Blatt Nr 05.00

**Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 5**

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 05 | Kapitel 4.1 | Verschiebung |
| Keine | Funktionen | Nummer: 3 0 200405004 | Kl: 14G |
| Grad: 40 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 5.1.1:** Gegeben sei die Funktion $f(x) = (4x + 4)\ln(x - 3)$. Verschieben Sie die Funktion so, dass der Punkt $(7\ ,\ f(7))$ in den Punkt $(15\ ,\ 34\ln 4)$ verschoben wird.

**Parameter:**

$x_n = n-$ te Zahl in der Aufgabe $(n \in 1..6)$ $x_n > 1$, $x_5 > x_4 > x_3 > x_2$, $x_6 > x_1 \cdot x_4 + x_2$

Die Funktion lautet: $(x_1 \cdot x\ +\ x_2)\ln(x\ -\ x_3)$
Die Punkte sind $(x_4\ ,\ f(x_4))$ und $(x_5\ ,\ x_6 \cdot \ln\{x_4\ -\ x_3\})$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = 7 \quad x_5 = 15 \quad x_6 = 34$.

**Erklärung:**

Sei $y := f(x)$. Eine Verschiebung vom Punkt $(a, b)$ in den Punkt $(c, d)$ ist eine Verschiebung um den Vektor $(c - a, d - b)$.

**Rechnung:**

Damit ergibt sich für die Funktion: $y - (d - b) = f(x - (c - a))$ oder $y = f(x - c + a) + d - b$. $f(7) = (4 \cdot 7 + 4)\ln(7 - 3) = 32\ln 4$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_{\text{neu}}(x) &= f(x - (15 - 7)) + 34\ln 4 - 32\ln 4 \\ &= f(x - 8) + 2\ln 4 \\ &= (4(x - 8) + 4)\ln((x - 8) - 3) + 2\ln 4 \\ &= (4x - 28)\ln(x - 11) + 2\ln 4 \end{aligned}$$

**Angebotene Lösungen:**

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{1}$ $(4x - 84)\ln(x - 25) + 2\ln 10$ | $\boxed{2}$ $(4x - 84)\ln(x - 25) + 2\ln 4$ | $\boxed{3}$ $(4x - 84)\ln(x - 25) - 2\ln 10$ |
| $\boxed{4}$ $(4x - 84)\ln(x - 25) - 2\ln 4$ | $\boxed{5}$ $(4x + 28)\ln(x + 11) - 2\ln 4$ | $\boxed{6}$ $(4x + 28)\ln(x + 11) + 2\ln 4$ |
| $\boxed{7}$ $(4x + 84)\ln(x + 25) + 2\ln 10$ | $\boxed{8}$ $(4x + 84)\ln(x + 25) - 2\ln 4$ | $\boxed{9}$ $(4x + 84)\ln(x + 25) + 2\ln 4$ |
| $\boxed{10}$ $(4x - 28)\ln(x - 11) - 2\ln 4$ | $\boxed{\times}$ $(4x - 28)\ln(x - 11) + 2\ln 4$ | $\boxed{12}$ $(4x + 84)\ln(x + 25) - 2\ln 10$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{1}$ | $(4x - 84)\ln(x - 25) + 2\ln 10$ | DF: falsch verschoben |
| $\boxed{2}$ | $(4x - 84)\ln(x - 25) + 2\ln 4$ | DF: falsch verschoben |
| $\boxed{3}$ | $(4x - 84)\ln(x - 25) - 2\ln 10$ | DF: falsch verschoben |
| $\boxed{4}$ | $(4x - 84)\ln(x - 25) - 2\ln 4$ | DF: falsch verschoben |
| $\boxed{5}$ | $(4x + 28)\ln(x + 11) - 2\ln 4$ | DF: falsch verschoben |
| $\boxed{6}$ | $(4x + 28)\ln(x + 11) + 2\ln 4$ | DF: falsch verschoben |
| $\boxed{7}$ | $(4x + 84)\ln(x + 25) + 2\ln 10$ | DF: falsch verschoben |
| $\boxed{8}$ | $(4x + 84)\ln(x + 25) - 2\ln 4$ | DF: falsch verschoben |
| $\boxed{9}$ | $(4x + 84)\ln(x + 25) + 2\ln 4$ | DF: falsch verschoben |
| $\boxed{10}$ | $(4x - 28)\ln(x - 11) - 2\ln 4$ | DF: falsch verschoben |
| $\boxed{\times}$ | $(4x - 28)\ln(x - 11) + 2\ln 4$ | richtig |
| $\boxed{12}$ | $(4x + 84)\ln(x + 25) - 2\ln 10$ | DF: falsch verschoben |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 05 | Kapitel 4.1 | Umkehrfunktion |
| Injektivisierung | Funktionen | Nummer: 14 0 200405002 | Kl: 14G |
| Grad: 40 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 5.1.2:** Gegeben sei die Funktion f: $\mathbb{D} \to f(\mathbb{D}) = \mathbb{B} : f(x) = 7 \cdot \sin(\sqrt{17 \cdot x + 24}) + 6$ mit $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ maximal. Schränken Sie den Definitionsbereich der nicht injektiven, aber surjektiven (da der Wertebereich = Bildbereich) Funktion $f(x)$ so ein, dass die Funktion bijektiv (also injektiv und immer noch surjektiv) ist.

**Parameter:**

$x_n = n-$ te Zahl in der Funktion ($n \in 1..4$) $x_n > 1$

Die Funktion lautet also: $x_1 \cdot \sin(\sqrt{x_2 \cdot x\ +\ x_3})\ +\ x_4$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7 \quad x_2 = 17 \quad x_3 = 24 \quad x_4 = 6$.

**Erklärung:**

**Rechnung:**

$\sin(\sqrt{y})$ ist nicht definiert für $y < 0$. Also ist $7 \cdot \sin(\sqrt{17 \cdot x + 24}) + 6$ definiert für $17 \cdot x + 24 \geq 0$ und damit $x \geq -\frac{24}{17}$. Da der Wertebereich von $\sin y = [-1\ ,\ 1]$ ist, ist der Bildbereich von $7 \cdot \sin(\sqrt{17 \cdot x + 24}) + 6 = [6-7\ ,\ 6+7] = [-1\ ,\ 13]$. $\sin y$ ist injektiv (zum Beispiel) für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Weil die Wurzelfunktion monoton ist, kann der eingeschränkte Definitionsbereich durch Substitution ermittelt werden: $\sqrt{17 \cdot x + 24} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{24}{17}$ und $\sqrt{17 \cdot x + 24} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{(\frac{\pi}{2})^2 - 24}{17}$. Also ist der gesuchte Definitionsbereich $x \in [\frac{-24}{17}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-24}{17}]$.

**Angebotene Lösungen:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 $x \in [-\frac{24}{17}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-24}{17})$ | 2 $x \in [-1, 1]$ | 3 $x \in (-\frac{24}{17}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+24}{17})$ | ☒ $x \in [-\frac{24}{17}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-24}{17}]$ |
| 5 $x \in [\frac{24}{17}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-24}{17})$ | 6 $\emptyset$ | 7 $x \in (-1, 1]$ | 8 $x \in \mathbb{R}$ |
| 9 $x \in [-\frac{24}{17}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+24}{17}]$ | 10 $x = 0$ | 11 $x \in (\frac{24}{17}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+24}{17})$ | 12 $x \in (-\frac{24}{17}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-24}{17})$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | |
|---|---|
| 1 $x \in [-\frac{24}{17}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-24}{17})$ | DF: Ränder nicht beachtet |
| 2 $x \in [-1, 1]$ | DF: Lösung geraten |
| 3 $x \in (-\frac{24}{17}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+24}{17})$ | DF: falsch substituiert |
| ☒ $x \in [-\frac{24}{17}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-24}{17}]$ | richtig |
| 5 $x \in [\frac{24}{17}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-24}{17})$ | DF: falsch substituiert |
| 6 $\emptyset$ | DF: Lösung geraten |
| 7 $x \in (-1, 1]$ | DF: Lösung geraten |
| 8 $x \in \mathbb{R}$ | DF: Lösung geraten |
| 9 $x \in [-\frac{24}{17}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+24}{17}]$ | DF: falsch substituiert |
| 10 $x = 0$ | DF: Lösung geraten |
| 11 $x \in (\frac{24}{17}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+24}{17})$ | DF: falsch substituiert |
| 12 $x \in (-\frac{24}{17}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-24}{17})$ | DF: Ränder nicht beachtet |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 05 | Kapitel 4.1 | Umkehrfunktion |
| Keine | Funktionen | Nummer: 33 0 200405005 | Kl: 14G |
| Grad: 40 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 5.1.3:** Bestimmen Sie die Umkehrfunktion der (bijektiven) Funktion

$$f : \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^+ \qquad f(x) = 4(e^{(x-1)^2} - 1)$$

**Parameter:**

$x_n = n-$ te Zahl der Funktion ($n \in 1..2$) $x_n > 1$

Die Funktion lautet: $x_1(e^{(x\ -\ x_2)^2} - 1)$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 1$.

**Erklärung:**

Sei $y := f(x)$. Das Bilden der Umkehrfunktion bedeutet das Vertauschen von $x$ und $y$ und anschließend das Auflösen nach $y$.

**Rechnung:**

$y = 4(e^{(x-1)^2} - 1)$ wird zu $x = 4(e^{(y-1)^2} - 1)$.

$$\begin{array}{lllcl} f^{-1}(x) & : & x & = & 4(e^{(y-1)^2} - 1) \\ & \Leftrightarrow & \frac{x+4}{4} & = & e^{(y-1)^2} \\ & \Leftrightarrow & \ln(\frac{x+4}{4}) & = & (y-1)^2 \\ & \Leftrightarrow & \pm\sqrt{\ln(\frac{x+4}{4})} & = & y-1 \\ & \Leftrightarrow & \pm\sqrt{\ln(\frac{x+4}{4})}\ +1 & = & y \end{array}$$

Weil der Definitionsbereich von $f(x)$ $\mathbb{R}_0^-$ ist, muss hier der negative Teil der Wurzel als Umkehrfunktion gewählt werden. Verifikation durch eine Punktprobe: $f(-1) = 4(e^{((-1)-1)^2} - 1) = 4e^4 - 4$. Also muss $f^{-1}(4e^4 - 4) = -1$ sein:

$$\begin{array}{lcl} f^{-1}(4e^4-4) & = & -\sqrt{\ln(\frac{(4e^4-4)+4}{4})}\ +1 \\ & = & -\sqrt{\ln(\frac{4e^4}{4})}\ +1 \\ & = & -\sqrt{\ln(e^4)}\ +1 \\ & = & -\sqrt{4}\ +1 \\ & = & -|2|\ +1 \\ & = & -1 \end{array}$$

**Angebotene Lösungen:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 $-\sqrt{\ln(\frac{x+1}{1})}+4$ | 2 $\sqrt{\ln(\frac{x+1}{1})}+4$ | 3 $-\sqrt{\ln(\frac{x-4}{4})}-1$ |
| 4 $\sqrt{\ln(\frac{x-1}{1})}-4$ | 5 $\sqrt{\ln(\frac{x-4}{4})}+1$ | 6 $\ln(\sqrt{\frac{x+4}{4}}\ )+1$ |
| 7 $\ln(\sqrt{\frac{x-4}{4}}\ )+1$ | 8 $-\sqrt{\ln(\frac{x-4}{4})}+1$ | 9 $-\ln(\sqrt{\frac{x+4}{4}}\ )+1$ |
| 10 $-\ln(\sqrt{\frac{x-4}{4}}\ )-1$ | ☒ $-\sqrt{\ln(\frac{x+4}{4})}+1$ | 12 $\sqrt{\ln(\frac{x-4}{4})}-1$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $-\sqrt{\ln(\frac{x+1}{1})}+4$ | DF: falsche Reihenfolge |
| 2 | $\sqrt{\ln(\frac{x+1}{1})}+4$ | DF: falsches Vorzeichen gewählt |
| 3 | $-\sqrt{\ln(\frac{x-4}{4})}-1$ | RF: falsch umgeformt |
| 4 | $\sqrt{\ln(\frac{x-1}{1})}-4$ | DF: falsches Vorzeichen gewählt |
| 5 | $\sqrt{\ln(\frac{x-4}{4})}+1$ | RF: falsch umgeformt |
| 6 | $\ln(\sqrt{\frac{x+4}{4}}\ )+1$ | DF: falsche Reihenfolge |
| 7 | $\ln(\sqrt{\frac{x-4}{4}}\ )+1$ | DF: falsche Reihenfolge |
| 8 | $-\sqrt{\ln(\frac{x-4}{4})}+1$ | RF: falsch umgeformt |
| 9 | $-\ln(\sqrt{\frac{x+4}{4}}\ )+1$ | DF: falsche Reihenfolge |
| 10 | $-\ln(\sqrt{\frac{x-4}{4}}\ )-1$ | DF: falsche Reihenfolge |
| ☒ | $-\sqrt{\ln(\frac{x+4}{4})}+1$ | richtig |
| 12 | $\sqrt{\ln(\frac{x-4}{4})}-1$ | RF: falsch umgeformt |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 05 | Kapitel 4.1 | Symmetrie |
| Achsensymmetrie | Funktionen | Nummer: 35 0 200405007 | Kl: 14G |
| Grad: 40 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 5.1.4:** Zu welchem Punkt bzw. zu welcher Achse ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{4\sin(2x-2)}{\sqrt[3]{3x-3}} + 2$$

(AS) = achsensymmetrisch − (PS) = punktsymmetrisch.

**Parameter:**

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe ($n \in 1..5$) $x_n > 1$
$x = x_3$ ist die Symmetrieachse

Die Funktion lautet: $\frac{x_1 \cdot \sin(x_2 \cdot x - \{x_3 \cdot x_2\})}{\sqrt[3]{x_4 \cdot x - \{x_3 \cdot x_4\}}} + x_5$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 3 \quad x_5 = 2.$

**Erklärung:**

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(a, b) \Leftrightarrow f(a - x) + f(a + x) = 2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x = a \Leftrightarrow f(a - x) = f(a + x)$.

**Rechnung:**

$$f(x) = \frac{4\sin(2x-2)}{\sqrt[3]{3x-3}} + 2 = \frac{4\sin(2(x-1))}{\sqrt[3]{3(x-1)}} + 2$$

Damit wird die Symmetrie zur Achse $x = 1$ vermutet:

$$\begin{aligned} f(1-x) &= \frac{4\sin(2((1-x)-1))}{\sqrt[3]{3((1-x)-1)}} + 2 \\ &= \frac{4\sin(-2x)}{\sqrt[3]{-3x}} + 2 \\ &= \frac{-4\sin(2x)}{-\sqrt[3]{3x}} + 2 \\ &= \frac{4\sin(2x)}{\sqrt[3]{3x}} + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1+x) &= \frac{4\sin(2((1+x)-1))}{\sqrt[3]{3((1+x)-1)}} + 2 \\ &= \frac{4\sin(2x)}{\sqrt[3]{3x}} + 2 = f(1-x) \end{aligned}$$

Damit ist die Symmetrie zur Achse $x = 1$ gezeigt.

**Angebotene Lösungen:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 AS $x = 2$ | 2 PS $(-1, -4)$ | 3 PS $(-1, -2)$ | ☒ AS $x = 1$ |
| 5 PS $(1, -2)$ | 6 PS $(1, 4)$ | 7 AS $x = -2$ | 8 PS $(0, 0)$ |
| 9 nicht symmetrisch | 10 PS $(1, 2)$ | 11 PS $(-1, 2)$ | 12 AS $x = -1$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | AS $x = 2$ | DF: geraten |
| 2 | PS $(-1, -4)$ | DF: AS nicht erkannt |
| 3 | PS $(-1, -2)$ | DF: AS nicht erkannt |
| ☒ | AS $x = 1$ | richtig |
| 5 | PS $(1, -2)$ | DF: AS nicht erkannt |
| 6 | PS $(1, 4)$ | DF: AS nicht erkannt |
| 7 | AS $x = -2$ | DF: geraten |
| 8 | PS $(0, 0)$ | DF: geraten |
| 9 | nicht symmetrisch | DF: AS nicht erkannt |
| 10 | PS $(1, 2)$ | DF: AS nicht erkannt |
| 11 | PS $(-1, 2)$ | DF: AS nicht erkannt |
| 12 | AS $x = -1$ | RF: falsches Vorzeichen |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 05 | Kapitel 4.1 | Umkehrfunktion |
| Injektivisierung | Funktionen | Nummer: 54 0 2004050001 | Kl: 14G |
| Grad: 40 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 5.1.5:** Gegeben sei die Funktion f: $\mathbb{D} \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{\tan(2 \cdot x+6)}{11}$ mit $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ maximal. Schränken Sie den Definitionsbereich der nicht injektiven, aber surjektiven Funktion $f(x)$ so ein, dass die Funktion bijektiv (also injektiv und immer noch surjektiv) ist.

**Parameter:**

$x_n = n-$ te Zahl in der Funktion ($n \in 1..3$), $x_n > 1$, $x_2$ ist Vielfaches von $x_1$

Die Funktion lautet also: $\frac{\tan(x_1 \cdot x + x_2)}{x_3}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \qquad x_2 = 6 \qquad x_3 = 11$.

**Erklärung:**

$\tan x$ ist zwischen zwei senkrechten Asymptoten streng monoton wachsend. Finden Sie zwei benachbarte Asymptoten durch Substitution von $y = 2 \cdot x + 6$.

**Rechnung:**

$\tan y$ ist nicht definiert für $y = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$). Damit ist $\tan(2 \cdot x + 6)$ nicht definiert für $x = \frac{(2k+1)\pi}{2 \cdot 2} - \frac{6}{2}$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$). Damit ist $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{(2k+1)\pi}{4} - 3; k \in \mathbb{Z}\}$. $\tan y$ ist zwischen zwei benachbarten senkrechten Asymptoten streng monoton. $f(y) \to -\infty$, wenn $y$ gegen die linke Asymptote geht und $f(y) \to \infty$, wenn $y$ gegen die rechte Asymptote geht. Nach dem Zwischenwertsatz ist dann $f(x)$ zwischen zwei benachbarten senkrechten Asymptoten bijektiv.

$$\text{Also zum Beispiel } y \in (\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \text{ oder } x \in (\frac{-\pi}{4} - 3, \frac{\pi}{4} - 3) \qquad k = -1 \text{ und } k = 0$$

**Angebotene Lösungen:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 $x \in [-4 \cdot \pi - 3, 4 \cdot \pi - 3)$ | 2 $x \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ | 3 $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ |
| 4 $x \in (\frac{-\pi}{4} - 3, \frac{\pi}{4} + 3]$ | 5 $x \in (\frac{-\pi}{4} - 3, \frac{\pi}{4} + 3)$ | 6 $x \in \mathbb{R}$ |
| 7 $x \in [-1, 1]$ | 8 $x \in (\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ | 9 $\emptyset$ |
| ☒ $x \in (\frac{-\pi}{4} - 3, \frac{\pi}{4} - 3)$ | 11 $x \in (-1, 1]$ | 12 $x \in [\frac{-\pi}{4} - 3, \frac{\pi}{4} - 3)$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | |
|---|---|
| 1 $x \in [-4 \cdot \pi - 3, 4 \cdot \pi - 3)$ | DF: falsch substituiert |
| 2 $x \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ | DF: nicht substituiert |
| 3 $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ | DF: nicht substituiert |
| 4 $x \in (\frac{-\pi}{4} - 3, \frac{\pi}{4} + 3]$ | RF: falsch substituiert |
| 5 $x \in (\frac{-\pi}{4} - 3, \frac{\pi}{4} + 3)$ | RF: falsch substituiert |
| 6 $x \in \mathbb{R}$ | DF: Lösung geraten |
| 7 $x \in [-1, 1]$ | DF: Lösung geraten |
| 8 $x \in (\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ | DF: falsch substituiert |
| 9 $\emptyset$ | DF: Lösung geraten |
| ☒ $x \in (\frac{-\pi}{4} - 3, \frac{\pi}{4} - 3)$ | richtig |
| 11 $x \in (-1, 1]$ | DF: Lösung geraten |
| 12 $x \in [\frac{-\pi}{4} - 3, \frac{\pi}{4} - 3)$ | DF: Ränder nicht beachtet |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 05 | Kapitel 4.1 | Symmetrie |
| Punktsymmetrie | Funktionen | Nummer: 62 0 2004050008 | Kl: 14G |
| Grad: 40 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 5.1.6:** Zu welchen Punkten bzw. zu welchen Achsen ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \qquad f(x) \quad = \quad \frac{3}{\tan(2x)} + 5 \qquad \mathbb{D} \text{ maximal}$$

(AS) = achsensymmetrisch − (PS) = punktsymmetrisch − bei der Lösung sei $k$ eine beliebige ganze Zahl.

**Parameter:**

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe ($n \in 1..3$), $x_1 \neq x_2$, $x_n > 1$.

Die Funktion lautet: $\frac{x_1}{\tan(x_2\, x)} + x_3$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 5$.

**Erklärung:**

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(a, b) \Leftrightarrow f(a-x) + f(a+x) = 2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x = a \Leftrightarrow f(a-x) = f(a+x)$. $\tan x$ ist zu jedem 'Nulldurchgang' punktsymmetrisch.

**Rechnung:**

$f(x) \;=\; \frac{3}{\tan(2x)} + 5 \;=\; \frac{3\cos(2x)}{\sin(2x)} + 5.$
$f(x)$ hat für $2x = k\pi \;\Leftrightarrow\; x = \frac{k}{2\pi}$ senkrechte Asymptoten.
$3\cos(2x) \;=\; 0$ für $2x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$
$((2k+1)\frac{\pi}{4}, 5)$ sind die Kandidaten für Symmetriepunkte $-$ $a = (2k+1)\frac{\pi}{4}$ , $b = 5$.

$$\begin{aligned}
f(a+x) &= \frac{3\cos(2((2k+1)\frac{\pi}{4}+x))}{\sin(2((2k+1)\frac{\pi}{4}+x))} + 5 \\
&= 3\frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2}+2x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}+2x)} + 5 \\
&= 3\frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(2x) - \sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(2x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(2x) + \cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(2x)} + 5 && \text{Additionstheoreme} \\
&= 3\frac{-\sin(2x)}{\cos(2x)} + 5 && \sin((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = 1 \quad \cos((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(a-x) &= \frac{3\cos(2((2k+1)\frac{\pi}{4}-x))}{\sin(2((2k+1)\frac{\pi}{4}-x))} + 5 \\
&= 3\frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2}-2x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}-2x)} + 5 \\
&= 3\frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(2x) + \sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(2x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(2x) - \cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(2x)} + 5 && \text{Additionstheoreme} \\
&= 3\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} + 5 && \sin((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = 1 \quad \cos((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = 0
\end{aligned}$$

Damit ist $f(a+x) + f(a-x) \;=\; 3\frac{-\sin(2x)}{\cos(2x)} + 5 + 3\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} + 5 \;=\; 2 \cdot 5$.
Dies war zu zeigen. Hausaufgabe: Zeigen Sie, dass es keine weiteren Symmetrien gibt.

**Angebotene Lösungen:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| [1] PS $(k \cdot \pi, 5)$ | [2] PS $((2k+1)\frac{\pi}{4}, 0)$ | [3] AS $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ | [4] PS $((2k+1)\frac{\pi}{2}, 5)$ |
| [5] PS $(\frac{k\cdot\pi}{2}, 5)$ | [6] PS $(\frac{k\cdot\pi}{2}, 0)$ | [7] AS $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$ | [8] AS $x = 3 \cdot \frac{k\pi}{2}$ |
| [9] AS $x = k\pi$ | [X] PS $((2k+1)\frac{\pi}{4}, 5)$ | [11] PS $(\frac{k\cdot\pi}{2}, 10)$ | [12] AS $x = 3 \cdot (2k+1)\frac{\pi}{4}$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | |
|---|---|
| [1] PS $(k \cdot \pi, 5)$ | DF: Periode ignoriert |
| [2] PS $((2k+1)\frac{\pi}{4}, 0)$ | DF: $y-$ Wert falsch |
| [3] AS $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ | DF: Periode ignoriert |
| [4] PS $((2k+1)\frac{\pi}{2}, 5)$ | DF: Periode ignoriert |
| [5] PS $(\frac{k\cdot\pi}{2}, 5)$ | DF: Symmetriepunkte des Tangens |
| [6] PS $(\frac{k\cdot\pi}{2}, 0)$ | DF: $y-$ Wert falsch |
| [7] AS $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$ | DF: $f$ ist PS |
| [8] AS $x = 3 \cdot \frac{k\pi}{2}$ | DF: $f$ ist PS |
| [9] AS $x = k\pi$ | DF: Periode ignoriert |
| [X] PS $((2k+1)\frac{\pi}{4}, 5)$ | richtig |
| [11] PS $(\frac{k\cdot\pi}{2}, 10)$ | DF: $y-$ Wert falsch |
| [12] AS $x = 3 \cdot (2k+1)\frac{\pi}{4}$ | DF: $f$ ist PS |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 05 | Kapitel 4.1 | Symmetrie |
| Punktsymmetrie | Funktionen | Nummer: 64 0 200405006 | Kl: 14G |
| Grad: 40 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 5.1.7:** Zu welchem Punkt bzw. zu welcher Achse ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{3x - 12}{8x^2 - 48x + 136} + 3$$

(AS) = achsensymmetrisch − (PS) = punktsymmetrisch.

**Parameter:**

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe ($n \in 1..4$) $x_n > 1$
$(x_2, x_4)$ ist der Symmetriepunkt

Die Funktion lautet: $\frac{x_1\ x - \{x_1 \cdot x_2\}}{x_3 x^2\ -\ \{2 \cdot x_3 \cdot 3\} x + \{x_3 \cdot (x_1^2 + 1)\}}\ +\ x_4$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \qquad x_2 = 4 \qquad x_3 = 8 \qquad x_4 = 3$.

**Erklärung:**

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(a, b) \Leftrightarrow f(a - x) + f(a + x) = 2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x = a \Leftrightarrow f(a - x) = f(a + x)$.

**Rechnung:**

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x-12}{8x^2-64x+136} + 3 \\ &= \frac{3(x-4)}{8(x^2-8x+16+1)} + 3 \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{x-4}{(x-4)^2+1} + 3 \end{aligned}$$

Damit wird eine Symmetrie zum Punkt $(4, ?)$ vermutet:

$$\begin{aligned} f(4-x) + f(4+x) &= \frac{3}{8} \cdot \frac{(4-x)-4}{((4-x)-4)^2+1} + 3 + \frac{3}{8} \cdot \frac{(4+x)-4}{((4+x)-4)^2+1} + 3 \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{-x}{(-x)^2+1} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x}{x^2+1} + 6 \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{x-x}{x^2+1} + 6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Damit ist $b = 3$ und die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt $(4\,,\,3)$.

**Angebotene Lösungen:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 PS $(4, -3)$ | 2 AS $x = -\frac{3}{8}$ | ☒ PS $(4, 3)$ | 4 AS $x = 3$ |
| 5 AS $x = -3$ | 6 PS $(0, 0)$ | 7 PS $(-3, -4)$ | 8 AS $x = -4$ |
| 9 AS $x = 0$ | 10 PS $(3, 4)$ | 11 AS $x = 4$ | 12 AS $x = \frac{3}{8}$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | PS $(4, -3)$ | RF: falsches Vorzeichen |
| 2 | AS $x = -\frac{3}{8}$ | DF: geraten |
| ☒ | PS $(4, 3)$ | richtig |
| 4 | AS $x = 3$ | DF: PS nicht erkannt |
| 5 | AS $x = -3$ | DF: PS nicht erkannt |
| 6 | PS $(0, 0)$ | DF: geraten |
| 7 | PS $(-3, -4)$ | DF: Koordinaten vertauscht |
| 8 | AS $x = -4$ | DF: PS nicht erkannt |
| 9 | AS $x = 0$ | DF: geraten |
| 10 | PS $(3, 4)$ | DF: Koordinaten vertauscht |
| 11 | AS $x = 4$ | DF: PS nicht erkannt |
| 12 | AS $x = \frac{3}{8}$ | DF: geraten |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 05 | Kapitel 4.1 | Verschiebung |
| Keine | Funktionen | Nummer: 90 0 200405003 | Kl: 14G |
| Grad: 40 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 5.1.8:** Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt[6]{4x-5} \cdot \sin(2x+3)$. Wie lautet die Gleichung der Funktion, die um 9 nach rechts und um 5 nach oben verschoben wurde?

**Parameter:**

$x_n = n-$ te Zahl in der Aufgabe ($n \in 1..7$) $x_n > 1$, $x_5 < x_6$

Die Funktion lautet: $\sqrt[x_1]{x_2 \cdot x\ -\ x_3} \cdot \sin(x_4 \cdot x\ +\ x_5)$
Der Verschiebungsvektor ist $(x_6\ ,\ x_7)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 2 \quad x_5 = 3 \quad x_6 = 9 \quad x_7 = 5.$

**Erklärung:**

Sei $y := f(x)$. Eine Funktionsverschiebung um $(a, b)$ wirkt sich so aus, dass $a$ direkt von $x$ und $b$ direkt von $y$ subtrahiert werden muss. $y - b = f(x - a)$ oder $y = f(x - a) + b$.

**Rechnung:**

Damit ergibt sich:

$$f_{\text{neu}}\ (x) \quad = \quad f(x-9)+5 \quad = \quad \sqrt[6]{4(x-9)-5} \cdot \sin(2(x-9)+3)+5 \quad = \quad \sqrt[6]{4x-41} \cdot \sin(2x-21)+5$$

**Angebotene Lösungen:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\sqrt[6]{36-5} \cdot \sin(18x+3)-5$ | 2 | $\sqrt[15]{4x-5} \cdot \sin(2x+3)+5$ | 3 | $\frac{x-9}{\sqrt[6]{4x-5} \cdot \sin(2x+3)}-5$ |
| 4 | $\sqrt[6]{4x+31} \cdot \sin(2x-15)-5$ | 5 | $\sqrt[6]{36x-5} \cdot \sin(18x+3)+5$ | 6 | $\sqrt[6]{4x+41} \cdot \sin(2x+21)+5$ |
| 7 | $\frac{1}{\sqrt[6]{4x-41} \cdot \sin(2x-21)+5}$ | 8 | $\frac{x-9}{\sqrt[6]{4x-5} \cdot \sin(2x+3)}+5$ | 9 | $\sqrt[15]{4x-5} \cdot \sin(2x+3)-5$ |
| 10 | $\sqrt[6]{4x+41} \cdot \sin(2x+21)-5$ | ☒ | $\sqrt[6]{4x-41} \cdot \sin(2x-21)+5$ | 12 | $\sqrt[6]{4x+31} \cdot \sin(2x-15)+5$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\sqrt[6]{36-5} \cdot \sin(18x+3)-5$ | RF: multipliziert statt subtrahiert |
| 2 | $\sqrt[15]{4x-5} \cdot \sin(2x+3)+5$ | DF: mit Wurzel verknüpft |
| 3 | $\frac{x-9}{\sqrt[6]{4x-5} \cdot \sin(2x+3)}-5$ | DF: mit UKF verwechselt |
| 4 | $\sqrt[6]{4x+31} \cdot \sin(2x-15)-5$ | RF: addiert statt subtrahiert |
| 5 | $\sqrt[6]{36x-5} \cdot \sin(18x+3)+5$ | RF: multipliziert statt subtrahiert |
| 6 | $\sqrt[6]{4x+41} \cdot \sin(2x+21)+5$ | RF: addiert statt subtrahiert |
| 7 | $\frac{1}{\sqrt[6]{4x-41} \cdot \sin(2x-21)+5}$ | DF: mit UKF verwechselt |
| 8 | $\frac{x-9}{\sqrt[6]{4x-5} \cdot \sin(2x+3)}+5$ | DF: mit UKF verwechselt |
| 9 | $\sqrt[15]{4x-5} \cdot \sin(2x+3)-5$ | DF: mit Wurzel verknüpft |
| 10 | $\sqrt[6]{4x+41} \cdot \sin(2x+21)-5$ | RF: addiert statt subtrahiert |
| ☒ | $\sqrt[6]{4x-41} \cdot \sin(2x-21)+5$ | richtig |
| 12 | $\sqrt[6]{4x+31} \cdot \sin(2x-15)+5$ | RF: addiert statt subtrahiert |

**Allgemeine Hinweise:**
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de ).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu