Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 5

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Umkehrfunktion
Keine	Funktionen	Nummer: 17 0 200405005	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.1: Bestimmen Sie die Umkehrfunktion der (bijektiven) Funktion

$$f : \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^+ \qquad f(x) = 3(e^{(x-4)^2} - 1)$$

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Funktion $(n \in 1..2)$ $x_n > 1$

Die Funktion lautet: $x_1(e^{(x\ -\ x_2)^2} - 1)$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \qquad x_2 = 4$.

Erklärung:

Sei $y := f(x)$. Das Bilden der Umkehrfunktion bedeutet das Vertauschen von x und y und anschließend das Auflösen nach y.

Rechnung:

$y = 3(e^{(x-4)^2} - 1)$ wird zu $x = 3(e^{(y-4)^2} - 1)$.

$$\begin{array}{rlcl}
f^{-1}(x) & : & x & = & 3(e^{(y-4)^2} - 1) \\
 & \Leftrightarrow & \frac{x+3}{3} & = & e^{(y-4)^2} \\
 & \Leftrightarrow & \ln(\frac{x+3}{3}) & = & (y-4)^2 \\
 & \Leftrightarrow & \pm\sqrt{\ln(\frac{x+3}{3})} & = & y-4 \\
 & \Leftrightarrow & \pm\sqrt{\ln(\frac{x+3}{3})}\ +4 & = & y
\end{array}$$

Weil der Definitionsbereich von $f(x)$ $\mathbb{R}_0^-$ ist, muss hier der negative Teil der Wurzel als Umkehrfunktion gewählt werden. Verifikation durch eine Punktprobe: $f(-1) = 3(e^{((-1)-4)^2} - 1) = 3e^{25} - 3$. Also muss $f^{-1}(3e^{25} - 3) = -1$ sein:

$$\begin{array}{rcl}
f^{-1}(3e^{25} - 3) & = & -\sqrt{\ln(\frac{(3e^{25}-3)+3}{3})}\ +4 \\
 & = & -\sqrt{\ln(\frac{3e^{25}}{3})}\ +4 \\
 & = & -\sqrt{\ln(e^{25})}\ +4 \\
 & = & -\sqrt{25}\ +4 \\
 & = & -|5|\ +4 \\
 & = & -1
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $-\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})} + 4$	2 $\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})} - 4$	☒ $-\sqrt{\ln(\frac{x+3}{3})} + 4$
4 $\sqrt{\ln(\frac{x-4}{4})} - 3$	5 $-\sqrt{\ln(\frac{x+4}{4})} + 3$	6 $\sqrt{\ln(\frac{x+4}{4})} + 3$
7 $-\ln(\sqrt{\frac{x-3}{3}}\ ) - 4$	8 $\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})} + 4$	9 $-\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})} - 4$
10 $-\ln(\sqrt{\frac{x+3}{3}}\ ) + 4$	11 $-\sqrt{\ln(\frac{x-4}{4})} - 3$	12 $\sqrt{\ln(\frac{x+3}{3})} + 4$

Fehlerinterpretation:

- [ ] 1 $-\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})}+4$ — RF: falsch umgeformt
- [ ] 2 $\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})}-4$ — RF: falsch umgeformt
- [x] $-\sqrt{\ln(\frac{x+3}{3})}+4$ — richtig
- [ ] 4 $\sqrt{\ln(\frac{x-4}{4})}-3$ — DF: falsches Vorzeichen gewählt
- [ ] 5 $-\sqrt{\ln(\frac{x+4}{4})}+3$ — DF: falsche Reihenfolge
- [ ] 6 $\sqrt{\ln(\frac{x+4}{4})}+3$ — DF: falsches Vorzeichen gewählt
- [ ] 7 $-\ln(\sqrt{\frac{x-3}{3}}\ )-4$ — DF: falsche Reihenfolge
- [ ] 8 $\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})}+4$ — RF: falsch umgeformt
- [ ] 9 $-\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})}-4$ — RF: falsch umgeformt
- [ ] 10 $-\ln(\sqrt{\frac{x+3}{3}}\ )+4$ — DF: falsche Reihenfolge
- [ ] 11 $-\sqrt{\ln(\frac{x-4}{4})}-3$ — DF: falsche Reihenfolge
- [ ] 12 $\sqrt{\ln(\frac{x+3}{3})}+4$ — DF: falsches Vorzeichen gewählt

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Symmetrie
Punktsymmetrie	Funktionen	Nummer: 22 0 200405006	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.2: Zu welchem Punkt bzw. zu welcher Achse ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad f(x)=\frac{2x-2}{7x^2-28x+14}+5$$

(AS) = achsensymmetrisch − (PS) = punktsymmetrisch.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe ($n \in 1..4$) $x_n > 1$
(x_2, x_4) ist der Symmetriepunkt

Die Funktion lautet: $\frac{x_1\ x-\{x_1\cdot x_2\}}{x_3x^2\ -\ \{2\cdot x_3\cdot 2\}x+\{x_3\cdot(x_1^2+1)\}}\ +\ x_4$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 7 \quad x_4 = 5$.

Erklärung:

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(a,b) \Leftrightarrow f(a-x)+f(a+x)=2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x=a \Leftrightarrow f(a-x)=f(a+x)$.

Rechnung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{2x-2}{7x^2-14x+14}+5 \\ &= \tfrac{2(x-1)}{7(x^2-2x+1+1)}+5 \\ &= \tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{x-1}{(x-1)^2+1}+5 \end{aligned}$$

Damit wird eine Symmetrie zum Punkt $(1,?)$ vermutet:

$$\begin{aligned} f(1-x)+f(1+x) &= \tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{(1-x)-1}{((1-x)-1)^2+1}+5+\tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{(1+x)-1}{((1+x)-1)^2+1}+5 \\ &= \tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{-x}{(-x)^2+1}+\tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{x}{x^2+1}+10 \\ &= \tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{x-x}{x^2+1}+10 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Damit ist $b=5$ und die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt $(1\ ,\ 5)$.

Angebotene Lösungen:

1 AS $x=-\frac{2}{7}$	2 PS $(-1,-5)$	3 PS $(-5,-1)$	4 AS $x=0$
5 AS $x=\frac{2}{7}$	6 AS $x=1$	7 AS $x=-1$	☒ PS $(1,5)$
9 PS $(0,0)$	10 nicht symmetrisch	11 PS $(5,1)$	12 AS $x=5$

Fehlerinterpretation:

1 AS $x=-\frac{2}{7}$	DF: geraten
2 PS $(-1,-5)$	RF: falsches Vorzeichen
3 PS $(-5,-1)$	DF: Koordinaten vertauscht
4 AS $x=0$	DF: geraten
5 AS $x=\frac{2}{7}$	DF: geraten
6 AS $x=1$	DF: PS nicht erkannt
7 AS $x=-1$	DF: PS nicht erkannt
☒ PS $(1,5)$	richtig
9 PS $(0,0)$	DF: geraten
10 nicht symmetrisch	DF: PS nicht erkannt
11 PS $(5,1)$	DF: Koordinaten vertauscht
12 AS $x=5$	DF: PS nicht erkannt

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Umkehrfunktion
Injektivisierung	Funktionen	Nummer: 30 0 2004050001	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.3: Gegeben sei die Funktion f: $\mathbb{D} \to \mathbb{R}$: $f(x) = \frac{\tan(5\cdot x+25)}{29}$ mit $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ maximal. Schränken Sie den Definitionsbereich der nicht injektiven, aber surjektiven Funktion $f(x)$ so ein, dass die Funktion bijektiv (also injektiv und immer noch surjektiv) ist.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Funktion ($n \in 1..3$), $x_n > 1$, x_2 ist Vielfaches von x_1

Die Funktion lautet also: $\frac{\tan(x_1\cdot x + x_2)}{x_3}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 25 \quad x_3 = 29$.

Erklärung:

$\tan x$ ist zwischen zwei senkrechten Asymptoten streng monoton wachsend. Finden Sie zwei benachbarte Asymptoten durch Substitution von $y = 5\cdot x + 25$.

Rechnung:

$\tan y$ ist nicht definiert für $y = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$). Damit ist $\tan(5\cdot x+25)$ nicht definiert für $x = \frac{(2k+1)\pi}{2\cdot 5} - \frac{25}{5}$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$). Damit ist $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{(2k+1)\pi}{10} - 5; k \in \mathbb{Z}\}$. $\tan y$ ist zwischen zwei benachbarten senkrechten Asymptoten streng monoton. $f(y) \to -\infty$, wenn y gegen die linke Asymptote geht und $f(y) \to \infty$, wenn y gegen die rechte Asymptote geht. Nach dem Zwischenwertsatz ist dann $f(x)$ zwischen zwei benachbarten senkrechten Asymptoten bijektiv.

$$\text{Also zum Beispiel } y \in (\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \text{ oder } x \in (\frac{-\pi}{10} - 5, \frac{\pi}{10} - 5) \qquad k=-1 \text{ und } k=0$$

Angebotene Lösungen:

1 $x \in (\frac{-\pi}{10}+5, \frac{\pi}{10}+5)$	2 $x \in (-1,1]$	☒ $x \in (\frac{-\pi}{10}-5, \frac{\pi}{10}-5)$
4 $x \in [-1,1]$	5 $x \in (-10\cdot\pi+5, 10\cdot\pi+5]$	6 $x \in (\frac{-\pi}{10}-5, \frac{\pi}{10}+5)$
7 $x \in [\frac{-\pi}{10}+5, \frac{\pi}{10}+5]$	8 $x = 0$	9 $x \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
10 $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	11 $x \in (\frac{-\pi}{10}, \frac{\pi}{10}]$	12 $x \in \mathbb{R}$

Fehlerinterpretation:

1	$x \in (\frac{-\pi}{10}+5, \frac{\pi}{10}+5)$	DF: falsch substituiert
2	$x \in (-1, 1]$	DF: Lösung geraten
☒	$x \in (\frac{-\pi}{10}-5, \frac{\pi}{10}-5)$	richtig
4	$x \in [-1, 1]$	DF: Lösung geraten
5	$x \in (-10\cdot\pi+5, 10\cdot\pi+5]$	DF: falsch substituiert
6	$x \in (\frac{-\pi}{10}-5, \frac{\pi}{10}+5)$	RF: falsch substituiert
7	$x \in [\frac{-\pi}{10}+5, \frac{\pi}{10}+5]$	DF: falsch substituiert
8	$x = 0$	DF: Lösung geraten
9	$x \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	DF: nicht substituiert
10	$x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	DF: nicht substituiert
11	$x \in (\frac{-\pi}{10}, \frac{\pi}{10}]$	DF: falsch substituiert
12	$x \in \mathbb{R}$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Symmetrie
Punktsymmetrie	Funktionen	Nummer: 32 0 2004050008	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.4: Zu welchen Punkten bzw. zu welchen Achsen ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \qquad f(x) \quad = \quad \frac{3}{\tan(5x)} + 4 \qquad \mathbb{D} \text{ maximal}$$

(AS) = achsensymmetrisch − (PS) = punktsymmetrisch − bei der Lösung sei k eine beliebige ganze Zahl.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe ($n \in 1..3$), $x_1 \neq x_2$, $x_n > 1$.

Die Funktion lautet: $\frac{x_1}{\tan(x_2\, x)} + x_3$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 4$.

Erklärung:

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(a, b) \Leftrightarrow f(a-x) + f(a+x) = 2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x = a \Leftrightarrow f(a-x) = f(a+x)$. $\tan x$ ist zu jedem 'Nulldurchgang' punktsymmetrisch.

Rechnung:

$f(x) \;=\; \frac{3}{\tan(5x)} + 4 \;=\; \frac{3\cos(5x)}{\sin(5x)} + 4.$
$f(x)$ hat für $5x = k\pi \;\Leftrightarrow\; x = \frac{k}{5\pi}$ senkrechte Asymptoten.
$3\cos(5x) \;=\; 0$ für $5x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; x = (2k+1)\frac{\pi}{10}$
$((2k+1)\frac{\pi}{10}, 4)$ sind die Kandidaten für Symmetriepunkte − $a = (2k+1)\frac{\pi}{10}$, $b = 4$.

$$\begin{aligned}
f(a+x) &= \frac{3\cos(5((2k+1)\frac{\pi}{10}+x))}{\sin(5((2k+1)\frac{\pi}{10}+x))} + 4 \\
&= 3\frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2}+5x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}+5x)} + 4 \\
&= 3\frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(5x)-\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(5x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(5x)+\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(5x)} + 4 && \text{Additionstheoreme} \\
&= 3\frac{-\sin(5x)}{\cos(5x)} + 4 && \sin((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = 1 \quad \cos((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(a-x) &= \frac{3\cos(5((2k+1)\frac{\pi}{10}-x))}{\sin(5((2k+1)\frac{\pi}{10}-x))} + 4 \\
&= 3\frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2}-5x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}-5x)} + 4 \\
&= 3\frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(5x)+\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(5x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(5x)-\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(5x)} + 4 && \text{Additionstheoreme} \\
&= 3\frac{\sin(5x)}{\cos(5x)} + 4 && \sin((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = 1 \quad \cos((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = 0
\end{aligned}$$

Damit ist $f(a+x) + f(a-x) \;=\; 3\frac{-\sin(5x)}{\cos(5x)} + 4 + 3\frac{\sin(5x)}{\cos(5x)} + 4 \;=\; 2\cdot 4.$
Dies war zu zeigen. Hausaufgabe: Zeigen Sie, dass es keine weiteren Symmetrien gibt.

Angebotene Lösungen:

☒ PS $((2k+1)\frac{\pi}{10}, 4)$	2 PS $(\frac{k\cdot\pi}{5}, 0)$	3 PS $((2k+1)\frac{\pi}{10}, 8)$	4 PS $(\frac{k\cdot\pi}{5}, 4)$
5 PS $(\frac{k\cdot\pi}{5}, 8)$	6 AS $x = 3\cdot\frac{k\pi}{5}$	7 PS $((2k+1)\frac{\pi}{2}, 4)$	8 PS $(k\cdot\pi, 4)$
9 AS $x = k\pi$	10 AS $x = \frac{k\pi}{5}$	11 nicht symmetrisch	12 AS $x = (2k+1)\frac{\pi}{10}$

Fehlerinterpretation:

☒ PS $((2k+1)\frac{\pi}{10}, 4)$	richtig
2 PS $(\frac{k\cdot\pi}{5}, 0)$	DF: $y-$ Wert falsch
3 PS $((2k+1)\frac{\pi}{10}, 8)$	DF: $y-$ Wert falsch
4 PS $(\frac{k\cdot\pi}{5}, 4)$	DF: Symmetriepunkte des Tangens
5 PS $(\frac{k\cdot\pi}{5}, 8)$	DF: $y-$ Wert falsch
6 AS $x = 3\cdot\frac{k\pi}{5}$	DF: f ist PS
7 PS $((2k+1)\frac{\pi}{2}, 4)$	DF: Periode ignoriert
8 PS $(k\cdot\pi, 4)$	DF: Periode ignoriert
9 AS $x = k\pi$	DF: Periode ignoriert
10 AS $x = \frac{k\pi}{5}$	DF: f ist PS
11 nicht symmetrisch	DF: PS nicht erkannt
12 AS $x = (2k+1)\frac{\pi}{10}$	DF: f ist PS

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Verschiebung
Keine	Funktionen	Nummer: 45 0 200405004	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.5: Gegeben sei die Funktion $f(x) = (3x+1)\ln(x-5)$. Verschieben Sie die Funktion so, dass der Punkt $(8\ ,\ f(8))$ in den Punkt $(12\ ,\ 30\ln 3)$ verschoben wird.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Aufgabe ($n \in 1..6$) $x_n > 1$, $x_5 > x_4 > x_3 > x_2$, $x_6 > x_1 \cdot x_4 + x_2$

Die Funktion lautet: $(x_1 \cdot x\ +\ x_2)\ln(x\ -\ x_3)$
Die Punkte sind $(x_4\ ,\ f(x_4))$ und $(x_5\ ,\ x_6 \cdot \ln\{x_4\ -\ x_3\})$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3$ $x_2 = 1$ $x_3 = 5$ $x_4 = 8$ $x_5 = 12$ $x_6 = 30$.

Erklärung:

Sei $y := f(x)$. Eine Verschiebung vom Punkt (a, b) in den Punkt (c, d) ist eine Verschiebung um den Vektor $(c-a, d-b)$.

Rechnung:

Damit ergibt sich für die Funktion: $y-(d-b) = f(x-(c-a))$ oder $y = f(x-c+a)+d-b$. $f(8) = (3\cdot 8+1)\ln(8-5) = 25\ln 3$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_{\text{neu}}(x) &= f(x-(12-8)) + 30\ln 3 - 25\ln 3 \\ &= f(x-4) + 5\ln 3 \\ &= (3(x-4)+1)\ln((x-4)-5) + 5\ln 3 \\ &= (3x-11)\ln(x-9) + 5\ln 3 \end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $(3x+59)\ln(x+25) - 5\ln 3$	2 $(3x-59)\ln(x-25) + 5\ln 13$	☒ $(3x-11)\ln(x-9) + 5\ln 3$
4 $(3x+11)\ln(x+9) - 5\ln 3$	5 $(3x-59)\ln(x-25) + 5\ln 3$	6 $(3x+59)\ln(x+25) + 5\ln 3$
7 $(3x+59)\ln(x+25) - 5\ln 13$	8 $(3x-59)\ln(x-25) - 5\ln 13$	9 $(3x+11)\ln(x+9) + 5\ln 3$
10 $(3x-11)\ln(x-9) - 5\ln 3$	11 $(3x+59)\ln(x+25) + 5\ln 13$	12 $(3x-59)\ln(x-25) - 5\ln 3$

Fehlerinterpretation:

1	$(3x+59)\ln(x+25)-5\ln 3$	DF: falsch verschoben
2	$(3x-59)\ln(x-25)+5\ln 13$	DF: falsch verschoben
☒	$(3x-11)\ln(x-9)+5\ln 3$	richtig
4	$(3x+11)\ln(x+9)-5\ln 3$	DF: falsch verschoben
5	$(3x-59)\ln(x-25)+5\ln 3$	DF: falsch verschoben
6	$(3x+59)\ln(x+25)+5\ln 3$	DF: falsch verschoben
7	$(3x+59)\ln(x+25)-5\ln 13$	DF: falsch verschoben
8	$(3x-59)\ln(x-25)-5\ln 13$	DF: falsch verschoben
9	$(3x+11)\ln(x+9)+5\ln 3$	DF: falsch verschoben
10	$(3x-11)\ln(x-9)-5\ln 3$	DF: falsch verschoben
11	$(3x+59)\ln(x+25)+5\ln 13$	DF: falsch verschoben
12	$(3x-59)\ln(x-25)-5\ln 3$	DF: falsch verschoben

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Umkehrfunktion
Injektivisierung	Funktionen	Nummer: 94 0 200405002	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.6: Gegeben sei die Funktion f: $\mathbb{D} \to f(\mathbb{D}) = \mathbb{B} : f(x) = 2 \cdot \sin(\sqrt{11 \cdot x + 18}) + 6$ mit $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ maximal. Schränken Sie den Definitionsbereich der nicht injektiven, aber surjektiven (da der Wertebereich = Bildbereich) Funktion $f(x)$ so ein, dass die Funktion bijektiv (also injektiv und immer noch surjektiv) ist.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Funktion $(n \in 1..4)$ $x_n > 1$

Die Funktion lautet also: $x_1 \cdot \sin(\sqrt{x_2 \cdot x\ +\ x_3})\ +\ x_4$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 11 \quad x_3 = 18 \quad x_4 = 6$.

Erklärung:

Rechnung:

$\sin(\sqrt{y})$ ist nicht definiert für $y < 0$. Also ist $2 \cdot \sin(\sqrt{11 \cdot x + 18}) + 6$ definiert für $11 \cdot x + 18 \geq 0$ und damit $x \geq -\frac{18}{11}$. Da der Wertebereich von $\sin y = [-1\ ,\ 1]$ ist, ist der Bildbereich von $2 \cdot \sin(\sqrt{11 \cdot x + 18}) + 6 = [6-2\ ,\ 6+2] = [4\ ,\ 8]$. $\sin y$ ist injektiv (zum Beispiel) für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Weil die Wurzelfunktion monoton ist, kann der eingeschränkte Definitionsbereich durch Substitution ermittelt werden: $\sqrt{11 \cdot x + 18} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{18}{11}$ und $\sqrt{11 \cdot x + 18} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{(\frac{\pi}{2})^2 - 18}{11}$. Also ist der gesuchte Definitionsbereich $x \in [\frac{-18}{11}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-18}{11}]$.

Angebotene Lösungen:

☒ $x \in [-\frac{18}{11}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-18}{11}]$	2 $x \in [\frac{18}{11}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-18}{11})$	3 $x \in [\frac{18}{11}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+18}{11}]$	4 $x \in [-\frac{18}{11}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+18}{11}]$
5 $x \in [-1, 1]$	6 $x \in [-\frac{18}{11}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-18}{11})$	7 $x = 0$	8 $x \in [-\frac{18}{11}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-18}{11})$
9 $x \in (\frac{18}{11}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+18}{11})$	10 $x \in (-1, 1]$	11 $x \in (\frac{18}{11}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+18}{11}]$	12 $x \in (-\frac{18}{11}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+18}{11})$

Fehlerinterpretation:

☒ $x \in [-\frac{18}{11}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-18}{11}]$ richtig

☐2 $x \in [\frac{18}{11}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-18}{11})$ DF: falsch substituiert

☐3 $x \in [\frac{18}{11}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+18}{11}]$ DF: falsch substituiert

☐4 $x \in [-\frac{18}{11}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+18}{11}]$ DF: falsch substituiert

☐5 $x \in [-1, 1]$ DF: Lösung geraten

☐6 $x \in [-\frac{18}{11}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-18}{11})$ DF: falsch substituiert

☐7 $x = 0$ DF: Lösung geraten

☐8 $x \in [-\frac{18}{11}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-18}{11})$ DF: Ränder nicht beachtet

☐9 $x \in (\frac{18}{11}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+18}{11})$ DF: falsch substituiert

☐10 $x \in (-1, 1]$ DF: Lösung geraten

☐11 $x \in (\frac{18}{11}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+18}{11}]$ DF: falsch substituiert

☐12 $x \in (-\frac{18}{11}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+18}{11})$ DF: falsch substituiert

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Verschiebung
Keine	Funktionen	Nummer: 97 0 200405003	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.7: Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt[8]{7x-6} \cdot \sin(3x+2)$. Wie lautet die Gleichung der Funktion, die um 7 nach rechts und um 3 nach oben verschoben wurde?

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Aufgabe $(n \in 1..7)$ $x_n > 1$, $x_5 < x_6$

Die Funktion lautet: $\sqrt[x_1]{x_2 \cdot x \;-\; x_3} \cdot \sin(x_4 \cdot x \;+\; x_5)$
Der Verschiebungsvektor ist $(x_6 \;,\; x_7)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 8$ $x_2 = 7$ $x_3 = 6$ $x_4 = 3$ $x_5 = 2$ $x_6 = 7$ $x_7 = 3$.

Erklärung:

Sei $y := f(x)$. Eine Funktionsverschiebung um (a, b) wirkt sich so aus, dass a direkt von x und b direkt von y subtrahiert werden muss. $y - b = f(x - a)$ oder $y = f(x - a) + b$.

Rechnung:

Damit ergibt sich:

$$f_{\text{neu}}\,(x) \;=\; f(x-7)+3 \;=\; \sqrt[8]{7(x-7)-6} \cdot \sin(3(x-7)+2)+3 \;=\; \sqrt[8]{7x-55} \cdot \sin(3x-23)+3$$

Angebotene Lösungen:

☐1 $\frac{1}{\sqrt[8]{7x-55} \cdot \sin(3x-23)+3}$	☐2 $\sqrt[8]{7x+55} \cdot \sin(3x+23)+3$	☐3 $\frac{x-7}{\sqrt[8]{7x-6} \cdot \sin(3x+2)}+3$
☒ $\sqrt[8]{7x-55} \cdot \sin(3x-23)+3$	☐5 $\sqrt[8]{7x+43} \cdot \sin(3x-19)-3$	☐6 $\sqrt[8]{7x-55} \cdot \sin(3x-23)-3$
☐7 $\sqrt[8]{7x+43} \cdot \sin(3x-19)+3$	☐8 $\frac{1}{\sqrt[8]{7x-55} \cdot \sin(3x-23)-3}$	☐9 $\sqrt[15]{7x-6} \cdot \sin(3x+2)-3$
☐10 $\sqrt[8]{7x+55} \cdot \sin(3x+23)-3$	☐11 $\sqrt[15]{7x-6} \cdot \sin(3x+2)+3$	☐12 $\sqrt[8]{49-6} \cdot \sin(21x+2)-3$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{1}{\sqrt[8]{7x-55}\cdot\sin(3x-23)+3}$	DF: mit UKF verwechselt
2	$\sqrt[8]{7x+55}\cdot\sin(3x+23)+3$	RF: addiert statt subtrahiert
3	$\frac{x-7}{\sqrt[8]{7x-6}\cdot\sin(3x+2)}+3$	DF: mit UKF verwechselt
☒	$\sqrt[8]{7x-55}\cdot\sin(3x-23)+3$	richtig
5	$\sqrt[8]{7x+43}\cdot\sin(3x-19)-3$	RF: addiert statt subtrahiert
6	$\sqrt[8]{7x-55}\cdot\sin(3x-23)-3$	DF: falsch verschoben
7	$\sqrt[8]{7x+43}\cdot\sin(3x-19)+3$	RF: addiert statt subtrahiert
8	$\frac{1}{\sqrt[8]{7x-55}\cdot\sin(3x-23)-3}$	DF: mit UKF verwechselt
9	$\sqrt[15]{7x-6}\cdot\sin(3x+2)-3$	DF: mit Wurzel verknüpft
10	$\sqrt[8]{7x+55}\cdot\sin(3x+23)-3$	RF: addiert statt subtrahiert
11	$\sqrt[15]{7x-6}\cdot\sin(3x+2)+3$	DF: mit Wurzel verknüpft
12	$\sqrt[8]{49-6}\cdot\sin(21x+2)-3$	RF: multipliziert statt subtrahiert

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Symmetrie
Achsensymmetrie	Funktionen	Nummer: 107 0 200405007	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.8: Zu welchem Punkt bzw. zu welcher Achse ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f : \mathbb{R}\backslash\{5\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{4\sin(3x-15)}{\sqrt[3]{4x-20}} + 2$$

(AS) = achsensymmetrisch − (PS) = punktsymmetrisch.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe ($n \in 1..5$) $x_n > 1$
$x = x_3$ ist die Symmetrieachse

Die Funktion lautet: $\frac{x_1\cdot\sin(x_2\cdot x-\{x_3\cdot x_2\})}{\sqrt[3]{x_4\cdot x-\{x_3\cdot x_4\}}} + \; x_5$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 4 \quad x_5 = 2$.

Erklärung:

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(a, b) \Leftrightarrow f(a-x) + f(a+x) = 2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x = a \Leftrightarrow f(a-x) = f(a+x)$.

Rechnung:

$$f(x) = \frac{4\sin(3x-15)}{\sqrt[3]{4x-20}} + 2 = \frac{4\sin(3(x-5))}{\sqrt[3]{4(x-5)}} + 2$$

Damit wird die Symmetrie zur Achse $x = 5$ vermutet:

$$\begin{aligned} f(5-x) &= \frac{4\sin(3((5-x)-5))}{\sqrt[3]{4((5-x)-5)}} + 2 \\ &= \frac{4\sin(-3x)}{\sqrt[3]{-4x}} + 2 \\ &= \frac{-4\sin(3x)}{-\sqrt[3]{4x}} + 2 \\ &= \frac{4\sin(3x)}{\sqrt[3]{4x}} + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(5+x) &= \frac{4\sin(3((5+x)-5))}{\sqrt[3]{4((5+x)-5)}} + 2 \\ &= \frac{4\sin(3x)}{\sqrt[3]{4x}} + 2 = f(5-x) \end{aligned}$$

Damit ist die Symmetrie zur Achse $x = 5$ gezeigt.

Angebotene Lösungen:

[1] AS $x = 0$	[2] nicht symmetrisch	[3] PS $(-5, 2)$	[4] PS $(5, 4)$
[5] AS $x = -2$	[6] PS $(-5, -2)$	[7] PS $(5, 2)$	[8] AS $x = -5$
[9] PS $(0, 0)$	[10] AS $x = 2$	[X] AS $x = 5$	[12] PS $(5, -2)$

Fehlerinterpretation:

[1]	AS $x = 0$	DF: geraten
[2]	nicht symmetrisch	DF: AS nicht erkannt
[3]	PS $(-5, 2)$	DF: AS nicht erkannt
[4]	PS $(5, 4)$	DF: AS nicht erkannt
[5]	AS $x = -2$	DF: geraten
[6]	PS $(-5, -2)$	DF: AS nicht erkannt
[7]	PS $(5, 2)$	DF: AS nicht erkannt
[8]	AS $x = -5$	RF: falsches Vorzeichen
[9]	PS $(0, 0)$	DF: geraten
[10]	AS $x = 2$	DF: geraten
[X]	AS $x = 5$	richtig
[12]	PS $(5, -2)$	DF: AS nicht erkannt

Allgemeine Hinweise:

Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu