Blatt Nr 05.05

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 5

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Verschiebung
Keine	Funktionen	Nummer: 22 0 200405004	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.1: Gegeben sei die Funktion $f(x) = (4x + 1)\ln(x - 2)$. Verschieben Sie die Funktion so, dass der Punkt $(5\ ,\ f(5))$ in den Punkt $(10\ ,\ 25\ln 3)$ verschoben wird.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Aufgabe $(n \in 1..6)$ $x_n > 1$, $x_5 > x_4 > x_3 > x_2$, $x_6 > x_1 \cdot x_4 + x_2$

Die Funktion lautet: $(x_1 \cdot x\ +\ x_2)\ln(x\ -\ x_3)$
Die Punkte sind $(x_4\ ,\ f(x_4))$ und $(x_5\ ,\ x_6 \cdot \ln\{x_4\ -\ x_3\})$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = 5 \quad x_5 = 10 \quad x_6 = 25.$

Erklärung:

Sei $y := f(x)$. Eine Verschiebung vom Punkt (a, b) in den Punkt (c, d) ist eine Verschiebung um den Vektor $(c - a, d - b)$.

Rechnung:

Damit ergibt sich für die Funktion: $y - (d - b) = f(x - (c - a))$ oder $y = f(x - c + a) + d - b$. $f(5) = (4 \cdot 5 + 1)\ln(5 - 2) = 21\ln 3$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_{\text{neu}}\ (x) &= f(x - (10 - 5)) + 25\ln 3 - 21\ln 3 \\ &= f(x - 5) + 4\ln 3 \\ &= (4(x - 5) + 1)\ln((x - 5) - 2) + 4\ln 3 \\ &= (4x - 19)\ln(x - 7) + 4\ln 3 \end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $(4x - 59)\ln(x - 17) - 4\ln 3$	2 $(4x - 19)\ln(x - 7) - 4\ln 3$	3 $(4x + 59)\ln(x + 17) - 4\ln 7$
4 $(4x - 59)\ln(x - 17) + 4\ln 3$	5 $(4x + 19)\ln(x + 7) - 4\ln 3$	6 $(4x + 19)\ln(x + 7) + 4\ln 3$
7 $(4x - 59)\ln(x - 17) - 4\ln 7$	8 $(4x - 59)\ln(x - 17) + 4\ln 7$	9 $(4x + 59)\ln(x + 17) + 4\ln 3$
☒ $(4x - 19)\ln(x - 7) + 4\ln 3$	11 $(4x + 59)\ln(x + 17) - 4\ln 3$	12 $(4x + 59)\ln(x + 17) + 4\ln 7$

Fehlerinterpretation:

1	$(4x - 59)\ln(x - 17) - 4\ln 3$	DF: falsch verschoben
2	$(4x - 19)\ln(x - 7) - 4\ln 3$	DF: falsch verschoben
3	$(4x + 59)\ln(x + 17) - 4\ln 7$	DF: falsch verschoben
4	$(4x - 59)\ln(x - 17) + 4\ln 3$	DF: falsch verschoben
5	$(4x + 19)\ln(x + 7) - 4\ln 3$	DF: falsch verschoben
6	$(4x + 19)\ln(x + 7) + 4\ln 3$	DF: falsch verschoben
7	$(4x - 59)\ln(x - 17) - 4\ln 7$	DF: falsch verschoben
8	$(4x - 59)\ln(x - 17) + 4\ln 7$	DF: falsch verschoben
9	$(4x + 59)\ln(x + 17) + 4\ln 3$	DF: falsch verschoben
☒	$(4x - 19)\ln(x - 7) + 4\ln 3$	richtig
11	$(4x + 59)\ln(x + 17) - 4\ln 3$	DF: falsch verschoben
12	$(4x + 59)\ln(x + 17) + 4\ln 7$	DF: falsch verschoben

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Verschiebung
Keine	Funktionen	Nummer: 51 0 200405003	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.2: Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{2x - 5} \cdot \sin(4x + 3)$. Wie lautet die Gleichung der Funktion, die um 8 nach rechts und um 2 nach oben verschoben wurde?

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Aufgabe ($n \in 1..7$) $x_n > 1$, $x_5 < x_6$

Die Funktion lautet: $\sqrt[x_1]{x_2 \cdot x \ - \ x_3} \cdot \sin(x_4 \cdot x \ + \ x_5)$
Der Verschiebungsvektor ist $(x_6\ ,\ x_7)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 4 \quad x_5 = 3 \quad x_6 = 8 \quad x_7 = 2$.

Erklärung:

Sei $y := f(x)$. Eine Funktionsverschiebung um (a, b) wirkt sich so aus, dass a direkt von x und b direkt von y subtrahiert werden muss. $y - b = f(x - a)$ oder $y = f(x - a) + b$.

Rechnung:

Damit ergibt sich:

$$f_{\text{neu}}\ (x) \ = \ f(x-8)+2 \ = \ \sqrt[3]{2(x-8)-5}\cdot\sin(4(x-8)+3)+2 \ = \ \sqrt[3]{2x-21}\cdot\sin(4x-35)+2$$

Angebotene Lösungen:

1	$\sqrt[11]{2x-5}\cdot\sin(4x+3)+2$	2	$\sqrt[3]{2x+21}\cdot\sin(4x+35)+2$	3	$\sqrt[3]{2x+11}\cdot\sin(4x-29)-2$
4	$\sqrt[3]{16-5}\cdot\sin(32x+3)-2$	5	$\sqrt[3]{16x-5}\cdot\sin(32x+3)+2$	6	$\frac{1}{\sqrt[3]{2x-21}\cdot\sin(4x-35)+2}$
☒	$\sqrt[3]{2x-21}\cdot\sin(4x-35)+2$	8	$\sqrt[11]{2x-5}\cdot\sin(4x+3)-2$	9	$\frac{x-8}{\sqrt[3]{2x-5}\cdot\sin(4x+3)}+2$
10	$\frac{x-8}{\sqrt[3]{2x-5}\cdot\sin(4x+3)}-2$	11	$\sqrt[3]{2x+11}\cdot\sin(4x-29)+2$	12	$\sqrt[3]{2x+21}\cdot\sin(4x+35)-2$

Fehlerinterpretation:

1	$\sqrt[11]{2x-5}\cdot\sin(4x+3)+2$	DF: mit Wurzel verknüpft
2	$\sqrt[3]{2x+21}\cdot\sin(4x+35)+2$	RF: addiert statt subtrahiert
3	$\sqrt[3]{2x+11}\cdot\sin(4x-29)-2$	RF: addiert statt subtrahiert
4	$\sqrt[3]{16-5}\cdot\sin(32x+3)-2$	RF: multipliziert statt subtrahiert
5	$\sqrt[3]{16x-5}\cdot\sin(32x+3)+2$	RF: multipliziert statt subtrahiert
6	$\frac{1}{\sqrt[3]{2x-21}\cdot\sin(4x-35)+2}$	DF: mit UKF verwechselt
☒	$\sqrt[3]{2x-21}\cdot\sin(4x-35)+2$	richtig
8	$\sqrt[11]{2x-5}\cdot\sin(4x+3)-2$	DF: mit Wurzel verknüpft
9	$\frac{x-8}{\sqrt[3]{2x-5}\cdot\sin(4x+3)}+2$	DF: mit UKF verwechselt
10	$\frac{x-8}{\sqrt[3]{2x-5}\cdot\sin(4x+3)}-2$	DF: mit UKF verwechselt
11	$\sqrt[3]{2x+11}\cdot\sin(4x-29)+2$	RF: addiert statt subtrahiert
12	$\sqrt[3]{2x+21}\cdot\sin(4x+35)-2$	RF: addiert statt subtrahiert

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Umkehrfunktion
Injektivisierung	Funktionen	Nummer: 66 0 2004050001	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.3: Gegeben sei die Funktion f: $\mathbb{D} \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{\tan(2\cdot x+14)}{21}$ mit $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ maximal. Schränken Sie den Definitionsbereich der nicht injektiven, aber surjektiven Funktion $f(x)$ so ein, dass die Funktion bijektiv (also injektiv und immer noch surjektiv) ist.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Funktion ($n \in 1..3$), $x_n > 1$, x_2 ist Vielfaches von x_1

Die Funktion lautet also: $\frac{\tan(x_1\cdot x+x_2)}{x_3}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 14 \quad x_3 = 21$.

Erklärung:

$\tan x$ ist zwischen zwei senkrechten Asymptoten streng monoton wachsend. Finden Sie zwei benachbarte Asymptoten durch Substitution von $y = 2 \cdot x + 14$.

Rechnung:

$\tan y$ ist nicht definiert für $y = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$. Damit ist $\tan(2 \cdot x + 14)$ nicht definiert für $x = \frac{(2k+1)\pi}{2 \cdot 2} - \frac{14}{2}$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$. Damit ist $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{(2k+1)\pi}{4} - 7; k \in \mathbb{Z}\}$. $\tan y$ ist zwischen zwei benachbarten senkrechten Asymptoten streng monoton. $f(y) \to -\infty$, wenn y gegen die linke Asymptote geht und $f(y) \to \infty$, wenn y gegen die rechte Asymptote geht. Nach dem Zwischenwertsatz ist dann $f(x)$ zwischen zwei benachbarten senkrechten Asymptoten bijektiv.

$$\text{Also zum Beispiel } y \in (\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \text{ oder } x \in (\frac{-\pi}{4} - 7, \frac{\pi}{4} - 7) \qquad k = -1 \text{ und } k = 0$$

Angebotene Lösungen:

1 $x \in (-1, 1]$	2 $x = 0$	3 $x \in [-1, 1]$
4 $x \in (\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$	5 $x \in [\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$	6 $x \in [\frac{-\pi}{4} - 7, \frac{\pi}{4} - 7)$
7 $x \in [\frac{-\pi}{4} + 7, \frac{\pi}{4} + 7]$	8 $x \in (\frac{-\pi}{4} - 7, \frac{\pi}{4} + 7)$	☒ $x \in (\frac{-\pi}{4} - 7, \frac{\pi}{4} - 7)$
10 $x \in \mathbb{R}$	11 $x \in (\frac{-\pi}{4} - 7, \frac{\pi}{4} + 7]$	12 $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Fehlerinterpretation:

1	$x \in (-1, 1]$	DF: Lösung geraten
2	$x = 0$	DF: Lösung geraten
3	$x \in [-1, 1]$	DF: Lösung geraten
4	$x \in (\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$	DF: falsch substituiert
5	$x \in [\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$	DF: falsch substituiert
6	$x \in [\frac{-\pi}{4} - 7, \frac{\pi}{4} - 7)$	DF: Ränder nicht beachtet
7	$x \in [\frac{-\pi}{4} + 7, \frac{\pi}{4} + 7]$	DF: falsch substituiert
8	$x \in (\frac{-\pi}{4} - 7, \frac{\pi}{4} + 7)$	RF: falsch substituiert
☒	$x \in (\frac{-\pi}{4} - 7, \frac{\pi}{4} - 7)$	richtig
10	$x \in \mathbb{R}$	DF: Lösung geraten
11	$x \in (\frac{-\pi}{4} - 7, \frac{\pi}{4} + 7]$	RF: falsch substituiert
12	$x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	DF: nicht substituiert

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Symmetrie
Achsensymmetrie	Funktionen	Nummer: 75 0 200405007	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.4: Zu welchem Punkt bzw. zu welcher Achse ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f : \mathbb{R} \backslash \{1\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{5 \sin(3x - 3)}{\sqrt[3]{2x - 2}} + 7$$

(AS) = achsensymmetrisch − (PS) = punktsymmetrisch.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe $(n \in 1..5)$ $x_n > 1$
$x = x_3$ ist die Symmetrieachse

Die Funktion lautet: $\frac{x_1 \cdot \sin(x_2 \cdot x - \{x_3 \cdot x_2\})}{\sqrt[3]{x_4 \cdot x - \{x_3 \cdot x_4\}}} + x_5$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 2 \quad x_5 = 7$.

Erklärung:

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(a, b) \Leftrightarrow f(a - x) + f(a + x) = 2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x = a \Leftrightarrow f(a - x) = f(a + x)$.

Rechnung:

$$f(x) = \frac{5 \sin(3x - 3)}{\sqrt[3]{2x - 2}} + 7 = \frac{5 \sin(3(x - 1))}{\sqrt[3]{2(x - 1)}} + 7$$

Damit wird die Symmetrie zur Achse $x = 1$ vermutet:

$$\begin{aligned} f(1-x) &= \frac{5\sin(3((1-x)-1))}{\sqrt[3]{2((1-x)-1)}} + 7 \\ &= \frac{5\sin(-3x)}{\sqrt[3]{-2x}} + 7 \\ &= \frac{-5\sin(3x)}{-\sqrt[3]{2x}} + 7 \\ &= \frac{5\sin(3x)}{\sqrt[3]{2x}} + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1+x) &= \frac{5\sin(3((1+x)-1))}{\sqrt[3]{2((1+x)-1)}} + 7 \\ &= \frac{5\sin(3x)}{\sqrt[3]{2x}} + 7 = f(1-x) \end{aligned}$$

Damit ist die Symmetrie zur Achse $x = 1$ gezeigt.

Angebotene Lösungen:

[1] PS $(0,0)$	[2] PS $(1,7)$	[3] PS $(-1,7)$	[X] AS $x = 1$
[5] PS $(-1,-7)$	[6] AS $x = 2$	[7] AS $x = -7$	[8] AS $x = -1$
[9] AS $x = 7$	[10] AS $x = -2$	[11] AS $x = 0$	[12] PS $(1,14)$

Fehlerinterpretation:

[1]	PS $(0,0)$	DF: geraten
[2]	PS $(1,7)$	DF: AS nicht erkannt
[3]	PS $(-1,7)$	DF: AS nicht erkannt
[X]	AS $x = 1$	richtig
[5]	PS $(-1,-7)$	DF: AS nicht erkannt
[6]	AS $x = 2$	DF: geraten
[7]	AS $x = -7$	DF: geraten
[8]	AS $x = -1$	RF: falsches Vorzeichen
[9]	AS $x = 7$	DF: geraten
[10]	AS $x = -2$	DF: geraten
[11]	AS $x = 0$	DF: geraten
[12]	PS $(1,14)$	DF: AS nicht erkannt

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Umkehrfunktion
Injektivisierung	Funktionen	Nummer: 77 0 200405002	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.5: Gegeben sei die Funktion f: $\mathbb{D} \to f(\mathbb{D}) = \mathbb{B} : f(x) = 6 \cdot \sin(\sqrt{12 \cdot x + 15}) + 6$ mit $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ maximal. Schränken Sie den Definitionsbereich der nicht injektiven, aber surjektiven (da der Wertebereich = Bildbereich) Funktion $f(x)$ so ein, dass die Funktion bijektiv (also injektiv und immer noch surjektiv) ist.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Funktion $(n \in 1..4)$ $x_n > 1$

Die Funktion lautet also: $x_1 \cdot \sin(\sqrt{x_2 \cdot x\ +\ x_3})\ +\ x_4$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6 \quad x_2 = 12 \quad x_3 = 15 \quad x_4 = 6$.

Erklärung:

Rechnung:

$\sin(\sqrt{y})$ ist nicht definiert für $y < 0$. Also ist $6 \cdot \sin(\sqrt{12 \cdot x + 15}) + 6$ definiert für $12 \cdot x + 15 \geq 0$ und damit $x \geq -\frac{5}{4}$. Da der Wertebereich von $\sin y = [-1\ ,\ 1]$ ist, ist der Bildbereich von $6 \cdot \sin(\sqrt{12 \cdot x + 15}) + 6 =$

$[6-6\ ,\ 6+6]=[0\ ,\ 12]$. $\sin y$ ist injektiv (zum Beispiel) für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Weil die Wurzelfunktion monoton ist, kann der eingeschränkte Definitionsbereich durch Substitution ermittelt werden: $\sqrt{12 \cdot x + 15} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$ und $\sqrt{12 \cdot x + 15} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{(\frac{\pi}{2})^2-15}{12}$. Also ist der gesuchte Definitionsbereich $x \in [\frac{-5}{4}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-15}{12}]$.

Angebotene Lösungen:

1 $x=0$	2 $x \in (-\frac{5}{4}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-15}{12}]$	3 $x \in [-\frac{5}{4}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-15}{12})$	4 $x \in [-\frac{5}{4}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+15}{12}]$
5 $x \in [-\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+15}{12}]$	6 $x \in \mathbb{R}$	☒ $x \in [-\frac{5}{4}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-15}{12}]$	8 $x \in (\frac{5}{4}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+15}{12}]$
9 $x \in (\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+15}{12})$	10 $x \in [-\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-15}{12})$	11 $x \in [\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-15}{12})$	12 $x \in (-1, 1]$

Fehlerinterpretation:

1 $x=0$	DF: Lösung geraten
2 $x \in (-\frac{5}{4}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-15}{12}]$	DF: Ränder nicht beachtet
3 $x \in [-\frac{5}{4}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-15}{12})$	DF: Ränder nicht beachtet
4 $x \in [-\frac{5}{4}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+15}{12}]$	DF: falsch substituiert
5 $x \in [-\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+15}{12}]$	DF: falsch substituiert
6 $x \in \mathbb{R}$	DF: Lösung geraten
☒ $x \in [-\frac{5}{4}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-15}{12}]$	richtig
8 $x \in (\frac{5}{4}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+15}{12}]$	DF: falsch substituiert
9 $x \in (\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+15}{12})$	DF: falsch substituiert
10 $x \in [-\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-15}{12})$	DF: falsch substituiert
11 $x \in [\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-15}{12})$	DF: falsch substituiert
12 $x \in (-1, 1]$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Symmetrie
Punktsymmetrie	Funktionen	Nummer: 84 0 200405006	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.6: Zu welchem Punkt bzw. zu welcher Achse ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{4x-12}{9x^2-72x+90} + 2$$

(AS) = achsensymmetrisch − (PS) = punktsymmetrisch.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe ($n \in 1..4$) $x_n > 1$
(x_2, x_4) ist der Symmetriepunkt

Die Funktion lautet: $\frac{x_1\ x - \{x_1 \cdot x_2\}}{x_3 x^2\ -\ \{2 \cdot x_3 \cdot 4\} x + \{x_3 \cdot (x_1^2+1)\}}\ +\ x_4$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 9 \quad x_4 = 2.$

Erklärung:

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(a, b) \Leftrightarrow f(a-x) + f(a+x) = 2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x = a \Leftrightarrow f(a-x) = f(a+x)$.

Rechnung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{4x-12}{9x^2-54x+90} + 2 \\ &= \tfrac{4(x-3)}{9(x^2-6x+9+1)} + 2 \\ &= \tfrac{4}{9} \cdot \tfrac{x-3}{(x-3)^2+1} + 2 \end{aligned}$$

Damit wird eine Symmetrie zum Punkt $(3, ?)$ vermutet:

$$\begin{aligned} f(3-x)+f(3+x) &= \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{(3-x)-3}{((3-x)-3)^2+1}+2+\tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{(3+x)-3}{((3+x)-3)^2+1}+2 \\ &= \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{-x}{(-x)^2+1}+\tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{x}{x^2+1}+4 \\ &= \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{x-x}{x^2+1}+4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Damit ist $b = 2$ und die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt $(3\,,\,2)$.

Angebotene Lösungen:

1 PS $(2,3)$	2 PS $(-3,-2)$	3 AS $x=-\frac{4}{9}$	4 PS $(-3,2)$
5 AS $x=\frac{4}{9}$	☒ PS $(3,2)$	7 nicht symmetrisch	8 PS $(-2,-3)$
9 AS $x=-3$	10 AS $x=3$	11 PS $(3,-2)$	12 PS $(0,0)$

Fehlerinterpretation:

1	PS $(2,3)$	DF: Koordinaten vertauscht
2	PS $(-3,-2)$	RF: falsches Vorzeichen
3	AS $x=-\frac{4}{9}$	DF: geraten
4	PS $(-3,2)$	RF: falsches Vorzeichen
5	AS $x=\frac{4}{9}$	DF: geraten
☒	PS $(3,2)$	richtig
7	nicht symmetrisch	DF: PS nicht erkannt
8	PS $(-2,-3)$	DF: Koordinaten vertauscht
9	AS $x=-3$	DF: PS nicht erkannt
10	AS $x=3$	DF: PS nicht erkannt
11	PS $(3,-2)$	RF: falsches Vorzeichen
12	PS $(0,0)$	DF: geraten

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Umkehrfunktion
Keine	Funktionen	Nummer: 90 0 200405005	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.7: Bestimmen Sie die Umkehrfunktion der (bijektiven) Funktion

$$f : \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^+ \qquad f(x) = 2(e^{(x-3)^2} - 1)$$

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Funktion $(n \in 1..2)$ $x_n > 1$

Die Funktion lautet: $x_1(e^{(x\,-\,x_2)^2} - 1)$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$.

Erklärung:

Sei $y := f(x)$. Das Bilden der Umkehrfunktion bedeutet das Vertauschen von x und y und anschließend das Auflösen nach y.

Rechnung:

$y = 2(e^{(x-3)^2} - 1)$ wird zu $x = 2(e^{(y-3)^2} - 1)$.

$$\begin{array}{rlcl} f^{-1}(x) & : \quad x & = & 2(e^{(y-3)^2}-1) \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{2} & = & e^{(y-3)^2} \\ & \Leftrightarrow \quad \ln(\frac{x+2}{2}) & = & (y-3)^2 \\ & \Leftrightarrow \quad \pm\sqrt{\ln(\frac{x+2}{2})} & = & y-3 \\ & \Leftrightarrow \quad \pm\sqrt{\ln(\frac{x+2}{2})}+3 & = & y \end{array}$$

Weil der Definitionsbereich von $f(x)$ $\mathbb{R}_0^-$ ist, muss hier der negative Teil der Wurzel als Umkehrfunktion gewählt werden. Verifikation durch eine Punktprobe: $f(-1) = 2(e^{((-1)-3)^2} - 1) = 2e^{16} - 2$. Also muss $f^{-1}(2e^{16} - 2) = -1$ sein:

$$\begin{aligned} f^{-1}(2e^{16} - 2) &= -\sqrt{\ln(\tfrac{(2e^{16}-2)+2}{2})} + 3 \\ &= -\sqrt{\ln(\tfrac{2e^{16}}{2})} + 3 \\ &= -\sqrt{\ln(e^{16})} + 3 \\ &= -\sqrt{16} + 3 \\ &= -|4| + 3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})} - 2$	2 $\sqrt{\ln(\frac{x-2}{2})} + 3$	3 $-\sqrt{\ln(\frac{x+3}{3})} + 2$
4 $\sqrt{\ln(\frac{x+3}{3})} + 2$	5 $\ln(\sqrt{\frac{x-2}{2}}) + 3$	6 $\sqrt{\ln(\frac{x-2}{2})} - 3$
7 $-\ln(\sqrt{\frac{x+2}{2}}) + 3$	8 $-\ln(\sqrt{\frac{x-2}{2}}) - 3$	9 $-\sqrt{\ln(\frac{x-2}{2})} + 3$
10 $\sqrt{\ln(\frac{x+2}{2})} + 3$	☒ $-\sqrt{\ln(\frac{x+2}{2})} + 3$	12 $-\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})} - 2$

Fehlerinterpretation:

1	$\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})} - 2$	DF: falsches Vorzeichen gewählt
2	$\sqrt{\ln(\frac{x-2}{2})} + 3$	RF: falsch umgeformt
3	$-\sqrt{\ln(\frac{x+3}{3})} + 2$	DF: falsche Reihenfolge
4	$\sqrt{\ln(\frac{x+3}{3})} + 2$	DF: falsches Vorzeichen gewählt
5	$\ln(\sqrt{\frac{x-2}{2}}) + 3$	DF: falsche Reihenfolge
6	$\sqrt{\ln(\frac{x-2}{2})} - 3$	RF: falsch umgeformt
7	$-\ln(\sqrt{\frac{x+2}{2}}) + 3$	DF: falsche Reihenfolge
8	$-\ln(\sqrt{\frac{x-2}{2}}) - 3$	DF: falsche Reihenfolge
9	$-\sqrt{\ln(\frac{x-2}{2})} + 3$	RF: falsch umgeformt
10	$\sqrt{\ln(\frac{x+2}{2})} + 3$	DF: falsches Vorzeichen gewählt
☒	$-\sqrt{\ln(\frac{x+2}{2})} + 3$	richtig
12	$-\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})} - 2$	DF: falsche Reihenfolge

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Symmetrie
Punktsymmetrie	Funktionen	Nummer: 104 0 2004050008	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.8: Zu welchen Punkten bzw. zu welchen Achsen ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{2}{\tan(7x)} + 5 \qquad \mathbb{D} \text{ maximal}$$

(AS) = achsensymmetrisch – (PS) = punktsymmetrisch – bei der Lösung sei k eine beliebige ganze Zahl.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe ($n \in 1..3$), $x_1 \neq x_2$, $x_n > 1$.

Die Funktion lautet: $\frac{x_1}{\tan(x_2\, x)} + x_3$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 7 \quad x_3 = 5$.

Erklärung:

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(a,b) \Leftrightarrow f(a-x)+f(a+x)=2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x=a \Leftrightarrow f(a-x)=f(a+x)$. $\tan x$ ist zu jedem 'Nulldurchgang' punktsymmetrisch.

Rechnung:

$f(x) \;=\; \frac{2}{\tan(7x)}+5 \;=\; \frac{2\cos(7x)}{\sin(7x)}+5.$
$f(x)$ hat für $7x=k\pi \;\Leftrightarrow\; x=\frac{k}{7\pi}$ senkrechte Asymptoten.
$2\cos(7x) \;=\; 0$ für $7x=(2k+1)\frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; x=(2k+1)\frac{\pi}{14}$
$((2k+1)\frac{\pi}{14},5)$ sind die Kandidaten für Symmetriepunkte $-\; a=(2k+1)\frac{\pi}{14}$, $b=5$.

$$\begin{aligned}
f(a+x) &= \frac{2\cos(7((2k+1)\frac{\pi}{14}+x))}{\sin(7((2k+1)\frac{\pi}{14}+x))}+5 \\
&= 2\frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2}+7x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}+7x)}+5 \\
&= 2\frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(7x)-\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(7x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(7x)+\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(7x)}+5 && \text{Additionstheoreme} \\
&= 2\frac{-\sin(7x)}{\cos(7x)}+5 && \sin((2k+1)\tfrac{\pi}{2})=1 \quad \cos((2k+1)\tfrac{\pi}{2})=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(a-x) &= \frac{2\cos(7((2k+1)\frac{\pi}{14}-x))}{\sin(7((2k+1)\frac{\pi}{14}-x))}+5 \\
&= 2\frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2}-7x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}-7x)}+5 \\
&= 2\frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(7x)+\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(7x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(7x)-\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(7x)}+5 && \text{Additionstheoreme} \\
&= 2\frac{\sin(7x)}{\cos(7x)}+5 && \sin((2k+1)\tfrac{\pi}{2})=1 \quad \cos((2k+1)\tfrac{\pi}{2})=0
\end{aligned}$$

Damit ist $f(a+x)+f(a-x) \;=\; 2\frac{-\sin(7x)}{\cos(7x)}+5+2\frac{\sin(7x)}{\cos(7x)}+5 \;=\; 2\cdot 5.$
Dies war zu zeigen. Hausaufgabe: Zeigen Sie, dass es keine weiteren Symmetrien gibt.

Angebotene Lösungen:

☒ PS $((2k+1)\frac{\pi}{14},5)$	2 AS $x=\frac{k\pi}{7}$	3 PS $(\frac{k\cdot\pi}{7},0)$	4 PS $(k\cdot\pi,5)$
5 AS $x=2\cdot(2k+1)\frac{\pi}{14}$	6 AS $x=(2k+1)\frac{\pi}{14}$	7 PS $(\frac{k\cdot\pi}{7},10)$	8 AS $x=2\cdot\frac{k\pi}{7}$
9 PS $((2k+1)\frac{\pi}{14},0)$	10 PS $((2k+1)\frac{\pi}{14},10)$	11 nicht symmetrisch	12 PS $((2k+1)\frac{\pi}{2},5)$

Fehlerinterpretation:

☒ PS $((2k+1)\frac{\pi}{14},5)$	richtig
2 AS $x=\frac{k\pi}{7}$	DF: f ist PS
3 PS $(\frac{k\cdot\pi}{7},0)$	DF: $y-$ Wert falsch
4 PS $(k\cdot\pi,5)$	DF: Periode ignoriert
5 AS $x=2\cdot(2k+1)\frac{\pi}{14}$	DF: f ist PS
6 AS $x=(2k+1)\frac{\pi}{14}$	DF: f ist PS
7 PS $(\frac{k\cdot\pi}{7},10)$	DF: $y-$ Wert falsch
8 AS $x=2\cdot\frac{k\pi}{7}$	DF: f ist PS
9 PS $((2k+1)\frac{\pi}{14},0)$	DF: $y-$ Wert falsch
10 PS $((2k+1)\frac{\pi}{14},10)$	DF: $y-$ Wert falsch
11 nicht symmetrisch	DF: PS nicht erkannt
12 PS $((2k+1)\frac{\pi}{2},5)$	DF: Periode ignoriert

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu