $x \in (-9, 9)$ | DF: Quotientenkriterium falsch |
| <input type="checkbox"/> 7 | $x \in (-4, 4]$ | DF: Quotientenkriterium falsch |
| <input type="checkbox"/> 8 | $x \in \mathbf{R}$ | DF: Quotientenkriterium falsch |
| <input type="checkbox"/> 9 | $x \in (-1, 1)$ | DF: Substitution fehlt |
| <input type="checkbox"/> 10 | $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ | DF: Quotientenkriterium falsch |
| <input type="checkbox"/> 11 | $x \in [-8, 8]$ | DF: Quotientenkriterium falsch |
| <input type="checkbox"/> 12 | $x \in [-1, 1)$ | DF: Substitution fehlt |

MV 04 Blatt 04 Kapitel 3.3 Konvergenzbereiche
 Reihen Folgen Nummer: 26 0 2004040005 Kl: 14G
 Grad: 50 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 4.1.2: Für welche $x \in \mathbf{R}$ konvergiert die Reihe:

$$\sum_{i=7}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{i \cdot x}{11}\right)^i ?$$

Gesucht ist der maximale Bereich in dem die Reihe konvergiert.

Parameter:

$x_n = n$ -te Zahl in der Reihe ($n \in 1..3$) $x_n > 1$

Die Reihe lautet also: $\sum_{i=x_1}^{\infty} x_2 \cdot \left(\frac{i \cdot x}{x_3}\right)^i$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7$ $x_2 = 4$ $x_3 = 11$.

Erklärung:

Wir wenden das Quotientenkriterium an: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q < 1 \Rightarrow a_n$ konvergent.

Rechnung:

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{4 \cdot \left(\frac{(n+1) \cdot x}{11}\right)^{(n+1)}}{4 \cdot \left(\frac{n \cdot x}{11}\right)^n}\right| \\ &= \left|\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{x}{11}\right| \quad \frac{x^n}{11^n} \text{ und } 4 \text{ gekürzt} \\ &\geq \left|\frac{n^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{x}{11}\right| = \left|\frac{nx}{11}\right| \rightarrow \infty \quad \text{für } x \neq 0 \end{aligned}$$

Also ist $\left|\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{x}{11}\right|$ nur $< q < 1$ (von einer Stelle an), wenn $x = 0$ ist.
 Also konvergiert die Reihe nur für $x = 0$.

Angebotene Lösungen:

- | | | | | | | | |
|----------------------------|-----------------|-----------------------------|--------------------------------------------------|-----------------------------|-------------------------------------------------|----------------------------------------|-------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $x \in (-1, 1)$ | <input type="checkbox"/> 2 | $x \in \left(-\frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right)$ | <input type="checkbox"/> 3 | $x \in (0, 1)$ | <input type="checkbox"/> 4 | $x \in (-1, 1]$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $x \in [-1, 1]$ | <input type="checkbox"/> 6 | $x \in \left(-\frac{7}{4}, \frac{15}{4}\right)$ | <input type="checkbox"/> 7 | $x \in \left[-\frac{7}{4}, \frac{15}{4}\right]$ | <input type="checkbox"/> 8 | $x \in (-11, 11)$ |
| <input type="checkbox"/> 9 | $x \in [-1, 1)$ | <input type="checkbox"/> 10 | $x \in \left[-\frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right)$ | <input type="checkbox"/> 11 | $x \in [-11, 11]$ | <input checked="" type="checkbox"/> 12 | $x = 0$ |

Fehlerinterpretation:

<input type="checkbox"/> 1	$x \in (-1, 1)$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 2	$x \in (-\frac{1}{11}, \frac{1}{11})$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input type="checkbox"/> 3	$x \in (0, 1)$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 4	$x \in (-1, 1]$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 5	$x \in [-1, 1]$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 6	$x \in (-\frac{7}{4}, \frac{15}{4})$	DF: Wirr geraten
<input type="checkbox"/> 7	$x \in [-\frac{7}{4}, \frac{15}{4}]$	DF: Wirr geraten
<input type="checkbox"/> 8	$x \in (-11, 11)$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input type="checkbox"/> 9	$x \in [-1, 1)$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 10	$x \in [-\frac{1}{11}, \frac{1}{11})$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input type="checkbox"/> 11	$x \in [-11, 11]$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input checked="" type="checkbox"/> X	$x = 0$	richtig

MV 04 Blatt 04 Kapitel 3.3 Konvergenzbereiche
Reihen Folgen Nummer: 49 0 2004040001 Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 4.1.3: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe:

$$\sum_{i=4}^{\infty} \frac{x^i}{4 \cdot i + 4} \quad ?$$

Gesucht ist der maximale Bereich in dem die Reihe konvergiert.

Parameter:

$x_n = n$ -te Zahl in der Reihe ($n \in 1..3$) $x_n > 1$

Die Reihe lautet also: $\sum_{i=x_1}^{\infty} \frac{x^i}{x_2 \cdot i + x_3}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4$ $x_2 = 4$ $x_3 = 4$.

Erklärung:

Wir wenden das Quotientenkriterium an: $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q < 1 \Rightarrow a_n$ konvergent.

Rechnung:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{x^{(n+1)}}{\frac{4 \cdot (n+1) + 4}{x^n}} \right| \\ &= \left| \frac{x^{(n+1)} \cdot (4 \cdot n + 4)}{x^n \cdot (4 \cdot (n+1) + 4)} \right| \quad \text{weil } \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot c}{b} \\ &= \left| x \cdot \frac{4 \cdot n + 4}{4 \cdot n + 8} \right| = \left| x \cdot \frac{4 + \frac{4}{n}}{4 + \frac{4}{n}} \right| \quad x^n \text{ gekürzt} \\ &\rightarrow \left| x \cdot \frac{4}{4} \right| = |x| \end{aligned}$$

Also ist $|x \cdot \frac{4 \cdot n + 4}{4 \cdot n + 8}| < q < 1$ (von einer Stelle an), wenn $|x| < q < 1$ ist, also wenn $x \in (-1, 1)$. Was gilt an den Rändern, also für $x = 1$ oder $x = -1$?

$$\begin{aligned} x = 1 : \quad & \sum_{i=4}^{\infty} \frac{1^i}{4 \cdot i + 4} \\ &= \sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot i + 4} \rightarrow \infty \quad (\text{Integralkriterium}) \\ x = -1 : \quad & \sum_{i=4}^{\infty} \frac{(-1)^i}{4 \cdot i + 4} \quad \text{konvergiert nach Leibnitz} \end{aligned}$$

Also konvergiert die Reihe für $x \in [-1, 1)$.

Angebotene Lösungen:

<input type="checkbox"/> 1	$x \in [-4, 4]$	<input type="checkbox"/> 2	$x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$	<input type="checkbox"/> 3	$x \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/> 4	$x = 0$
<input type="checkbox"/> 5	$x \in (-4, 4]$	<input type="checkbox"/> 6	$x \in (-4, 4)$	<input checked="" type="checkbox"/> 7	$x \in [-1, 1)$	<input type="checkbox"/> 8	$x \in [-4, 4)$
<input type="checkbox"/> 9	$x \in (-1, 1)$	<input type="checkbox"/> 10	$x \in [-1, 1]$	<input type="checkbox"/> 11	$x \in (-1, 1]$	<input type="checkbox"/> 12	162

Fehlerinterpretation:

<input type="checkbox"/> 1	$x \in [-4, 4]$	DF: Quotientenkriterium falsch	
<input type="checkbox"/> 2	$x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$	DF: Quotientenkriterium falsch	
<input type="checkbox"/> 3	$x \in \mathbf{R}$	DF: Quotientenkriterium falsch	
<input type="checkbox"/> 4	$x = 0$	DF: Quotientenkriterium falsch	
<input type="checkbox"/> 5	$x \in (-4, 4]$	DF: Quotientenkriterium falsch	
<input type="checkbox"/> 6	$x \in (-4, 4)$	DF: Quotientenkriterium falsch	
<input checked="" type="checkbox"/> 7	$x \in [-1, 1)$	richtig	
<input type="checkbox"/> 8	$x \in [-4, 4)$	DF: Quotientenkriterium falsch	
<input type="checkbox"/> 9	$x \in (-1, 1)$	DF: Ränder nicht untersucht	
<input type="checkbox"/> 10	$x \in [-1, 1]$	DF: Ränder falsch untersucht	
<input type="checkbox"/> 11	$x \in (-1, 1]$	DF: Ränder falsch untersucht	
<input type="checkbox"/> 12	162	GL:	geratene Lösung

MV 04 Blatt 04 Kapitel 3.3 Konvergenzbereiche
 Reihen Folgen Nummer: 51 0 2004040006 Kl: 14G
 Grad: 50 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 4.1.4: Für welche $x \in \mathbf{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{i=7}^{\infty} \frac{4}{i^4} \cdot \left(\frac{11}{x}\right)^i ?$$

Gesucht ist der maximale Bereich in dem die Reihe konvergiert.

Parameter:

$x_n = n$ -te Zahl in der Reihe ($n \in 1..4$) $x_n > 1$

Die Reihe lautet also: $\sum_{i=x_1}^{\infty} \frac{x_2}{i^{x_4}} \cdot \left(\frac{x_3}{x}\right)^i$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7$ $x_2 = 4$ $x_3 = 11$ $x_4 = 4$.

Erklärung:

Wir wenden das Quotientenkriterium an: $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q < 1 \Rightarrow a_n$ konvergent.

Rechnung:

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{\frac{4}{(n+1)^4} \cdot \left(\frac{11}{x}\right)^{n+1}}{\frac{4}{n^4} \cdot \left(\frac{11}{x}\right)^n}\right| \\ &= \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^4 \cdot \frac{11}{x}\right| \quad \frac{11^n}{x^n} \text{ und } 4 \text{ gekürzt} \\ &\rightarrow \left|\frac{11}{x}\right| \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Also ist $\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^4 \cdot \frac{11}{x}\right| < q < 1$ (von einer Stelle an), wenn $|x| > 11$ ist. Was gilt an den Rändern also für $x = \pm 11$?

$$x = 11 : \quad \sum_{i=7}^{\infty} \frac{4}{i^4} \cdot \left(\frac{11}{11}\right)^i = \sum_{i=7}^{\infty} \frac{4}{i^4} \quad \text{konvergent nach dem Integralkriterium}$$

$$x = -11 : \quad \sum_{i=7}^{\infty} \frac{4}{i^4} \cdot \left(\frac{-11}{11}\right)^i = \sum_{i=7}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4}{i^4} \quad \text{konvergent nach Leibnitz}$$

Also konvergiert die Reihe für $x \leq -11$ oder für $x \geq 11$.

Angeborene Lösungen:

<input type="checkbox"/> 1	$x \in (-11, 11)$	<input type="checkbox"/> 2	$x \in (-1, 1)$	<input type="checkbox"/> 3	$x < -11$ oder $x > 11$	<input type="checkbox"/> 4	$x \leq -11$ oder $x > 11$
<input type="checkbox"/> 5	$x < -11$ oder $x \geq 11$	<input type="checkbox"/> 6	$x \in \left(-\frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right)$	<input type="checkbox"/> 7	$x \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/> 8	$x < \frac{-1}{11}$ oder $x \geq \frac{1}{11}$
<input type="checkbox"/> 9	$x \leq \frac{-1}{11}$ oder $x > \frac{1}{11}$	<input checked="" type="checkbox"/> 10	$x \leq -11$ oder $x \geq 11$	<input type="checkbox"/> 11	$x \in [-1, 1)$	<input type="checkbox"/> 12	$x \leq \frac{-1}{11}$ oder $x \geq \frac{1}{11}$

Fehlerinterpretation:

<input type="checkbox"/> 1	$x \in (-11, 11)$	DF: Als Potenzreihe gerechnet
<input type="checkbox"/> 2	$x \in (-1, 1)$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 3	$x < -11$ oder $x > 11$	DF: Ränder nicht beachtet
<input type="checkbox"/> 4	$x \leq -11$ oder $x > 11$	DF: Ränder nicht beachtet
<input type="checkbox"/> 5	$x < -11$ oder $x \geq 11$	DF: Ränder nicht beachtet
<input type="checkbox"/> 6	$x \in (-\frac{1}{11}, \frac{1}{11})$	DF: Als Potenzreihe gerechnet
<input type="checkbox"/> 7	$x \in \mathbf{R}$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input type="checkbox"/> 8	$x < \frac{-1}{11}$ oder $x \geq \frac{1}{11}$	DF: Als Potenzreihe gerechnet
<input type="checkbox"/> 9	$x \leq \frac{-1}{11}$ oder $x > \frac{1}{11}$	DF: Als Potenzreihe gerechnet
<input checked="" type="checkbox"/> 10	$x \leq -11$ oder $x \geq 11$	richtig
<input type="checkbox"/> 11	$x \in [-1, 1)$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 12	$x \leq \frac{-1}{11}$ oder $x \geq \frac{1}{11}$	DF: Als Potenzreihe gerechnet

MV 04 Blatt 04 Kapitel 3.3 Konvergenzbereiche
 Reihen Folgen Nummer: 78 0 2004040004 Kl: 14G
 Grad: 50 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 4.1.5: Für welche $x \in \mathbf{R}$ konvergiert die Reihe:

$$\sum_{i=8}^{\infty} \frac{(5 \cdot x)^{\frac{i}{4}}}{12} ?$$

Gesucht ist der maximale Bereich in dem die Reihe konvergiert.

Parameter:

$x_n = n$ -te Zahl in der Reihe ($n \in 1..4$) $x_n > 1$ x_3 gerade

Die Reihe lautet also: $\sum_{i=x_1}^{\infty} \frac{(x_2 \cdot x)^{\frac{i}{x_3}}}{x_3}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 8$ $x_2 = 5$ $x_3 = 12$ $x_4 = 4$.

Erklärung:

Wir wenden das Quotientenkriterium an: $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q < 1 \Rightarrow a_n$ konvergent.

Rechnung:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\frac{(5 \cdot x)^{\frac{n+1}{4}}}{12}}{\frac{(5 \cdot x)^{\frac{n}{4}}}{12}} \right| \\ &= |\sqrt[4]{5 \cdot x}| \quad (5x)^n \text{ und } 12 \text{ gekürzt} \end{aligned}$$

Also ist $|\sqrt[4]{5 \cdot x}| < q < 1$ (von einer Stelle an), wenn $|x| < \frac{1}{5}$ ist. $\sqrt[4]{x}$ ist nur für $x \geq 0$ definiert. Was gilt an den Rändern, also für $x = 0$ oder $x = \frac{1}{5}$?

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad & \sum_{i=8}^{\infty} \frac{(5 \cdot 0)^{\frac{i}{4}}}{12} = 0 \quad \text{also konvergent} \\ x = \frac{1}{5} : \quad & \sum_{i=8}^{\infty} \frac{(5 \cdot \frac{1}{5})^{\frac{i}{4}}}{12} \\ &= \sum_{i=8}^{\infty} \frac{1^{\frac{i}{4}}}{12} \\ &= \frac{1}{12} \cdot \sum_{i=8}^{\infty} 1 \rightarrow \infty \quad \text{divergent} \end{aligned}$$

Also konvergiert die Reihe für $x \in [0, \frac{1}{5})$.

Angeborene Lösungen:

- | | | | | | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------|---------------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------|-----------------------------|-------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $x \in [-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ | <input type="checkbox"/> 2 | $x \in (-\frac{1}{12}, \frac{1}{12})$ | <input type="checkbox"/> 3 | $x \in (0, \frac{1}{5})$ | <input type="checkbox"/> 4 | $x = \frac{1}{5}$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $x \in [-\frac{7}{4}, \frac{17}{4}]$ | <input type="checkbox"/> 6 | $x \in \mathbf{R}$ | <input type="checkbox"/> 7 | $x \in (-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ | <input type="checkbox"/> 8 | $x \in [-1, 1]$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 9 | $x \in [0, \frac{1}{5})$ | <input type="checkbox"/> 10 | $x \in [0, 1)$ | <input type="checkbox"/> 11 | $x \in (-\frac{7}{4}, \frac{17}{4})$ | <input type="checkbox"/> 12 | $x = 0$ |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $x \in [-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ | DF: Wurzel nicht erkannt |
| <input type="checkbox"/> 2 | $x \in (-\frac{1}{12}, \frac{1}{12})$ | DF: Quotientenkriterium falsch |
| <input type="checkbox"/> 3 | $x \in (0, \frac{1}{5})$ | DF: Ränder nicht untersucht |
| <input type="checkbox"/> 4 | $x = \frac{1}{5}$ | DF: Quotientenkriterium falsch |
| <input type="checkbox"/> 5 | $x \in [-\frac{7}{4}, \frac{17}{4}]$ | DF: Wirr geraten |
| <input type="checkbox"/> 6 | $x \in \mathbf{R}$ | DF: Quotientenkriterium falsch |
| <input type="checkbox"/> 7 | $x \in (-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ | DF: Wurzel nicht erkannt |
| <input type="checkbox"/> 8 | $x \in [-1, 1]$ | DF: Lösung geraten |
| <input checked="" type="checkbox"/> 9 | $x \in [0, \frac{1}{5})$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 10 | $x \in [0, 1)$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 11 | $x \in (-\frac{7}{4}, \frac{17}{4})$ | DF: Wirr geraten |
| <input type="checkbox"/> 12 | $x = 0$ | DF: Quotientenkriterium falsch |

MV 04 Blatt 04 Kapitel 3.3 Konvergenzbereiche
 Reihen Folgen Nummer: 108 0 2004040003 Kl: 14G
 Grad: 40 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 4.1.6: Für welche $x \in \mathbf{R}$ konvergiert die Reihe:

$$\sum_{i=6}^{\infty} (5 \cdot i + 10) \cdot (5 \cdot x + 5)^i ?$$

Gesucht ist der maximale Bereich in dem die Reihe konvergiert.

Parameter:

$x_n = n - \text{te}$ Zahl in der Reihe ($n \in 1..5$) $x_n > 1$

Die Reihe lautet also: $\sum_{i=x_1}^{\infty} (x_2 \cdot i + x_3) \cdot (x_4 \cdot x + x_5)^i$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6$ $x_2 = 5$ $x_3 = 10$ $x_4 = 5$ $x_5 = 5$.

Erklärung:

Wir wenden das Quotientenkriterium an: $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q < 1 \Rightarrow a_n$ konvergent. Dazu substituieren wir zuerst $y = 5 \cdot x + 5$.

Rechnung:

$$\begin{aligned} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| &= \left| \frac{(5 \cdot (n+1) + 10) \cdot y^{(n+1)}}{(5 \cdot n + 10) \cdot y^n} \right| \\ &= \left| y \cdot \frac{(5 \cdot n + 15)}{5 \cdot n + 10} \right| && y^n \text{ gekürzt} \\ &= \left| y \cdot \frac{5 + \frac{15}{n}}{5 + \frac{10}{n}} \right| && n \text{ gekürzt} \\ &\rightarrow \left| y \cdot \frac{5}{5} \right| = |y| \end{aligned}$$

Also ist $\left| y \cdot \frac{(5 \cdot n + 15)}{5 \cdot n + 10} \right| < q < 1$ (von einer Stelle an), wenn $|y| < q < 1$ ist, also wenn $y \in (-1, 1)$. Was gilt an den Rändern, also für $y = 1$ oder $y = -1$?

$$\begin{aligned} y = 1 : & \quad \sum_{i=6}^{\infty} (5 \cdot i + 10) \cdot 1^i \\ &= \sum_{i=6}^{\infty} 5 \cdot i + 10 \quad \rightarrow \infty \text{ divergent} \\ y = -1 : & \quad \sum_{i=6}^{\infty} (5 \cdot i + 10) \cdot (-1)^i \quad \text{alternierend divergent} \end{aligned}$$

Also konvergiert die Reihe für $y \in (-1, 1)$. Rücksubstitution:

$$\begin{aligned}y \in (-1, 1) &\Leftrightarrow -1 < y < 1 \\&\Leftrightarrow -1 < 5 \cdot x + 5 \leq 1 \\&\Leftrightarrow -1 - 5 < 5 \cdot x < 1 - 5 \\&\Leftrightarrow \frac{-6}{5} < x < \frac{-4}{5}\end{aligned}$$

Also konvergiert die Reihe für $x \in (\frac{-6}{5}, \frac{-4}{5})$.

Angebotene Lösungen:

- | | | | | | | | |
|----------------------------|--------------------------------------|-----------------------------|-----------------|---------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $x \in (-5, 5]$ | <input type="checkbox"/> 2 | $x \in [-1, 1]$ | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | $x \in (\frac{-6}{5}, \frac{-4}{5})$ | <input type="checkbox"/> 4 | $x \in (-1, 3)$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $x \in [\frac{-6}{5}, \frac{-4}{5}]$ | <input type="checkbox"/> 6 | $x \in [-1, 3]$ | <input type="checkbox"/> 7 | $x \in [-1, 1)$ | <input type="checkbox"/> 8 | $x \in [-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ |
| <input type="checkbox"/> 9 | $x \in (-6, 6)$ | <input type="checkbox"/> 10 | $x \in (-1, 1)$ | <input type="checkbox"/> 11 | $x = 0$ | <input type="checkbox"/> 12 | $x \in (-1, 1]$ |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $x \in (-5, 5]$ | DF: Quotientenkriterium falsch |
| <input type="checkbox"/> 2 | $x \in [-1, 1]$ | DF: Substitution fehlt |
| <input checked="" type="checkbox"/> 3 | $x \in (\frac{-6}{5}, \frac{-4}{5})$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 4 | $x \in (-1, 3)$ | DF: Wirr geraten |
| <input type="checkbox"/> 5 | $x \in [\frac{-6}{5}, \frac{-4}{5}]$ | DF: Ränder nicht untersucht |
| <input type="checkbox"/> 6 | $x \in [-1, 3]$ | DF: Wirr geraten |
| <input type="checkbox"/> 7 | $x \in [-1, 1)$ | DF: Substitution fehlt |
| <input type="checkbox"/> 8 | $x \in [-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ | DF: Quotientenkriterium falsch |
| <input type="checkbox"/> 9 | $x \in (-6, 6)$ | DF: Quotientenkriterium falsch |
| <input type="checkbox"/> 10 | $x \in (-1, 1)$ | DF: Substitution fehlt |
| <input type="checkbox"/> 11 | $x = 0$ | DF: Quotientenkriterium falsch |
| <input type="checkbox"/> 12 | $x \in (-1, 1]$ | DF: Substitution fehlt |

Allgemeine Hinweise:

Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware@yahoo.de).

Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: <http://www.vorkurs.de.vu>