

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 4

MV 04 Blatt 04 Kapitel 3.3 Konvergenzbereiche
 Reihen Folgen Nummer: 7 0 2004040006 Kl: 14G
 Grad: 50 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 4.1.1: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{i=6}^{\infty} \frac{5}{i^4} \cdot \left(\frac{9}{x}\right)^i ?$$

Gesucht ist der maximale Bereich in dem die Reihe konvergiert.

Parameter:

$x_n = n - \text{te}$ Zahl in der Reihe ($n \in 1..4$) $x_n > 1$

Die Reihe lautet also: $\sum_{i=x_1}^{\infty} \frac{x_2}{i^{x_4}} \cdot \left(\frac{x_3}{x}\right)^i$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6$ $x_2 = 5$ $x_3 = 9$ $x_4 = 4$.

Erklärung:

Wir wenden das Quotientenkriterium an: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q < 1 \Rightarrow a_n$ konvergent.

Rechnung:

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{\frac{5}{(n+1)^4} \cdot \left(\frac{9}{x}\right)^{n+1}}{\frac{5}{n^4} \cdot \left(\frac{9}{x}\right)^n}\right| \\ &= \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^4 \cdot \frac{9}{x}\right| \quad \frac{9^n}{x^n} \text{ und } 5 \text{ gekürzt} \\ &\rightarrow \left|\frac{9}{x}\right| \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Also ist $\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^4 \cdot \frac{9}{x}\right| < q < 1$ (von einer Stelle an), wenn $|x| > 9$ ist. Was gilt an den Rändern also für $x = \pm 9$?

$$x = 9: \quad \sum_{i=6}^{\infty} \frac{5}{i^4} \cdot \left(\frac{9}{9}\right)^i = \sum_{i=6}^{\infty} \frac{5}{i^4} \quad \text{konvergent nach dem Integralkriterium}$$

$$x = -9: \quad \sum_{i=6}^{\infty} \frac{5}{i^4} \cdot \left(\frac{-9}{9}\right)^i = \sum_{i=6}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{5}{i^4} \quad \text{konvergent nach Leibnitz}$$

Also konvergiert die Reihe für $x \leq -9$ oder für $x \geq 9$.

Angebotene Lösungen:

- | | | | | | | | |
|----------------------------|--|-----------------------------|---|---------------------------------------|--|-----------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> 1 | $x \in \left[-\frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$ | <input type="checkbox"/> 2 | $x < \frac{-1}{9}$ oder $x > \frac{1}{9}$ | <input type="checkbox"/> 3 | $x < \frac{-1}{9}$ oder $x \geq \frac{1}{9}$ | <input type="checkbox"/> 4 | $x \leq \frac{-1}{9}$ oder $x \geq \frac{1}{9}$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $x \in (-9, 9)$ | <input type="checkbox"/> 6 | $x \leq -9$ oder $x > 9$ | <input type="checkbox"/> 7 | $x \leq \frac{-1}{9}$ oder $x > \frac{1}{9}$ | <input type="checkbox"/> 8 | $x \in [-1, 1]$ |
| <input type="checkbox"/> 9 | $x \in [-1, 1)$ | <input type="checkbox"/> 10 | $x \in (-1, 1]$ | <input checked="" type="checkbox"/> X | $x \leq -9$ oder $x \geq 9$ | <input type="checkbox"/> 12 | $x < -9$ oder $x > 9$ |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|---------------------------------------|---|-------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $x \in \left[-\frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$ | DF: Als Potenzreihe gerechnet |
| <input type="checkbox"/> 2 | $x < \frac{-1}{9}$ oder $x > \frac{1}{9}$ | DF: Als Potenzreihe gerechnet |
| <input type="checkbox"/> 3 | $x < \frac{-1}{9}$ oder $x \geq \frac{1}{9}$ | DF: Als Potenzreihe gerechnet |
| <input type="checkbox"/> 4 | $x \leq \frac{-1}{9}$ oder $x \geq \frac{1}{9}$ | DF: Als Potenzreihe gerechnet |
| <input type="checkbox"/> 5 | $x \in (-9, 9)$ | DF: Als Potenzreihe gerechnet |
| <input type="checkbox"/> 6 | $x \leq -9$ oder $x > 9$ | DF: Ränder nicht beachtet |
| <input type="checkbox"/> 7 | $x \leq \frac{-1}{9}$ oder $x > \frac{1}{9}$ | DF: Als Potenzreihe gerechnet |
| <input type="checkbox"/> 8 | $x \in [-1, 1]$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 9 | $x \in [-1, 1)$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 10 | $x \in (-1, 1]$ | DF: Lösung geraten |
| <input checked="" type="checkbox"/> X | $x \leq -9$ oder $x \geq 9$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 12 | $x < -9$ oder $x > 9$ | DF: Ränder nicht beachtet |

Aufgabe 4.1.2: Für welche $x \in \mathbf{R}$ konvergiert die Reihe:

$$\sum_{i=2}^{\infty} (4 \cdot i + 8) \cdot (3 \cdot x + 5)^i ?$$

Gesucht ist der maximale Bereich in dem die Reihe konvergiert.

Parameter:

$x_n = n$ -te Zahl in der Reihe ($n \in 1..5$) $x_n > 1$

Die Reihe lautet also: $\sum_{i=x_1}^{\infty} (x_2 \cdot i + x_3) \cdot (x_4 \cdot x + x_5)^i$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2$ $x_2 = 4$ $x_3 = 8$ $x_4 = 3$ $x_5 = 5$.

Erklärung:

Wir wenden das Quotientenkriterium an: $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q < 1 \Rightarrow a_n$ konvergent. Dazu substituieren wir zuerst $y = 3 \cdot x + 5$.

Rechnung:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(4 \cdot (n+1) + 8) \cdot y^{(n+1)}}{(4 \cdot n + 8) \cdot y^n} \right| \\ &= \left| y \cdot \frac{(4 \cdot n + 12)}{4 \cdot n + 8} \right| && y^n \text{ gekürzt} \\ &= \left| y \cdot \frac{4 + \frac{12}{n}}{4 + \frac{8}{n}} \right| && n \text{ gekürzt} \\ &\rightarrow \left| y \cdot \frac{4}{4} \right| = |y| \end{aligned}$$

Also ist $\left| y \cdot \frac{(4 \cdot n + 12)}{4 \cdot n + 8} \right| < q < 1$ (von einer Stelle an), wenn $|y| < q < 1$ ist, also wenn $y \in (-1, 1)$. Was gilt an den Rändern, also für $y = 1$ oder $y = -1$?

$$\begin{aligned} y = 1 : & \quad \sum_{i=2}^{\infty} (4 \cdot i + 8) \cdot 1^i \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} 4 \cdot i + 8 \quad \rightarrow \infty \text{ divergent} \\ y = -1 : & \quad \sum_{i=2}^{\infty} (4 \cdot i + 8) \cdot (-1)^i \quad \text{alternierend divergent} \end{aligned}$$

Also konvergiert die Reihe für $y \in (-1, 1)$. Rücksubstitution:

$$\begin{aligned} y \in (-1, 1) &\Leftrightarrow -1 < y < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < 3 \cdot x + 5 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -1 - 5 < 3 \cdot x < 1 - 5 \\ &\Leftrightarrow \frac{-6}{3} < x < \frac{-4}{3} \end{aligned}$$

Also konvergiert die Reihe für $x \in (-2, \frac{-4}{3})$.

Angebotene Lösungen:

- | | | | |
|--|---|--|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 $x \in (-2, \frac{-4}{3})$ | <input type="checkbox"/> 2 $x \in [-2, \frac{-4}{3}]$ | <input type="checkbox"/> 3 $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ | <input type="checkbox"/> 4 $x \in (-1, 1)$ |
| <input type="checkbox"/> 5 $x \in \mathbf{R}$ | <input type="checkbox"/> 6 $x \in [-8, 8]$ | <input type="checkbox"/> 7 $x \in (\frac{-4}{3}, 4)$ | <input type="checkbox"/> 8 $x = 0$ |
| <input type="checkbox"/> 9 $x \in (-1, 1]$ | <input type="checkbox"/> 10 $x \in [-1, 1)$ | <input type="checkbox"/> 11 $x = \frac{5}{3}$ | <input type="checkbox"/> 12 $x \in (-2, 2)$ |

Fehlerinterpretation:

<input checked="" type="checkbox"/>	$x \in (-2, \frac{-4}{3})$	richtig
<input type="checkbox"/>	$x \in [-2, \frac{-4}{3}]$	DF: Ränder nicht untersucht
<input type="checkbox"/>	$x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input type="checkbox"/>	$x \in (-1, 1)$	DF: Substitution fehlt
<input type="checkbox"/>	$x \in \mathbf{R}$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input type="checkbox"/>	$x \in [-8, 8]$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input type="checkbox"/>	$x \in (\frac{-4}{3}, 4)$	DF: Wirr geraten
<input type="checkbox"/>	$x = 0$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input type="checkbox"/>	$x \in (-1, 1]$	DF: Substitution fehlt
<input type="checkbox"/>	$x \in [-1, 1)$	DF: Substitution fehlt
<input type="checkbox"/>	$x = \frac{5}{3}$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input type="checkbox"/>	$x \in (-2, 2)$	DF: Quotientenkriterium falsch

MV 04 Blatt 04 Kapitel 3.3 Konvergenzbereiche
Reihen Folgen Nummer: 45 0 2004040005 Kl: 14G
Grad: 50 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 4.1.3: Für welche $x \in \mathbf{R}$ konvergiert die Reihe:

$$\sum_{i=9}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{i \cdot x}{7}\right)^i ?$$

Gesucht ist der maximale Bereich in dem die Reihe konvergiert.

Parameter:

$x_n = n$ -te Zahl in der Reihe ($n \in 1..3$) $x_n > 1$

Die Reihe lautet also: $\sum_{i=x_1}^{\infty} x_2 \cdot \left(\frac{i \cdot x}{x_3}\right)^i$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 9$ $x_2 = 4$ $x_3 = 7$.

Erklärung:

Wir wenden das Quotientenkriterium an: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q < 1 \Rightarrow a_n$ konvergent.

Rechnung:

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{4 \cdot \left(\frac{(n+1) \cdot x}{7}\right)^{(n+1)}}{4 \cdot \left(\frac{n \cdot x}{7}\right)^n}\right| \\ &= \left|\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{x}{7}\right| \quad \frac{x^n}{7^n} \text{ und } 4 \text{ gekürzt} \\ &\geq \left|\frac{n^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{x}{7}\right| = \left|\frac{nx}{7}\right| \rightarrow \infty \text{ für } x \neq 0 \end{aligned}$$

Also ist $\left|\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{x}{7}\right|$ nur $< q < 1$ (von einer Stelle an), wenn $x = 0$ ist.
Also konvergiert die Reihe nur für $x = 0$.

Angebotene Lösungen:

<input type="checkbox"/>	$x \in (-7, 7)$	<input checked="" type="checkbox"/>	$x = 0$	<input type="checkbox"/>	$x \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{11}{4}\right]$	<input type="checkbox"/>	$x \in [-1, 1)$
<input type="checkbox"/>	$x \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/>	$x \in (-1, 1)$	<input type="checkbox"/>	$x \in \left(-\frac{3}{4}, \frac{11}{4}\right)$	<input type="checkbox"/>	$x \in [-1, 1]$
<input type="checkbox"/>	$x \in \left(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right)$	<input type="checkbox"/>	$x \in [-7, 7]$	<input type="checkbox"/>	$x \in (0, 1)$	<input type="checkbox"/>	$x \in [0, 1)$

Fehlerinterpretation:

<input type="checkbox"/>	$x \in (-7, 7)$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input checked="" type="checkbox"/>	$x = 0$	richtig
<input type="checkbox"/>	$x \in [-\frac{3}{4}, \frac{11}{4}]$	DF: Wirr geraten
<input type="checkbox"/>	$x \in [-1, 1)$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/>	$x \in \mathbf{R}$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input type="checkbox"/>	$x \in (-1, 1]$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/>	$x \in (-\frac{3}{4}, \frac{11}{4})$	DF: Wirr geraten
<input type="checkbox"/>	$x \in [-1, 1]$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/>	$x \in (-\frac{1}{7}, \frac{1}{7})$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input type="checkbox"/>	$x \in [-7, 7]$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input type="checkbox"/>	$x \in (0, 1)$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/>	$x \in [0, 1)$	DF: Lösung geraten

MV 04 Blatt 04 Kapitel 3.3 Konvergenzbereiche
Reihen Folgen Nummer: 48 0 2004040002 Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 4.1.4: Für welche $x \in \mathbf{R}$ konvergiert die Reihe:

$$\sum_{i=7}^{\infty} \frac{(3 \cdot x - 10)^i}{i^2} ?$$

Gesucht ist der maximale Bereich in dem die Reihe konvergiert.

Parameter:

$x_n = n - \text{te}$ Zahl in der Reihe ($n \in 1..3$) $x_n > 1$

Die Reihe lautet also: $\sum_{i=x_1}^{\infty} \frac{(x_2 \cdot x - x_3)^i}{i^2}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7$ $x_2 = 3$ $x_3 = 10$.

Erklärung:

Wir wenden das Quotientenkriterium an: $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q < 1 \Rightarrow a_n$ konvergent. Dazu substituieren wir zuerst $y = 3 \cdot x - 10$.

Rechnung:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\frac{y^{(n+1)}}{(n+1)^2}}{\frac{y^n}{n^2}} \right| \\ &= \left| \frac{y^{(n+1)} \cdot n^2}{y^n \cdot (n+1)^2} \right| \quad \text{weil } \frac{a}{a} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \\ &= \left| y \cdot \frac{n^2}{n^2 + 2 \cdot n + 1} \right| = \left| y \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \right| \quad y^n \text{ gekürzt} \\ &\rightarrow \left| y \cdot \frac{1}{1} \right| = |y| \end{aligned}$$

Also ist $|y \cdot \frac{n^2}{n^2 + 2 \cdot n + 1}| < q < 1$ (von einer Stelle an), wenn $|y| < q < 1$ ist, also wenn $y \in (-1, 1)$. Was gilt an den Rändern, also für $y = 1$ oder $y = -1$?

$$\begin{aligned} y = 1 : & \quad \sum_{i=7}^{\infty} \frac{1^i}{i^2} \\ &= \sum_{i=7}^{\infty} \frac{1}{i^2} \quad \text{konvergiert nach dem Integralkriterium} \\ y = -1 : & \quad \sum_{i=7}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i^2} \quad \text{konvergiert nach Leibnitz} \end{aligned}$$

Also konvergiert die Reihe für $y \in [-1, 1]$. Rücksubstitution:

$$\begin{aligned} y \in [-1, 1] &\Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq 3 \cdot x - 10 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -1 + 10 \leq 3 \cdot x \leq 1 + 10 \\ &\Leftrightarrow \frac{9}{3} \leq x \leq \frac{11}{3} \end{aligned}$$

Also konvergiert die Reihe für $x \in [3, \frac{11}{3}]$.

Angeborene Lösungen:

- | | | | |
|---|---|--|--|
| <input type="checkbox"/> 1 $x \in \mathbf{R}$ | <input type="checkbox"/> 2 $x \in [-1, 1)$ | <input type="checkbox"/> 3 $x \in (-1, 1]$ | <input type="checkbox"/> 4 $x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 5 $x \in [3, \frac{11}{3}]$ | <input type="checkbox"/> 6 $x = \frac{10}{3}$ | <input type="checkbox"/> 7 $x \in (-7, 7)$ | <input type="checkbox"/> 8 $x \in [-10, 10]$ |
| <input type="checkbox"/> 9 $x \in (-1, 1)$ | <input type="checkbox"/> 10 $x \in (-3, 3]$ | <input type="checkbox"/> 11 $x \in (-1, \frac{13}{7})$ | <input type="checkbox"/> 12 $x \in (3, \frac{11}{3})$ |

Fehlerinterpretation:

- | | |
|---|--------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 $x \in \mathbf{R}$ | DF: Quotientenkriterium falsch |
| <input type="checkbox"/> 2 $x \in [-1, 1)$ | DF: Substitution fehlt |
| <input type="checkbox"/> 3 $x \in (-1, 1]$ | DF: Substitution fehlt |
| <input type="checkbox"/> 4 $x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ | DF: Quotientenkriterium falsch |
| <input checked="" type="checkbox"/> 5 $x \in [3, \frac{11}{3}]$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 6 $x = \frac{10}{3}$ | DF: Quotientenkriterium falsch |
| <input type="checkbox"/> 7 $x \in (-7, 7)$ | DF: Quotientenkriterium falsch |
| <input type="checkbox"/> 8 $x \in [-10, 10]$ | DF: Quotientenkriterium falsch |
| <input type="checkbox"/> 9 $x \in (-1, 1)$ | DF: Substitution fehlt |
| <input type="checkbox"/> 10 $x \in (-3, 3]$ | DF: Quotientenkriterium falsch |
| <input type="checkbox"/> 11 $x \in (-1, \frac{13}{7})$ | DF: Wirr geraten |
| <input type="checkbox"/> 12 $x \in (3, \frac{11}{3})$ | DF: Ränder nicht untersucht |

MV 04 Blatt 04 Kapitel 3.3 Konvergenzbereiche
 Reihen Folgen Nummer: 72 0 2004040004 Kl: 14G
 Grad: 50 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 4.1.5: Für welche $x \in \mathbf{R}$ konvergiert die Reihe:

$$\sum_{i=6}^{\infty} \frac{(2 \cdot x)^{\frac{i}{4}}}{9} ?$$

Gesucht ist der maximale Bereich in dem die Reihe konvergiert.

Parameter:

$x_n = n$ -te Zahl in der Reihe ($n \in 1..4$) $x_n > 1$ x_3 gerade

Die Reihe lautet also: $\sum_{i=x_1}^{\infty} \frac{(x_2 \cdot x)^{\frac{i}{x_4}}}{x_3}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6$ $x_2 = 2$ $x_3 = 9$ $x_4 = 4$.

Erklärung:

Wir wenden das Quotientenkriterium an: $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q < 1 \Rightarrow a_n$ konvergent.

Rechnung:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\frac{(2 \cdot x)^{\frac{n+1}{4}}}{9}}{\frac{(2 \cdot x)^{\frac{n}{4}}}{9}} \right| \\ &= \left| \sqrt[4]{2 \cdot x} \right| \quad (2x)^n \text{ und } 9 \text{ gekürzt} \end{aligned}$$

Also ist $|\sqrt[4]{2 \cdot x}| < q < 1$ (von einer Stelle an), wenn $|x| < \frac{1}{2}$ ist. $\sqrt[4]{x}$ ist nur für $x \geq 0$ definiert. Was gilt an den Rändern, also für $x = 0$ oder $x = \frac{1}{2}$?

$$x = 0 : \quad \sum_{i=6}^{\infty} \frac{(2 \cdot 0)^{\frac{i}{4}}}{9} = 0 \quad \text{also konvergent}$$

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2} : \quad & \sum_{i=6}^{\infty} \frac{(2 \cdot \frac{1}{2})^{\frac{i}{4}}}{9} \\ &= \sum_{i=6}^{\infty} \frac{1^{\frac{i}{4}}}{9} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=6}^{\infty} 1 \rightarrow \infty \quad \text{divergent} \end{aligned}$$

Also konvergiert die Reihe für $x \in [0, \frac{1}{2})$.

Angebote Lösungen:

1 $x \in (-\frac{7}{4}, \frac{11}{4})$

2 $x \in [-1, 1]$

3 $x = 0$

4 $x \in (-1, 1]$

5 $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

6 $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

7 $x \in [0, \frac{1}{2})$

8 $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

9 $x = \frac{1}{2}$

10 $x \in (0, \frac{1}{2})$

11 $x \in \mathbf{R}$

12 $x \in [0, 1)$

Fehlerinterpretation:

1 $x \in (-\frac{7}{4}, \frac{11}{4})$

DF: Wirr geraten

2 $x \in [-1, 1]$

DF: Lösung geraten

3 $x = 0$

DF: Quotientenkriterium falsch

4 $x \in (-1, 1]$

DF: Lösung geraten

5 $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

DF: Wurzel nicht erkannt

6 $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

DF: Wurzel nicht erkannt

7 $x \in [0, \frac{1}{2})$

richtig

8 $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

DF: Wurzel nicht erkannt

9 $x = \frac{1}{2}$

DF: Quotientenkriterium falsch

10 $x \in (0, \frac{1}{2})$

DF: Ränder nicht untersucht

11 $x \in \mathbf{R}$

DF: Quotientenkriterium falsch

12 $x \in [0, 1)$

DF: Lösung geraten

MV 04

Blatt 04

Kapitel 3.3

Konvergenzbereiche

Reihen

Folgen

Nummer: 83 0 2004040001

Kl: 14G

Grad: 40 Zeit: 30

Quelle: keine W

Aufgabe 4.1.6: Für welche $x \in \mathbf{R}$ konvergiert die Reihe:

$$\sum_{i=9}^{\infty} \frac{x^i}{2 \cdot i + 5} ?$$

Gesucht ist der maximale Bereich in dem die Reihe konvergiert.

Parameter:

$x_n = n - te$ Zahl in der Reihe ($n \in 1..3$) $x_n > 1$

Die Reihe lautet also: $\sum_{i=x_1}^{\infty} \frac{x^i}{x_2 \cdot i + x_3}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 9$ $x_2 = 2$ $x_3 = 5$.

Erklärung:

Wir wenden das Quotientenkriterium an: $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q < 1 \Rightarrow a_n$ konvergent.

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\frac{x^{(n+1)}}{2 \cdot (n+1) + 5}}{\frac{x^n}{2 \cdot n + 5}} \right| \\
&= \left| \frac{x^{(n+1)} \cdot (2 \cdot n + 5)}{x^n \cdot (2 \cdot (n+1) + 5)} \right| \quad \text{weil } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \\
&= \left| x \cdot \frac{2 \cdot n + 5}{2 \cdot n + 7} \right| = \left| x \cdot \frac{2 + \frac{5}{n}}{2 + \frac{7}{n}} \right| \quad x^n \text{ gekürzt} \\
&\rightarrow \left| x \cdot \frac{2}{2} \right| = |x|
\end{aligned}$$

Also ist $|x \cdot \frac{2 \cdot n + 5}{2 \cdot n + 7}| < q < 1$ (von einer Stelle an), wenn $|x| < q < 1$ ist, also wenn $x \in (-1, 1)$. Was gilt an den Rändern, also für $x = 1$ oder $x = -1$?

$$\begin{aligned}
x = 1 : \quad & \sum_{i=9}^{\infty} \frac{1^i}{2 \cdot i + 5} \\
&= \sum_{i=9}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot i + 5} \rightarrow \infty \quad (\text{Integralkriterium}) \\
x = -1 : \quad & \sum_{i=9}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2 \cdot i + 5} \quad \text{konvergiert nach Leibnitz}
\end{aligned}$$

Also konvergiert die Reihe für $x \in [-1, 1)$.

Angebotene Lösungen:

<input type="checkbox"/> 1	$x \in [-5, 5)$	<input type="checkbox"/> 2	$x \in [-9, 9]$	<input type="checkbox"/> 3	$x \in (-2, 2)$	<input checked="" type="checkbox"/> 4	$x \in [-1, 1)$
<input type="checkbox"/> 5	$x \in [-1, 1]$	<input type="checkbox"/> 6	$x = 0$	<input type="checkbox"/> 7	$x \in (-2, 2]$	<input type="checkbox"/> 8	$x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
<input type="checkbox"/> 9	$x \in [-2, 2)$	<input type="checkbox"/> 10	$x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$	<input type="checkbox"/> 11	$x \in (-5, 5)$	<input type="checkbox"/> 12	$x \in [-5, 5]$

Fehlerinterpretation:

<input type="checkbox"/> 1	$x \in [-5, 5)$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input type="checkbox"/> 2	$x \in [-9, 9]$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input type="checkbox"/> 3	$x \in (-2, 2)$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input checked="" type="checkbox"/> 4	$x \in [-1, 1)$	richtig
<input type="checkbox"/> 5	$x \in [-1, 1]$	DF: Ränder falsch untersucht
<input type="checkbox"/> 6	$x = 0$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input type="checkbox"/> 7	$x \in (-2, 2]$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input type="checkbox"/> 8	$x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input type="checkbox"/> 9	$x \in [-2, 2)$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input type="checkbox"/> 10	$x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input type="checkbox"/> 11	$x \in (-5, 5)$	DF: Quotientenkriterium falsch
<input type="checkbox"/> 12	$x \in [-5, 5]$	DF: Quotientenkriterium falsch

Allgemeine Hinweise:

Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware@yahoo.de).

Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: <http://www.vorkurs.de.vu>