Blatt Nr 05.07

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 5

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Symmetrie
Achsensymmetrie	Funktionen	Nummer: 3 0 200405007	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.1: Zu welchem Punkt bzw. zu welcher Achse ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f : \mathbb{R}\backslash\{3\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{3\sin(3x-9)}{\sqrt[3]{3x-9}} + 4$$

(AS) = achsensymmetrisch − (PS) = punktsymmetrisch.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe ($n \in 1..5$) $x_n > 1$
$x = x_3$ ist die Symmetrieachse

Die Funktion lautet: $\frac{x_1\cdot\sin(x_2\cdot x-\{x_3\cdot x_2\})}{\sqrt[3]{x_4\cdot x-\{x_3\cdot x_4\}}} +\ x_5$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = 3 \quad x_5 = 4$.

Erklärung:

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(a, b) \Leftrightarrow f(a-x) + f(a+x) = 2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x = a \Leftrightarrow f(a-x) = f(a+x)$.

Rechnung:

$$f(x) = \frac{3\sin(3x-9)}{\sqrt[3]{3x-9}} + 4 = \frac{3\sin(3(x-3))}{\sqrt[3]{3(x-3)}} + 4$$

Damit wird die Symmetrie zur Achse $x = 3$ vermutet:

$$\begin{aligned} f(3-x) &= \tfrac{3\sin(3((3-x)-3))}{\sqrt[3]{3((3-x)-3)}} + 4 \\ &= \tfrac{3\sin(-3x)}{\sqrt[3]{-3x}} + 4 \\ &= \tfrac{-3\sin(3x)}{-\sqrt[3]{3x}} + 4 \\ &= \tfrac{3\sin(3x)}{\sqrt[3]{3x}} + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3+x) &= \tfrac{3\sin(3((3+x)-3))}{\sqrt[3]{3((3+x)-3)}} + 4 \\ &= \tfrac{3\sin(3x)}{\sqrt[3]{3x}} + 4 = f(3-x) \end{aligned}$$

Damit ist die Symmetrie zur Achse $x = 3$ gezeigt.

Angebotene Lösungen:

1 nicht symmetrisch	2 PS $(3, 4)$	3 AS $x = 6$	☒ AS $x = 3$
5 AS $x = 4$	6 PS $(0, 0)$	7 AS $x = -3$	8 PS $(-3, -8)$
9 PS $(3, 8)$	10 AS $x = 0$	11 PS $(-3, -4)$	12 AS $x = -6$

Fehlerinterpretation:

$\boxed{1}$	nicht symmetrisch	DF: AS nicht erkannt
$\boxed{2}$	PS $(3, 4)$	DF: AS nicht erkannt
$\boxed{3}$	AS $x = 6$	DF: geraten
$\boxtimes$	AS $x = 3$	richtig
$\boxed{5}$	AS $x = 4$	DF: geraten
$\boxed{6}$	PS $(0, 0)$	DF: geraten
$\boxed{7}$	AS $x = -3$	RF: falsches Vorzeichen
$\boxed{8}$	PS $(-3, -8)$	DF: AS nicht erkannt
$\boxed{9}$	PS $(3, 8)$	DF: AS nicht erkannt
$\boxed{10}$	AS $x = 0$	DF: geraten
$\boxed{11}$	PS $(-3, -4)$	DF: AS nicht erkannt
$\boxed{12}$	AS $x = -6$	DF: geraten

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Verschiebung
Keine	Funktionen	Nummer: 33 0 200405004	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.2: Gegeben sei die Funktion $f(x) = (3x + 4)\ln(x - 3)$. Verschieben Sie die Funktion so, dass der Punkt $(6\ ,\ f(6))$ in den Punkt $(13\ ,\ 26\ln 3)$ verschoben wird.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Aufgabe $(n \in 1..6)$ $x_n > 1$, $x_5 > x_4 > x_3 > x_2$, $x_6 > x_1 \cdot x_4 + x_2$

Die Funktion lautet: $(x_1 \cdot x\ +\ x_2)\ln(x\ -\ x_3)$
Die Punkte sind $(x_4\ ,\ f(x_4))$ und $(x_5\ ,\ x_6 \cdot \ln\{x_4\ -\ x_3\})$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = 6 \quad x_5 = 13 \quad x_6 = 26.$

Erklärung:

Sei $y := f(x)$. Eine Verschiebung vom Punkt (a, b) in den Punkt (c, d) ist eine Verschiebung um den Vektor $(c - a, d - b)$.

Rechnung:

Damit ergibt sich für die Funktion: $y - (d - b) = f(x - (c - a))$ oder $y = f(x - c + a) + d - b$. $f(6) = (3 \cdot 6 + 4)\ln(6 - 3) = 22\ln 3$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_{\text{neu}}(x) &= f(x - (13 - 6)) + 26\ln 3 - 22\ln 3 \\ &= f(x - 7) + 4\ln 3 \\ &= (3(x - 7) + 4)\ln((x - 7) - 3) + 4\ln 3 \\ &= (3x - 17)\ln(x - 10) + 4\ln 3 \end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

$\boxed{1}$	$(3x + 53)\ln(x + 22) + 4\ln 9$	$\boxed{2}$	$(3x - 53)\ln(x - 22) + 4\ln 9$	$\boxed{3}$	$(3x + 17)\ln(x + 10) + 4\ln 3$
$\boxed{4}$	$(3x + 53)\ln(x + 22) - 4\ln 3$	$\boxed{5}$	$(3x + 53)\ln(x + 22) - 4\ln 9$	$\boxed{6}$	$(3x - 53)\ln(x - 22) - 4\ln 3$
$\boxed{7}$	$(3x + 17)\ln(x + 10) - 4\ln 3$	$\boxed{8}$	$(3x - 17)\ln(x - 10) - 4\ln 3$	$\boxtimes$	$(3x - 17)\ln(x - 10) + 4\ln 3$
$\boxed{10}$	$(3x - 53)\ln(x - 22) - 4\ln 9$	$\boxed{11}$	$(3x - 53)\ln(x - 22) + 4\ln 3$	$\boxed{12}$	$(3x + 53)\ln(x + 22) + 4\ln 3$

Fehlerinterpretation:

1	$(3x+53)\ln(x+22)+4\ln 9$	DF: falsch verschoben
2	$(3x-53)\ln(x-22)+4\ln 9$	DF: falsch verschoben
3	$(3x+17)\ln(x+10)+4\ln 3$	DF: falsch verschoben
4	$(3x+53)\ln(x+22)-4\ln 3$	DF: falsch verschoben
5	$(3x+53)\ln(x+22)-4\ln 9$	DF: falsch verschoben
6	$(3x-53)\ln(x-22)-4\ln 3$	DF: falsch verschoben
7	$(3x+17)\ln(x+10)-4\ln 3$	DF: falsch verschoben
8	$(3x-17)\ln(x-10)-4\ln 3$	DF: falsch verschoben
☒	$(3x-17)\ln(x-10)+4\ln 3$	richtig
10	$(3x-53)\ln(x-22)-4\ln 9$	DF: falsch verschoben
11	$(3x-53)\ln(x-22)+4\ln 3$	DF: falsch verschoben
12	$(3x+53)\ln(x+22)+4\ln 3$	DF: falsch verschoben

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Symmetrie
Punktsymmetrie	Funktionen	Nummer: 37 0 2004050008	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.3: Zu welchen Punkten bzw. zu welchen Achsen ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \qquad f(x) \quad = \quad \frac{3}{\tan(5x)} + 3 \qquad \mathbb{D} \text{ maximal}$$

(AS) = achsensymmetrisch − (PS) = punktsymmetrisch − bei der Lösung sei k eine beliebige ganze Zahl.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe ($n \in 1..3$), $x_1 \neq x_2$, $x_n > 1$.

Die Funktion lautet: $\frac{x_1}{\tan(x_2\, x)} + x_3$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 3$.

Erklärung:

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(a, b) \Leftrightarrow f(a-x) + f(a+x) = 2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x = a \Leftrightarrow f(a-x) = f(a+x)$. $\tan x$ ist zu jedem 'Nulldurchgang' punktsymmetrisch.

Rechnung:

$f(x) \;=\; \frac{3}{\tan(5x)} + 3 \;=\; \frac{3\cos(5x)}{\sin(5x)} + 3.$
$f(x)$ hat für $5x = k\pi \;\Leftrightarrow\; x = \frac{k}{5\pi}$ senkrechte Asymptoten.
$3\cos(5x) \;=\; 0$ für $5x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; x = (2k+1)\frac{\pi}{10}$
$((2k+1)\frac{\pi}{10}, 3)$ sind die Kandidaten für Symmetriepunkte − $a = (2k+1)\frac{\pi}{10}$, $b = 3$.

$$\begin{aligned}
f(a+x) &= \tfrac{3\cos(5((2k+1)\frac{\pi}{10}+x))}{\sin(5((2k+1)\frac{\pi}{10}+x))} + 3 \\
&= 3\tfrac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2}+5x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}+5x)} + 3 \\
&= 3\tfrac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(5x)-\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(5x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(5x)+\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(5x)} + 3 && \text{Additionstheoreme} \\
&= 3\tfrac{-\sin(5x)}{\cos(5x)} + 3 && \sin((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = 1 \quad \cos((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(a-x) &= \tfrac{3\cos(5((2k+1)\frac{\pi}{10}-x))}{\sin(5((2k+1)\frac{\pi}{10}-x))} + 3 \\
&= 3\tfrac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2}-5x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}-5x)} + 3 \\
&= 3\tfrac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(5x)+\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(5x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(5x)-\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(5x)} + 3 && \text{Additionstheoreme} \\
&= 3\tfrac{\sin(5x)}{\cos(5x)} + 3 && \sin((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = 1 \quad \cos((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = 0
\end{aligned}$$

Damit ist $f(a+x) + f(a-x) \;=\; 3\frac{-\sin(5x)}{\cos(5x)} + 3 + 3\frac{\sin(5x)}{\cos(5x)} + 3 \;=\; 2\cdot 3.$
Dies war zu zeigen. Hausaufgabe: Zeigen Sie, dass es keine weiteren Symmetrien gibt.

Angebotene Lösungen:

1 AS $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$	2 PS $(k \cdot \pi, 3)$	3 PS $((2k+1)\frac{\pi}{2}, 3)$	4 AS $x = 3 \cdot \frac{k\pi}{5}$
5 PS $((2k+1)\frac{\pi}{10}, 6)$	6 PS $(\frac{k\cdot\pi}{5}, 6)$	☒ PS $((2k+1)\frac{\pi}{10}, 3)$	8 PS $(\frac{k\cdot\pi}{5}, 0)$
9 AS $x = \frac{k\pi}{5}$	10 AS $x = 3 \cdot (2k+1)\frac{\pi}{10}$	11 AS $x = k\pi$	12 nicht symmetrisch

Fehlerinterpretation:

1 AS $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$	DF: Periode ignoriert
2 PS $(k \cdot \pi, 3)$	DF: Periode ignoriert
3 PS $((2k+1)\frac{\pi}{2}, 3)$	DF: Periode ignoriert
4 AS $x = 3 \cdot \frac{k\pi}{5}$	DF: f ist PS
5 PS $((2k+1)\frac{\pi}{10}, 6)$	DF: $y-$ Wert falsch
6 PS $(\frac{k\cdot\pi}{5}, 6)$	DF: $y-$ Wert falsch
☒ PS $((2k+1)\frac{\pi}{10}, 3)$	richtig
8 PS $(\frac{k\cdot\pi}{5}, 0)$	DF: $y-$ Wert falsch
9 AS $x = \frac{k\pi}{5}$	DF: f ist PS
10 AS $x = 3 \cdot (2k+1)\frac{\pi}{10}$	DF: f ist PS
11 AS $x = k\pi$	DF: Periode ignoriert
12 nicht symmetrisch	DF: PS nicht erkannt

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Umkehrfunktion
Keine	Funktionen	Nummer: 42 0 200405005	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.4: Bestimmen Sie die Umkehrfunktion der (bijektiven) Funktion

$$f : \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^+ \qquad f(x) = 4(e^{(x-4)^2} - 1)$$

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Funktion $(n \in 1..2)$ $x_n > 1$

Die Funktion lautet: $x_1(e^{(x\,-\,x_2)^2} - 1)$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \qquad x_2 = 4$.

Erklärung:

Sei $y := f(x)$. Das Bilden der Umkehrfunktion bedeutet das Vertauschen von x und y und anschließend das Auflösen nach y.

Rechnung:

$y = 4(e^{(x-4)^2} - 1)$ wird zu $x = 4(e^{(y-4)^2} - 1)$.

$$\begin{array}{rlcl} f^{-1}(x) & : \quad x & = & 4(e^{(y-4)^2} - 1) \\ \Leftrightarrow & \frac{x+4}{4} & = & e^{(y-4)^2} \\ \Leftrightarrow & \ln(\frac{x+4}{4}) & = & (y-4)^2 \\ \Leftrightarrow & \pm\sqrt{\ln(\frac{x+4}{4})} & = & y-4 \\ \Leftrightarrow & \pm\sqrt{\ln(\frac{x+4}{4})}\ +4 & = & y \end{array}$$

Weil der Definitionsbereich von $f(x)$ $\mathbb{R}_0^-$ ist, muss hier der negative Teil der Wurzel als Umkehrfunktion gewählt werden. Verifikation durch eine Punktprobe: $f(-1) = 4(e^{((-1)-4)^2} - 1) = 4e^{25} - 4$. Also muss $f^{-1}(4e^{25} - 4) = -1$ sein:

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(4e^{25} - 4) & = & -\sqrt{\ln(\frac{(4e^{25}-4)+4}{4})}\ +4 \\ & = & -\sqrt{\ln(\frac{4e^{25}}{4})}\ +4 \\ & = & -\sqrt{\ln(e^{25})}\ +4 \\ & = & -\sqrt{25}\ +4 \\ & = & -|5|\ +4 \\ & = & -1 \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

$\boxed{1}$ $-\sqrt{\ln(\frac{x-4}{4})}-4$	$\boxed{2}$ $\ln(\sqrt{\frac{x+4}{4}})+4$	$\boxed{3}$ $-\ln(\sqrt{\frac{x+4}{4}})+4$
$\boxed{4}$ $\ln(\sqrt{\frac{x-4}{4}})+4$	$\boxed{5}$ $\sqrt{\ln(\frac{x-4}{4})}-4$	$\boxed{6}$ $-\ln(\sqrt{\frac{x-4}{4}})-4$
$\boxed{7}$ $\sqrt{\ln(\frac{x+4}{4})}+4$	$\boxtimes$ $-\sqrt{\ln(\frac{x+4}{4})}+4$	$\boxed{9}$ $\sqrt{\ln(\frac{x-4}{4})}+4$
$\boxed{10}$ $-\sqrt{\ln(\frac{x-4}{4})}+4$	$\boxed{11}$ 161	$\boxed{12}$ 162

Fehlerinterpretation:

$\boxed{1}$	$-\sqrt{\ln(\frac{x-4}{4})}-4$	DF: falsche Reihenfolge	
$\boxed{2}$	$\ln(\sqrt{\frac{x+4}{4}})+4$	DF: falsche Reihenfolge	
$\boxed{3}$	$-\ln(\sqrt{\frac{x+4}{4}})+4$	DF: falsche Reihenfolge	
$\boxed{4}$	$\ln(\sqrt{\frac{x-4}{4}})+4$	DF: falsche Reihenfolge	
$\boxed{5}$	$\sqrt{\ln(\frac{x-4}{4})}-4$	DF: falsches Vorzeichen gewählt	
$\boxed{6}$	$-\ln(\sqrt{\frac{x-4}{4}})-4$	DF: falsche Reihenfolge	
$\boxed{7}$	$\sqrt{\ln(\frac{x+4}{4})}+4$	DF: falsches Vorzeichen gewählt	
$\boxtimes$	$-\sqrt{\ln(\frac{x+4}{4})}+4$	richtig	
$\boxed{9}$	$\sqrt{\ln(\frac{x-4}{4})}+4$	RF: falsch umgeformt	
$\boxed{10}$	$-\sqrt{\ln(\frac{x-4}{4})}+4$	RF: falsch umgeformt	
$\boxed{11}$	161	GL:	geratene Lösung
$\boxed{12}$	162	GL:	geratene Lösung

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Symmetrie
Punktsymmetrie	Funktionen	Nummer: 49 0 200405006	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.5: Zu welchem Punkt bzw. zu welcher Achse ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad f(x)=\frac{5x-15}{7x^2-70x+70}+3$$

(AS) = achsensymmetrisch − (PS) = punktsymmetrisch.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe $(n\in 1..4)$ $x_n>1$
(x_2,x_4) ist der Symmetriepunkt

Die Funktion lautet: $\frac{x_1\,x-\{x_1\cdot x_2\}}{x_3x^2\,-\,\{2\cdot x_3\cdot 5\}x+\{x_3\cdot(x_1^2+1)\}}\;+\;x_4$

In dieser Aufgabe sind $x_1=5\quad x_2=3\quad x_3=7\quad x_4=3.$

Erklärung:

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt (a,b) $\Leftrightarrow$ $f(a-x)+f(a+x)=2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x=a$ $\Leftrightarrow$ $f(a-x)=f(a+x)$.

Rechnung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{5x-15}{7x^2-42x+70}+3\\ &= \tfrac{5(x-3)}{7(x^2-6x+9+1)}+3\\ &= \tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{x-3}{(x-3)^2+1}+3\end{aligned}$$

Damit wird eine Symmetrie zum Punkt $(3, ?)$ vermutet:

$$\begin{aligned} f(3-x)+f(3+x) &= \tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{(3-x)-3}{((3-x)-3)^2+1}+3+\tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{(3+x)-3}{((3+x)-3)^2+1}+3 \\ &= \tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{-x}{(-x)^2+1}+\tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{x}{x^2+1}+6 \\ &= \tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{x-x}{x^2+1}+6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Damit ist $b=3$ und die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt $(3\,,\,3)$.

Angebotene Lösungen:

1 PS $(0,0)$	2 PS $(-3,3)$	3 AS $x=-\frac{5}{7}$	4 PS $(3,-3)$
☒ PS $(3,3)$	6 AS $x=3$	7 AS $x=-3$	8 PS $(-3,-3)$
9 AS $x=0$	10 AS $x=\frac{5}{7}$	11 nicht symmetrisch	12 162

Fehlerinterpretation:

1	PS $(0,0)$	DF: geraten	
2	PS $(-3,3)$	RF: falsches Vorzeichen	
3	AS $x=-\frac{5}{7}$	DF: geraten	
4	PS $(3,-3)$	RF: falsches Vorzeichen	
☒	PS $(3,3)$	richtig	
6	AS $x=3$	DF: PS nicht erkannt	
7	AS $x=-3$	DF: PS nicht erkannt	
8	PS $(-3,-3)$	RF: falsches Vorzeichen	
9	AS $x=0$	DF: geraten	
10	AS $x=\frac{5}{7}$	DF: geraten	
11	nicht symmetrisch	DF: PS nicht erkannt	
12	162	GL:	geratene Lösung

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Umkehrfunktion
Injektivisierung	Funktionen	Nummer: 58 0 2004050001	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.6: Gegeben sei die Funktion f: $\mathbb{D}\to\mathbb{R}: f(x)=\frac{\tan(3\cdot x+12)}{16}$ mit $\mathbb{D}\subseteq\mathbb{R}$ maximal. Schränken Sie den Definitionsbereich der nicht injektiven, aber surjektiven Funktion $f(x)$ so ein, dass die Funktion bijektiv (also injektiv und immer noch surjektiv) ist.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Funktion $(n\in 1..3)$, $x_n>1$, x_2 ist Vielfaches von x_1

Die Funktion lautet also: $\frac{\tan(x_1\cdot x+x_2)}{x_3}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=3 \quad x_2=12 \quad x_3=16$.

Erklärung:

$\tan x$ ist zwischen zwei senkrechten Asymptoten streng monoton wachsend. Finden Sie zwei benachbarte Asymptoten durch Substitution von $y=3\cdot x+12$.

Rechnung:

$\tan y$ ist nicht definiert für $y=\frac{(2k+1)\pi}{2}$ $(\forall k\in\mathbb{Z})$. Damit ist $\tan(3\cdot x+12)$ nicht definiert für $x=\frac{(2k+1)\pi}{2\cdot 3}-\frac{12}{3}$ $(\forall k\in\mathbb{Z})$. Damit ist $\mathbb{D}=\{x\in\mathbb{R}|x\neq\frac{(2k+1)\pi}{6}-4; k\in\mathbb{Z}\}$. $\tan y$ ist zwischen zwei benachbarten senkrechten Asymptoten streng monoton. $f(y)\to-\infty$, wenn y gegen die linke Asymptote geht und $f(y)\to\infty$, wenn y gegen die rechte Asymptote geht. Nach dem Zwischenwertsatz ist dann $f(x)$ zwischen zwei benachbarten senkrechten Asymptoten bijektiv.

$$\text{Also zum Beispiel } y\in(\tfrac{-\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}) \text{ oder } x\in(\frac{-\pi}{6}-4,\frac{\pi}{6}-4) \qquad k=-1 \text{ und } k=0$$

Angebotene Lösungen:

1 $x \in [\frac{-\pi}{6}+4, \frac{\pi}{6}+4]$	2 $x \in [\frac{-\pi}{6}-4, \frac{\pi}{6}-4)$	3 $x \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
4 $x \in [\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$	5 $x \in (-1, 1]$	☒ $x \in (\frac{-\pi}{6}-4, \frac{\pi}{6}-4)$
7 $x \in (-6 \cdot \pi + 4, 6 \cdot \pi + 4]$	8 $x \in [-1, 1]$	9 $x \in (\frac{-\pi}{6}-4, \frac{\pi}{6}+4)$
10 $x = 0$	11 $x \in (\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$	12 $x \in (\frac{-\pi}{6}+4, \frac{\pi}{6}+4)$

Fehlerinterpretation:

1 $x \in [\frac{-\pi}{6}+4, \frac{\pi}{6}+4]$	DF: falsch substituiert
2 $x \in [\frac{-\pi}{6}-4, \frac{\pi}{6}-4)$	DF: Ränder nicht beachtet
3 $x \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	DF: nicht substituiert
4 $x \in [\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$	DF: falsch substituiert
5 $x \in (-1, 1]$	DF: Lösung geraten
☒ $x \in (\frac{-\pi}{6}-4, \frac{\pi}{6}-4)$	richtig
7 $x \in (-6 \cdot \pi + 4, 6 \cdot \pi + 4]$	DF: falsch substituiert
8 $x \in [-1, 1]$	DF: Lösung geraten
9 $x \in (\frac{-\pi}{6}-4, \frac{\pi}{6}+4)$	RF: falsch substituiert
10 $x = 0$	DF: Lösung geraten
11 $x \in (\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$	DF: falsch substituiert
12 $x \in (\frac{-\pi}{6}+4, \frac{\pi}{6}+4)$	DF: falsch substituiert

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Verschiebung
Keine	Funktionen	Nummer: 65 0 200405003	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.7: Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt[5]{6x-3} \cdot \sin(5x+6)$. Wie lautet die Gleichung der Funktion, die um 8 nach rechts und um 6 nach oben verschoben wurde?

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Aufgabe ($n \in 1..7$) $x_n > 1$, $x_5 < x_6$

Die Funktion lautet: $\sqrt[x_1]{x_2 \cdot x \ - \ x_3} \cdot \sin(x_4 \cdot x \ + \ x_5)$
Der Verschiebungsvektor ist $(x_6 \ , \ x_7)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 6 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = 5 \quad x_5 = 6 \quad x_6 = 8 \quad x_7 = 6$.

Erklärung:

Sei $y := f(x)$. Eine Funktionsverschiebung um (a, b) wirkt sich so aus, dass a direkt von x und b direkt von y subtrahiert werden muss. $y - b = f(x - a)$ oder $y = f(x - a) + b$.

Rechnung:

Damit ergibt sich:

$$f_{\text{neu}}(x) = f(x-8)+6 = \sqrt[5]{6(x-8)-3} \cdot \sin(5(x-8)+6)+6 = \sqrt[5]{6x-51} \cdot \sin(5x-46)+6$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{x-8}{\sqrt[5]{6x-3 \cdot \sin(5x+6)}} - 6$	2 $\sqrt[5]{6x+51} \cdot \sin(5x+46)+6$	3 $\sqrt[5]{6x+45} \cdot \sin(5x-34)+6$
☒ $\sqrt[5]{6x-51} \cdot \sin(5x-46)+6$	5 $\sqrt[13]{6x-3} \cdot \sin(5x+6)+6$	6 $\frac{1}{\sqrt[5]{6x-51 \cdot \sin(5x-46)-6}}$
7 $\sqrt[5]{6x+45} \cdot \sin(5x-34)-6$	8 $\frac{x-8}{\sqrt[5]{6x-3 \cdot \sin(5x+6)}} + 6$	9 $\sqrt[5]{48-3} \cdot \sin(40x+6)-6$
10 $\sqrt[5]{6x+51} \cdot \sin(5x+46)-6$	11 $\sqrt[5]{48x-3} \cdot \sin(40x+6)+6$	12 $\sqrt[5]{6x-51} \cdot \sin(5x-46)-6$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{x-8}{\sqrt[5]{6x-3\cdot\sin(5x+6)}}-6$	DF: mit UKF verwechselt
2	$\sqrt[5]{6x+51}\cdot\sin(5x+46)+6$	RF: addiert statt subtrahiert
3	$\sqrt[5]{6x+45}\cdot\sin(5x-34)+6$	RF: addiert statt subtrahiert
☒	$\sqrt[5]{6x-51}\cdot\sin(5x-46)+6$	richtig
5	$\sqrt[13]{6x-3}\cdot\sin(5x+6)+6$	DF: mit Wurzel verknüpft
6	$\frac{1}{\sqrt[5]{6x-51\cdot\sin(5x-46)-6}}$	DF: mit UKF verwechselt
7	$\sqrt[5]{6x+45}\cdot\sin(5x-34)-6$	RF: addiert statt subtrahiert
8	$\frac{x-8}{\sqrt[5]{6x-3\cdot\sin(5x+6)}}+6$	DF: mit UKF verwechselt
9	$\sqrt[5]{48-3}\cdot\sin(40x+6)-6$	RF: multipliziert statt subtrahiert
10	$\sqrt[5]{6x+51}\cdot\sin(5x+46)-6$	RF: addiert statt subtrahiert
11	$\sqrt[5]{48x-3}\cdot\sin(40x+6)+6$	RF: multipliziert statt subtrahiert
12	$\sqrt[5]{6x-51}\cdot\sin(5x-46)-6$	DF: falsch verschoben

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Umkehrfunktion
Injektivisierung	Funktionen	Nummer: 80 0 200405002	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.8: Gegeben sei die Funktion f: $\mathbb{D} \to f(\mathbb{D}) = \mathbb{B} : f(x) = 5\cdot\sin(\sqrt{9\cdot x+12})+6$ mit $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ maximal. Schränken Sie den Definitionsbereich der nicht injektiven, aber surjektiven (da der Wertebereich = Bildbereich) Funktion $f(x)$ so ein, dass die Funktion bijektiv (also injektiv und immer noch surjektiv) ist.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Funktion ($n \in 1..4$) $x_n > 1$

Die Funktion lautet also: $x_1\cdot\sin(\sqrt{x_2\cdot x\,+\,x_3})\,+\,x_4$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 9 \quad x_3 = 12 \quad x_4 = 6$.

Erklärung:

Rechnung:

$\sin(\sqrt{y})$ ist nicht definiert für $y < 0$. Also ist $5\cdot\sin(\sqrt{9\cdot x+12})+6$ definiert für $9\cdot x+12 \geq 0$ und damit $x \geq -\frac{4}{3}$. Da der Wertebereich von $\sin y = [-1\ ,\ 1]$ ist, ist der Bildbereich von $5\cdot\sin(\sqrt{9\cdot x+12})+6 = [6-5\ ,\ 6+5] = [1\ ,\ 11]$. $\sin y$ ist injektiv (zum Beispiel) für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Weil die Wurzelfunktion monoton ist, kann der eingeschränkte Definitionsbereich durch Substitution ermittelt werden: $\sqrt{9\cdot x+12} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$ und $\sqrt{9\cdot x+12} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{(\frac{\pi}{2})^2-12}{9}$. Also ist der gesuchte Definitionsbereich $x \in [\frac{-4}{3}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-12}{9}]$.

Angebotene Lösungen:

1	$x \in [-\frac{4}{3}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-12}{9})$	2	$x \in \mathbb{R}$	3	$x \in (-\frac{4}{3}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+12}{9}]$	4	$x \in [-\frac{4}{3}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-12}{9})$
5	$x \in [-1, 1]$	6	$x \in [\frac{4}{3}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+12}{9}]$	7	$x \in (-\frac{4}{3}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+12}{9})$	8	$x = 0$
9	$x \in (-\frac{4}{3}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-12}{9})$	10	$\emptyset$	11	$x \in [-\frac{4}{3}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+12}{9}]$	☒	$x \in [-\frac{4}{3}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-12}{9}]$

Fehlerinterpretation:

$\boxed{1}$ $x \in [-\frac{4}{3}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-12}{9})$ DF: falsch substituiert
$\boxed{2}$ $x \in \mathbb{R}$ DF: Lösung geraten
$\boxed{3}$ $x \in (-\frac{4}{3}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+12}{9}]$ DF: falsch substituiert
$\boxed{4}$ $x \in [-\frac{4}{3}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-12}{9})$ DF: Ränder nicht beachtet
$\boxed{5}$ $x \in [-1, 1]$ DF: Lösung geraten
$\boxed{6}$ $x \in [\frac{4}{3}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+12}{9}]$ DF: falsch substituiert
$\boxed{7}$ $x \in (-\frac{4}{3}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+12}{9})$ DF: falsch substituiert
$\boxed{8}$ $x = 0$ DF: Lösung geraten
$\boxed{9}$ $x \in (-\frac{4}{3}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-12}{9})$ DF: Ränder nicht beachtet
$\boxed{10}$ $\emptyset$ DF: Lösung geraten
$\boxed{11}$ $x \in [-\frac{4}{3}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+12}{9}]$ DF: falsch substituiert
$\boxtimes$ $x \in [-\frac{4}{3}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-12}{9}]$ richtig

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu