Blatt Nr 05.03

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 5

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Symmetrie
Achsensymmetrie	Funktionen	Nummer: 10 0 200405007	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.1: Zu welchem Punkt bzw. zu welcher Achse ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f : \mathbb{R}\backslash\{4\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{4\sin(2x-8)}{\sqrt[3]{2x-8}} + 2$$

(AS) = achsensymmetrisch − (PS) = punktsymmetrisch.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe ($n \in 1..5$) $x_n > 1$
$x = x_3$ ist die Symmetrieachse

Die Funktion lautet: $\frac{x_1 \cdot \sin(x_2 \cdot x - \{x_3 \cdot x_2\})}{\sqrt[3]{x_4 \cdot x - \{x_3 \cdot x_4\}}} + \ x_5$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 4 \quad x_4 = 2 \quad x_5 = 2.$

Erklärung:

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(a, b) \Leftrightarrow f(a - x) + f(a + x) = 2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x = a \Leftrightarrow f(a - x) = f(a + x)$.

Rechnung:

$$f(x) = \frac{4\sin(2x-8)}{\sqrt[3]{2x-8}} + 2 = \frac{4\sin(2(x-4))}{\sqrt[3]{2(x-4)}} + 2$$

Damit wird die Symmetrie zur Achse $x = 4$ vermutet:

$$\begin{aligned} f(4-x) &= \tfrac{4\sin(2((4-x)-4))}{\sqrt[3]{2((4-x)-4)}} + 2 \\ &= \tfrac{4\sin(-2x)}{\sqrt[3]{-2x}} + 2 \\ &= \tfrac{-4\sin(2x)}{-\sqrt[3]{2x}} + 2 \\ &= \tfrac{4\sin(2x)}{\sqrt[3]{2x}} + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4+x) &= \tfrac{4\sin(2((4+x)-4))}{\sqrt[3]{2((4+x)-4)}} + 2 \\ &= \tfrac{4\sin(2x)}{\sqrt[3]{2x}} + 2 = f(4-x) \end{aligned}$$

Damit ist die Symmetrie zur Achse $x = 4$ gezeigt.

Angebotene Lösungen:

☒ AS $x = 4$	2 PS $(-4, 2)$	3 AS $x = 8$	4 nicht symmetrisch
5 AS $x = -2$	6 AS $x = -8$	7 PS $(0, 0)$	8 PS $(-4, -4)$
9 AS $x = 0$	10 PS $(4, 2)$	11 AS $x = -4$	12 AS $x = 2$

Fehlerinterpretation:

$\boxtimes$	AS $x = 4$	richtig
$\boxed{2}$	PS $(-4, 2)$	DF: AS nicht erkannt
$\boxed{3}$	AS $x = 8$	DF: geraten
$\boxed{4}$	nicht symmetrisch	DF: AS nicht erkannt
$\boxed{5}$	AS $x = -2$	DF: geraten
$\boxed{6}$	AS $x = -8$	DF: geraten
$\boxed{7}$	PS $(0, 0)$	DF: geraten
$\boxed{8}$	PS $(-4, -4)$	DF: AS nicht erkannt
$\boxed{9}$	AS $x = 0$	DF: geraten
$\boxed{10}$	PS $(4, 2)$	DF: AS nicht erkannt
$\boxed{11}$	AS $x = -4$	RF: falsches Vorzeichen
$\boxed{12}$	AS $x = 2$	DF: geraten

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Symmetrie
Punktsymmetrie	Funktionen	Nummer: 18 0 2004050008	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.2: Zu welchen Punkten bzw. zu welchen Achsen ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \qquad f(x) \quad = \quad \frac{2}{\tan(4x)} + 5 \qquad \mathbb{D} \text{ maximal}$$

(AS) = achsensymmetrisch − (PS) = punktsymmetrisch − bei der Lösung sei k eine beliebige ganze Zahl.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe ($n \in 1..3$), $x_1 \neq x_2$, $x_n > 1$.

Die Funktion lautet: $\frac{x_1}{\tan(x_2\, x)} + x_3$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 5$.

Erklärung:

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(a, b) \Leftrightarrow f(a - x) + f(a + x) = 2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x = a \Leftrightarrow f(a - x) = f(a + x)$. $\tan x$ ist zu jedem 'Nulldurchgang' punktsymmetrisch.

Rechnung:

$f(x) \;=\; \frac{2}{\tan(4x)} + 5 \;=\; \frac{2\cos(4x)}{\sin(4x)} + 5.$
$f(x)$ hat für $4x = k\pi \;\Leftrightarrow\; x = \frac{k}{4\pi}$ senkrechte Asymptoten.
$2\cos(4x) \;=\; 0$ für $4x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; x = (2k+1)\frac{\pi}{8}$
$((2k+1)\frac{\pi}{8}, 5)$ sind die Kandidaten für Symmetriepunkte − $a = (2k+1)\frac{\pi}{8}$, $b = 5$.

$$\begin{aligned}
f(a+x) &= \tfrac{2\cos(4((2k+1)\frac{\pi}{8}+x))}{\sin(4((2k+1)\frac{\pi}{8}+x))} + 5 \\
&= 2\tfrac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2}+4x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}+4x)} + 5 \\
&= 2\tfrac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(4x)-\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(4x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(4x)+\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(4x)} + 5 && \text{Additionstheoreme} \\
&= 2\tfrac{-\sin(4x)}{\cos(4x)} + 5 && \sin((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = 1 \quad \cos((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(a-x) &= \tfrac{2\cos(4((2k+1)\frac{\pi}{8}-x))}{\sin(4((2k+1)\frac{\pi}{8}-x))} + 5 \\
&= 2\tfrac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2}-4x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}-4x)} + 5 \\
&= 2\tfrac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(4x)+\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(4x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(4x)-\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(4x)} + 5 && \text{Additionstheoreme} \\
&= 2\tfrac{\sin(4x)}{\cos(4x)} + 5 && \sin((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = 1 \quad \cos((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = 0
\end{aligned}$$

Damit ist $f(a+x) + f(a-x) \;=\; 2\frac{-\sin(4x)}{\cos(4x)} + 5 + 2\frac{\sin(4x)}{\cos(4x)} + 5 \;=\; 2 \cdot 5.$
Dies war zu zeigen. Hausaufgabe: Zeigen Sie, dass es keine weiteren Symmetrien gibt.

Angebotene Lösungen:

1 PS $(k \cdot \pi, 5)$	2 nicht symmetrisch	3 AS $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$	4 AS $x = 2 \cdot \frac{k\pi}{4}$
5 PS $(\frac{k \cdot \pi}{4}, 10)$	6 PS $((2k+1)\frac{\pi}{8}, 10)$	☒ PS $((2k+1)\frac{\pi}{8}, 5)$	8 AS $x = 2 \cdot (2k+1)\frac{\pi}{8}$
9 PS $(\frac{k \cdot \pi}{4}, 5)$	10 PS $(\frac{k \cdot \pi}{4}, 0)$	11 PS $((2k+1)\frac{\pi}{8}, 0)$	12 PS $((2k+1)\frac{\pi}{2}, 5)$

Fehlerinterpretation:

1 PS $(k \cdot \pi, 5)$	DF: Periode ignoriert
2 nicht symmetrisch	DF: PS nicht erkannt
3 AS $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$	DF: Periode ignoriert
4 AS $x = 2 \cdot \frac{k\pi}{4}$	DF: f ist PS
5 PS $(\frac{k \cdot \pi}{4}, 10)$	DF: $y-$ Wert falsch
6 PS $((2k+1)\frac{\pi}{8}, 10)$	DF: $y-$ Wert falsch
☒ PS $((2k+1)\frac{\pi}{8}, 5)$	richtig
8 AS $x = 2 \cdot (2k+1)\frac{\pi}{8}$	DF: f ist PS
9 PS $(\frac{k \cdot \pi}{4}, 5)$	DF: Symmetriepunkte des Tangens
10 PS $(\frac{k \cdot \pi}{4}, 0)$	DF: $y-$ Wert falsch
11 PS $((2k+1)\frac{\pi}{8}, 0)$	DF: $y-$ Wert falsch
12 PS $((2k+1)\frac{\pi}{2}, 5)$	DF: Periode ignoriert

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Verschiebung
Keine	Funktionen	Nummer: 20 0 200405003	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.3: Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt[8]{7x-8} \cdot \sin(7x+2)$. Wie lautet die Gleichung der Funktion, die um 5 nach rechts und um 2 nach oben verschoben wurde?

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Aufgabe $(n \in 1..7)$ $x_n > 1$, $x_5 < x_6$

Die Funktion lautet: $\sqrt[x_1]{x_2 \cdot x \; - \; x_3} \cdot \sin(x_4 \cdot x \; + \; x_5)$
Der Verschiebungsvektor ist $(x_6 \; , \; x_7)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 8 \quad x_2 = 7 \quad x_3 = 8 \quad x_4 = 7 \quad x_5 = 2 \quad x_6 = 5 \quad x_7 = 2$.

Erklärung:

Sei $y := f(x)$. Eine Funktionsverschiebung um (a, b) wirkt sich so aus, dass a direkt von x und b direkt von y subtrahiert werden muss. $y - b = f(x-a)$ oder $y = f(x-a) + b$.

Rechnung:

Damit ergibt sich:

$$f_{\text{neu}}\,(x) \;=\; f(x-5)+2 \;=\; \sqrt[8]{7(x-5)-8} \cdot \sin(7(x-5)+2)+2 \;=\; \sqrt[8]{7x-43} \cdot \sin(7x-37)+2$$

Angebotene Lösungen:

1 $\sqrt[13]{7x-8} \cdot \sin(7x+2) - 2$	2 $\sqrt[8]{7x+27} \cdot \sin(7x-33) + 2$	3 $\sqrt[8]{7x+27} \cdot \sin(7x-33) - 2$
4 $\sqrt[13]{7x-8} \cdot \sin(7x+2) + 2$	5 $\sqrt[8]{35x-8} \cdot \sin(35x+2) + 2$	6 $\sqrt[8]{7x+43} \cdot \sin(7x+37) - 2$
7 $\frac{x-5}{\sqrt[8]{7x-8} \cdot \sin(7x+2)} + 2$	8 $\frac{1}{\sqrt[8]{7x-43} \cdot \sin(7x-37)+2}$	☒ $\sqrt[8]{7x-43} \cdot \sin(7x-37) + 2$
10 $\sqrt[8]{35-8} \cdot \sin(35x+2) - 2$	11 $\frac{x-5}{\sqrt[8]{7x-8} \cdot \sin(7x+2)} - 2$	12 $\frac{1}{\sqrt[8]{7x-43} \cdot \sin(7x-37)-2}$

Fehlerinterpretation:

1	$\sqrt[13]{7x-8} \cdot \sin(7x+2) - 2$	DF: mit Wurzel verknüpft
2	$\sqrt[8]{7x+27} \cdot \sin(7x-33) + 2$	RF: addiert statt subtrahiert
3	$\sqrt[8]{7x+27} \cdot \sin(7x-33) - 2$	RF: addiert statt subtrahiert
4	$\sqrt[13]{7x-8} \cdot \sin(7x+2) + 2$	DF: mit Wurzel verknüpft
5	$\sqrt[8]{35x-8} \cdot \sin(35x+2) + 2$	RF: multipliziert statt subtrahiert
6	$\sqrt[8]{7x+43} \cdot \sin(7x+37) - 2$	RF: addiert statt subtrahiert
7	$\frac{x-5}{\sqrt[8]{7x-8 \cdot \sin(7x+2)}} + 2$	DF: mit UKF verwechselt
8	$\frac{1}{\sqrt[8]{7x-43} \cdot \sin(7x-37)+2}$	DF: mit UKF verwechselt
☒	$\sqrt[8]{7x-43} \cdot \sin(7x-37) + 2$	richtig
10	$\sqrt[8]{35-8} \cdot \sin(35x+2) - 2$	RF: multipliziert statt subtrahiert
11	$\frac{x-5}{\sqrt[8]{7x-8 \cdot \sin(7x+2)}} - 2$	DF: mit UKF verwechselt
12	$\frac{1}{\sqrt[8]{7x-43 \cdot \sin(7x-37)-2}}$	DF: mit UKF verwechselt

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Umkehrfunktion
Keine	Funktionen	Nummer: 40 0 200405005	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.4: Bestimmen Sie die Umkehrfunktion der (bijektiven) Funktion

$$f : \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^+ \qquad f(x) = 2(e^{(x-1)^2} - 1)$$

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Funktion ($n \in 1..2$) $x_n > 1$

Die Funktion lautet: $x_1(e^{(x\ -\ x_2)^2} - 1)$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \qquad x_2 = 1$.

Erklärung:

Sei $y := f(x)$. Das Bilden der Umkehrfunktion bedeutet das Vertauschen von x und y und anschließend das Auflösen nach y.

Rechnung:

$y = 2(e^{(x-1)^2} - 1)$ wird zu $x = 2(e^{(y-1)^2} - 1)$.

$$\begin{array}{rlcl} f^{-1}(x) & : \quad x & = & 2(e^{(y-1)^2} - 1) \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{2} & = & e^{(y-1)^2} \\ & \Leftrightarrow \quad \ln(\frac{x+2}{2}) & = & (y-1)^2 \\ & \Leftrightarrow \quad \pm\sqrt{\ln(\frac{x+2}{2})} & = & y-1 \\ & \Leftrightarrow \quad \pm\sqrt{\ln(\frac{x+2}{2})}\ +1 & = & y \end{array}$$

Weil der Definitionsbereich von $f(x)$ $\mathbb{R}_0^-$ ist, muss hier der negative Teil der Wurzel als Umkehrfunktion gewählt werden. Verifikation durch eine Punktprobe: $f(-1) = 2(e^{((-1)-1)^2} - 1) = 2e^4 - 2$. Also muss $f^{-1}(2e^4 - 2) = -1$ sein:

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(2e^4-2) & = & -\sqrt{\ln(\frac{(2e^4-2)+2}{2})}\ +1 \\ & = & -\sqrt{\ln(\frac{2e^4}{2})}\ +1 \\ & = & -\sqrt{\ln(e^4)}\ +1 \\ & = & -\sqrt{4}\ +1 \\ & = & -\vert 2\vert\ +1 \\ & = & -1 \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $-\sqrt{\ln(\frac{x-2}{2})}-1$	2 $\ln(\sqrt{\frac{x-2}{2}})+1$	3 $\sqrt{\ln(\frac{x+1}{1})}+2$
4 $\sqrt{\ln(\frac{x+2}{2})}+1$	5 $\sqrt{\ln(\frac{x-1}{1})}-2$	6 $-\sqrt{\ln(\frac{x-2}{2})}+1$
7 $-\ln(\sqrt{\frac{x+2}{2}})+1$	☒ $-\sqrt{\ln(\frac{x+2}{2})}+1$	9 $\sqrt{\ln(\frac{x-2}{2})}-1$
10 $-\sqrt{\ln(\frac{x-1}{1})}-2$	11 $\ln(\sqrt{\frac{x+2}{2}})+1$	12 $-\sqrt{\ln(\frac{x+1}{1})}+2$

Fehlerinterpretation:

1 $-\sqrt{\ln(\frac{x-2}{2})}-1$	RF: falsch umgeformt
2 $\ln(\sqrt{\frac{x-2}{2}})+1$	DF: falsche Reihenfolge
3 $\sqrt{\ln(\frac{x+1}{1})}+2$	DF: falsches Vorzeichen gewählt
4 $\sqrt{\ln(\frac{x+2}{2})}+1$	DF: falsches Vorzeichen gewählt
5 $\sqrt{\ln(\frac{x-1}{1})}-2$	DF: falsches Vorzeichen gewählt
6 $-\sqrt{\ln(\frac{x-2}{2})}+1$	RF: falsch umgeformt
7 $-\ln(\sqrt{\frac{x+2}{2}})+1$	DF: falsche Reihenfolge
☒ $-\sqrt{\ln(\frac{x+2}{2})}+1$	richtig
9 $\sqrt{\ln(\frac{x-2}{2})}-1$	RF: falsch umgeformt
10 $-\sqrt{\ln(\frac{x-1}{1})}-2$	DF: falsche Reihenfolge
11 $\ln(\sqrt{\frac{x+2}{2}})+1$	DF: falsche Reihenfolge
12 $-\sqrt{\ln(\frac{x+1}{1})}+2$	DF: falsche Reihenfolge

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Symmetrie
Punktsymmetrie	Funktionen	Nummer: 67 0 200405006	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.5: Zu welchem Punkt bzw. zu welcher Achse ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{2x-2}{5x^2-20x+10} + 2$$

(AS) = achsensymmetrisch − (PS) = punktsymmetrisch.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe $(n \in 1..4)$ $x_n > 1$
(x_2, x_4) ist der Symmetriepunkt

Die Funktion lautet: $\frac{x_1\ x - \{x_1 \cdot x_2\}}{x_3 x^2\ -\ \{2 \cdot x_3 \cdot 2\}x + \{x_3 \cdot (x_1^2+1)\}}\ +\ x_4$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 2.$

Erklärung:

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(a, b) \Leftrightarrow f(a-x) + f(a+x) = 2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x = a \Leftrightarrow f(a-x) = f(a+x)$.

Rechnung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{2x-2}{5x^2-10x+10} + 2 \\ &= \tfrac{2(x-1)}{5(x^2-2x+1+1)} + 2 \\ &= \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{x-1}{(x-1)^2+1} + 2 \end{aligned}$$

Damit wird eine Symmetrie zum Punkt $(1, ?)$ vermutet:

$$\begin{aligned} f(1-x)+f(1+x) &= \tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{(1-x)-1}{((1-x)-1)^2+1}+2+\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{(1+x)-1}{((1+x)-1)^2+1}+2 \\ &= \tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{-x}{(-x)^2+1}+\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{x}{x^2+1}+4 \\ &= \tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{x-x}{x^2+1}+4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Damit ist $b = 2$ und die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt $(1\,,\,2)$.

Angebotene Lösungen:

1 AS $x = -2$	2 AS $x = 0$	3 AS $x = \frac{2}{5}$	☒ PS $(1, 2)$
5 AS $x = -1$	6 PS $(1, -2)$	7 AS $x = 1$	8 AS $x = 2$
9 PS $(-2, -1)$	10 PS $(-1, 2)$	11 AS $x = -\frac{2}{5}$	12 nicht symmetrisch

Fehlerinterpretation:

1	AS $x = -2$	DF: PS nicht erkannt
2	AS $x = 0$	DF: geraten
3	AS $x = \frac{2}{5}$	DF: geraten
☒	PS $(1, 2)$	richtig
5	AS $x = -1$	DF: PS nicht erkannt
6	PS $(1, -2)$	RF: falsches Vorzeichen
7	AS $x = 1$	DF: PS nicht erkannt
8	AS $x = 2$	DF: PS nicht erkannt
9	PS $(-2, -1)$	DF: Koordinaten vertauscht
10	PS $(-1, 2)$	RF: falsches Vorzeichen
11	AS $x = -\frac{2}{5}$	DF: geraten
12	nicht symmetrisch	DF: PS nicht erkannt

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Verschiebung
Keine	Funktionen	Nummer: 72 0 200405004	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.6: Gegeben sei die Funktion $f(x) = (3x+1)\ln(x-5)$. Verschieben Sie die Funktion so, dass der Punkt $(8\,,\ f(8))$ in den Punkt $(12\,,\ 30\ln 3)$ verschoben wird.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Aufgabe $(n \in 1..6)$ $x_n > 1$, $x_5 > x_4 > x_3 > x_2$, $x_6 > x_1 \cdot x_4 + x_2$

Die Funktion lautet: $(x_1 \cdot x \;+\; x_2)\ln(x \;-\; x_3)$
Die Punkte sind $(x_4\,,\ f(x_4))$ und $(x_5\,,\ x_6 \cdot \ln\{x_4 \;-\; x_3\})$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 8 \quad x_5 = 12 \quad x_6 = 30.$

Erklärung:

Sei $y := f(x)$. Eine Verschiebung vom Punkt (a, b) in den Punkt (c, d) ist eine Verschiebung um den Vektor $(c-a, d-b)$.

Rechnung:

Damit ergibt sich für die Funktion: $y-(d-b) = f(x-(c-a))$ oder $y = f(x-c+a)+d-b$. $f(8) = (3\cdot 8+1)\ln(8-5) = 25\ln 3$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_{\text{neu}}\,(x) &= f(x-(12-8))+30\ln 3-25\ln 3 \\ &= f(x-4)+5\ln 3 \\ &= (3(x-4)+1)\ln((x-4)-5)+5\ln 3 \\ &= (3x-11)\ln(x-9)+5\ln 3 \end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

[1] $(3x+59)\ln(x+25)+5\ln 13$	[X] $(3x-11)\ln(x-9)+5\ln 3$	[3] $(3x+59)\ln(x+25)+5\ln 3$
[4] $(3x+59)\ln(x+25)-5\ln 13$	[5] $(3x-11)\ln(x-9)-5\ln 3$	[6] $(3x-59)\ln(x-25)+5\ln 3$
[7] $(3x-59)\ln(x-25)+5\ln 13$	[8] $(3x+11)\ln(x+9)+5\ln 3$	[9] $(3x-59)\ln(x-25)-5\ln 3$
[10] $(3x+11)\ln(x+9)-5\ln 3$	[11] $(3x+59)\ln(x+25)-5\ln 3$	[12] $(3x-59)\ln(x-25)-5\ln 13$

Fehlerinterpretation:

[1] $(3x+59)\ln(x+25)+5\ln 13$	DF: falsch verschoben
[X] $(3x-11)\ln(x-9)+5\ln 3$	richtig
[3] $(3x+59)\ln(x+25)+5\ln 3$	DF: falsch verschoben
[4] $(3x+59)\ln(x+25)-5\ln 13$	DF: falsch verschoben
[5] $(3x-11)\ln(x-9)-5\ln 3$	DF: falsch verschoben
[6] $(3x-59)\ln(x-25)+5\ln 3$	DF: falsch verschoben
[7] $(3x-59)\ln(x-25)+5\ln 13$	DF: falsch verschoben
[8] $(3x+11)\ln(x+9)+5\ln 3$	DF: falsch verschoben
[9] $(3x-59)\ln(x-25)-5\ln 3$	DF: falsch verschoben
[10] $(3x+11)\ln(x+9)-5\ln 3$	DF: falsch verschoben
[11] $(3x+59)\ln(x+25)-5\ln 3$	DF: falsch verschoben
[12] $(3x-59)\ln(x-25)-5\ln 13$	DF: falsch verschoben

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Umkehrfunktion
Injektivisierung	Funktionen	Nummer: 89 0 2004050001	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.7: Gegeben sei die Funktion f: $\mathbb{D} \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{\tan(4\cdot x+12)}{18}$ mit $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ maximal. Schränken Sie den Definitionsbereich der nicht injektiven, aber surjektiven Funktion $f(x)$ so ein, dass die Funktion bijektiv (also injektiv und immer noch surjektiv) ist.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Funktion ($n \in 1..3$), $x_n > 1$, x_2 ist Vielfaches von x_1

Die Funktion lautet also: $\frac{\tan(x_1\cdot x + x_2)}{x_3}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \qquad x_2 = 12 \qquad x_3 = 18$.

Erklärung:

$\tan x$ ist zwischen zwei senkrechten Asymptoten streng monoton wachsend. Finden Sie zwei benachbarte Asymptoten durch Substitution von $y = 4\cdot x + 12$.

Rechnung:

$\tan y$ ist nicht definiert für $y = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$). Damit ist $\tan(4\cdot x+12)$ nicht definiert für $x = \frac{(2k+1)\pi}{2\cdot 4} - \frac{12}{4}$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$). Damit ist $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{(2k+1)\pi}{8} - 3; k \in \mathbb{Z}\}$. $\tan y$ ist zwischen zwei benachbarten senkrechten Asymptoten streng monoton. $f(y) \to -\infty$, wenn y gegen die linke Asymptote geht und $f(y) \to \infty$, wenn y gegen die rechte Asymptote geht. Nach dem Zwischenwertsatz ist dann $f(x)$ zwischen zwei benachbarten senkrechten Asymptoten bijektiv.

$$\text{Also zum Beispiel } y \in (\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \text{ oder } x \in (\frac{-\pi}{8} - 3, \frac{\pi}{8} - 3) \qquad k = -1 \text{ und } k = 0$$

Angebotene Lösungen:

[1] $x \in \mathbb{R}$	[2] $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	[3] $x \in (\frac{-\pi}{8} - 3, \frac{\pi}{8} - 3]$
[4] $x \in [\frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$	[5] $x \in [\frac{-\pi}{8} - 3, \frac{\pi}{8} - 3)$	[6] $x \in (-1, 1]$
[7] $x \in (\frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$	[8] $x \in (\frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$	[9] $x \in (\frac{-\pi}{8} + 3, \frac{\pi}{8} + 3)$
[X] $x \in (\frac{-\pi}{8} - 3, \frac{\pi}{8} - 3)$	[11] $x \in [-8\cdot\pi - 3, 8\cdot\pi - 3)$	[12] $x = 0$

Fehlerinterpretation:

1	$x \in \mathbb{R}$	DF: Lösung geraten
2	$x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	DF: nicht substituiert
3	$x \in (\frac{-\pi}{8} - 3, \frac{\pi}{8} - 3]$	DF: Ränder nicht beachtet
4	$x \in [\frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$	DF: falsch substituiert
5	$x \in [\frac{-\pi}{8} - 3, \frac{\pi}{8} - 3)$	DF: Ränder nicht beachtet
6	$x \in (-1, 1]$	DF: Lösung geraten
7	$x \in (\frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$	DF: falsch substituiert
8	$x \in (\frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$	DF: falsch substituiert
9	$x \in (\frac{-\pi}{8} + 3, \frac{\pi}{8} + 3)$	DF: falsch substituiert
☒	$x \in (\frac{-\pi}{8} - 3, \frac{\pi}{8} - 3)$	richtig
11	$x \in [-8 \cdot \pi - 3, 8 \cdot \pi - 3)$	DF: falsch substituiert
12	$x = 0$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Umkehrfunktion
Injektivisierung	Funktionen	Nummer: 99 0 200405002	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.8: Gegeben sei die Funktion f: $\mathbb{D} \to f(\mathbb{D}) = \mathbb{B} : f(x) = 8 \cdot \sin(\sqrt{8 \cdot x + 14}) + 4$ mit $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ maximal. Schränken Sie den Definitionsbereich der nicht injektiven, aber surjektiven (da der Wertebereich = Bildbereich) Funktion $f(x)$ so ein, dass die Funktion bijektiv (also injektiv und immer noch surjektiv) ist.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Funktion $(n \in 1..4)$ $x_n > 1$

Die Funktion lautet also: $x_1 \cdot \sin(\sqrt{x_2 \cdot x \,+\, x_3}) \,+\, x_4$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 8 \quad x_2 = 8 \quad x_3 = 14 \quad x_4 = 4$.

Erklärung:

Rechnung:

$\sin(\sqrt{y})$ ist nicht definiert für $y < 0$. Also ist $8 \cdot \sin(\sqrt{8 \cdot x + 14}) + 4$ definiert für $8 \cdot x + 14 \geq 0$ und damit $x \geq -\frac{7}{4}$. Da der Wertebereich von $\sin y = [-1 \ , \ 1]$ ist, ist der Bildbereich von $8 \cdot \sin(\sqrt{8 \cdot x + 14}) + 4 = [4 - 8 \ , \ 4 + 8] = [-4 \ , \ 12]$. $\sin y$ ist injektiv (zum Beispiel) für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Weil die Wurzelfunktion monoton ist, kann der eingeschränkte Definitionsbereich durch Substitution ermittelt werden: $\sqrt{8 \cdot x + 14} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{4}$ und $\sqrt{8 \cdot x + 14} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{(\frac{\pi}{2})^2 - 14}{8}$. Also ist der gesuchte Definitionsbereich $x \in [\frac{-7}{4}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2 - 14}{8}]$.

Angebotene Lösungen:

1 $x \in [-\frac{7}{4}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2 + 14}{8}]$	2 $x \in (\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} + 14}{8})$	3 $x = 0$	4 $\emptyset$
5 $x \in (-\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} + 14}{8})$	6 $x \in [\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 14}{8})$	7 $x \in [-\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} + 14}{8}]$	8 $x \in (-\frac{7}{4}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2 + 14}{8}]$
9 $x \in \mathbb{R}$	10 $x \in [-\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 14}{8})$	☒ $x \in [-\frac{7}{4}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2 - 14}{8}]$	12 $x \in [-\frac{7}{4}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2 - 14}{8})$

Fehlerinterpretation:

1	$x \in [-\frac{7}{4}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+14}{8}]$	DF: falsch substituiert
2	$x \in (\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+14}{8})$	DF: falsch substituiert
3	$x = 0$	DF: Lösung geraten
4	$\emptyset$	DF: Lösung geraten
5	$x \in (-\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+14}{8})$	DF: falsch substituiert
6	$x \in [\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-14}{8})$	DF: falsch substituiert
7	$x \in [-\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+14}{8}]$	DF: falsch substituiert
8	$x \in (-\frac{7}{4}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+14}{8}]$	DF: falsch substituiert
9	$x \in \mathbb{R}$	DF: Lösung geraten
10	$x \in [-\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-14}{8})$	DF: falsch substituiert
☒	$x \in [-\frac{7}{4}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-14}{8}]$	richtig
12	$x \in [-\frac{7}{4}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-14}{8})$	DF: Ränder nicht beachtet

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu