Blatt Nr 05.08

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 5

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Symmetrie
Punktsymmetrie	Funktionen	Nummer: 1 0 200405006	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.1: Zu welchem Punkt bzw. zu welcher Achse ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{3x-9}{6x^2-36x+60} + 5$$

(AS) = achsensymmetrisch − (PS) = punktsymmetrisch.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe ($n \in 1..4$) $x_n > 1$
(x_2, x_4) ist der Symmetriepunkt

Die Funktion lautet: $\frac{x_1\, x-\{x_1 \cdot x_2\}}{x_3 x^2\, -\, \{2 \cdot x_3 \cdot 3\}x+\{x_3 \cdot (x_1^2+1)\}}\ +\ x_4$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \qquad x_2 = 3 \qquad x_3 = 6 \qquad x_4 = 5.$

Erklärung:

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(a, b) \Leftrightarrow f(a-x) + f(a+x) = 2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x = a \Leftrightarrow f(a-x) = f(a+x)$.

Rechnung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{3x-9}{6x^2-36x+60} + 5 \\ &= \tfrac{3(x-3)}{6(x^2-6x+9+1)} + 5 \\ &= \tfrac{3}{6} \cdot \tfrac{x-3}{(x-3)^2+1} + 5 \end{aligned}$$

Damit wird eine Symmetrie zum Punkt $(3, ?)$ vermutet:

$$\begin{aligned} f(3-x) + f(3+x) &= \tfrac{3}{6} \cdot \tfrac{(3-x)-3}{((3-x)-3)^2+1} + 5 + \tfrac{3}{6} \cdot \tfrac{(3+x)-3}{((3+x)-3)^2+1} + 5 \\ &= \tfrac{3}{6} \cdot \tfrac{-x}{(-x)^2+1} + \tfrac{3}{6} \cdot \tfrac{x}{x^2+1} + 10 \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{x-x}{x^2+1} + 10 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Damit ist $b = 5$ und die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt $(3\,,\,5)$.

Angebotene Lösungen:

1 PS $(0, 0)$	2 AS $x = 3$	3 PS $(-5, -3)$	4 PS $(-3, -5)$
5 PS $(3, -5)$	6 PS $(5, 3)$	7 AS $x = -\frac{3}{6}$	8 AS $x = \frac{3}{6}$
9 AS $x = 0$	10 AS $x = 5$	☒ PS $(3, 5)$	12 PS $(-3, 5)$

Fehlerinterpretation:

1	PS $(0,0)$	DF: geraten
2	AS $x=3$	DF: PS nicht erkannt
3	PS $(-5,-3)$	DF: Koordinaten vertauscht
4	PS $(-3,-5)$	RF: falsches Vorzeichen
5	PS $(3,-5)$	RF: falsches Vorzeichen
6	PS $(5,3)$	DF: Koordinaten vertauscht
7	AS $x=-\frac{3}{6}$	DF: geraten
8	AS $x=\frac{3}{6}$	DF: geraten
9	AS $x=0$	DF: geraten
10	AS $x=5$	DF: PS nicht erkannt
☒	PS $(3,5)$	richtig
12	PS $(-3,5)$	RF: falsches Vorzeichen

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Symmetrie
Achsensymmetrie	Funktionen	Nummer: 47 0 200405007	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.2: Zu welchem Punkt bzw. zu welcher Achse ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f:\mathbb{R}\backslash\{1\}\to\mathbb{R}\qquad f(x)=\frac{3\sin(6x-6)}{\sqrt[3]{2x-2}}+7$$

(AS) = achsensymmetrisch − (PS) = punktsymmetrisch.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe $(n\in 1..5)$ $x_n>1$
$x=x_3$ ist die Symmetrieachse

Die Funktion lautet: $\frac{x_1\cdot\sin(x_2\cdot x-\{x_3\cdot x_2\})}{\sqrt[3]{x_4\cdot x-\{x_3\cdot x_4\}}}+\ x_5$

In dieser Aufgabe sind $x_1=3\quad x_2=6\quad x_3=1\quad x_4=2\quad x_5=7.$

Erklärung:

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(a,b)\Leftrightarrow f(a-x)+f(a+x)=2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x=a\Leftrightarrow f(a-x)=f(a+x)$.

Rechnung:

$$f(x)=\frac{3\sin(6x-6)}{\sqrt[3]{2x-2}}+7=\frac{3\sin(6(x-1))}{\sqrt[3]{2(x-1)}}+7$$

Damit wird die Symmetrie zur Achse $x=1$ vermutet:

$$\begin{aligned}
f(1-x) &= \frac{3\sin(6((1-x)-1))}{\sqrt[3]{2((1-x)-1)}}+7\\
&= \frac{3\sin(-6x)}{\sqrt[3]{-2x}}+7\\
&= \frac{-3\sin(6x)}{-\sqrt[3]{2x}}+7\\
&= \frac{3\sin(6x)}{\sqrt[3]{2x}}+7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(1+x) &= \frac{3\sin(6((1+x)-1))}{\sqrt[3]{2((1+x)-1)}}+7\\
&= \frac{3\sin(6x)}{\sqrt[3]{2x}}+7=f(1-x)
\end{aligned}$$

Damit ist die Symmetrie zur Achse $x=1$ gezeigt.

Angebotene Lösungen:

$\boxed{1}$ AS $x = 0$	$\boxed{2}$ PS $(-1, -14)$	$\boxed{3}$ PS $(1, -7)$	$\boxed{4}$ PS $(1, 14)$
$\boxed{5}$ AS $x = -7$	$\boxed{6}$ AS $x = -1$	$\boxed{7}$ PS $(0, 0)$	$\boxed{8}$ AS $x = 7$
$\boxed{9}$ AS $x = 2$	$\boxed{10}$ PS $(-1, 7)$	$\boxed{11}$ PS $(-1, -7)$	$\boxtimes$ AS $x = 1$

Fehlerinterpretation:

$\boxed{1}$	AS $x = 0$	DF: geraten
$\boxed{2}$	PS $(-1, -14)$	DF: AS nicht erkannt
$\boxed{3}$	PS $(1, -7)$	DF: AS nicht erkannt
$\boxed{4}$	PS $(1, 14)$	DF: AS nicht erkannt
$\boxed{5}$	AS $x = -7$	DF: geraten
$\boxed{6}$	AS $x = -1$	RF: falsches Vorzeichen
$\boxed{7}$	PS $(0, 0)$	DF: geraten
$\boxed{8}$	AS $x = 7$	DF: geraten
$\boxed{9}$	AS $x = 2$	DF: geraten
$\boxed{10}$	PS $(-1, 7)$	DF: AS nicht erkannt
$\boxed{11}$	PS $(-1, -7)$	DF: AS nicht erkannt
$\boxtimes$	AS $x = 1$	richtig

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Umkehrfunktion
Keine	Funktionen	Nummer: 56 0 200405005	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.3: Bestimmen Sie die Umkehrfunktion der (bijektiven) Funktion

$$f : \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^+ \qquad f(x) = 3(e^{(x-1)^2} - 1)$$

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Funktion $(n \in 1..2)$ $x_n > 1$

Die Funktion lautet: $x_1(e^{(x\ -\ x_2)^2} - 1)$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \qquad x_2 = 1$.

Erklärung:

Sei $y := f(x)$. Das Bilden der Umkehrfunktion bedeutet das Vertauschen von x und y und anschließend das Auflösen nach y.

Rechnung:

$y = 3(e^{(x-1)^2} - 1)$ wird zu $x = 3(e^{(y-1)^2} - 1)$.

$$\begin{array}{rlll}
f^{-1}(x) & : & x & = 3(e^{(y-1)^2} - 1) \\
 & \Leftrightarrow & \frac{x+3}{3} & = e^{(y-1)^2} \\
 & \Leftrightarrow & \ln(\frac{x+3}{3}) & = (y-1)^2 \\
 & \Leftrightarrow & \pm\sqrt{\ln(\frac{x+3}{3})} & = y - 1 \\
 & \Leftrightarrow & \pm\sqrt{\ln(\frac{x+3}{3})}\ + 1 & = y
\end{array}$$

Weil der Definitionsbereich von $f(x)$ $\mathbb{R}_0^-$ ist, muss hier der negative Teil der Wurzel als Umkehrfunktion gewählt werden. Verifikation durch eine Punktprobe: $f(-1) = 3(e^{((-1)-1)^2} - 1) = 3e^4 - 3$. Also muss $f^{-1}(3e^4 - 3) = -1$ sein:

$$\begin{array}{rl}
f^{-1}(3e^4 - 3) & = -\sqrt{\ln(\frac{(3e^4-3)+3}{3})}\ + 1 \\
 & = -\sqrt{\ln(\frac{3e^4}{3})}\ + 1 \\
 & = -\sqrt{\ln(e^4)}\ + 1 \\
 & = -\sqrt{4}\ + 1 \\
 & = -|2|\ + 1 \\
 & = -1
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $-\sqrt{\ln(\frac{x+1}{1})+3}$	2 $-\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})-1}$	3 $\sqrt{\ln(\frac{x-1}{1})-3}$
4 $\ln(\sqrt{\frac{x+3}{3}})+1$	5 $\sqrt{\ln(\frac{x+3}{3})+1}$	6 $-\sqrt{\ln(\frac{x-1}{1})-3}$
7 $\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})+1}$	8 $-\ln(\sqrt{\frac{x+3}{3}})+1$	☒ $-\sqrt{\ln(\frac{x+3}{3})+1}$
10 $\ln(\sqrt{\frac{x-3}{3}})+1$	11 $-\ln(\sqrt{\frac{x-3}{3}})-1$	12 $-\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})+1}$

Fehlerinterpretation:

1 $-\sqrt{\ln(\frac{x+1}{1})+3}$	DF: falsche Reihenfolge
2 $-\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})-1}$	RF: falsch umgeformt
3 $\sqrt{\ln(\frac{x-1}{1})-3}$	DF: falsches Vorzeichen gewählt
4 $\ln(\sqrt{\frac{x+3}{3}})+1$	DF: falsche Reihenfolge
5 $\sqrt{\ln(\frac{x+3}{3})+1}$	DF: falsches Vorzeichen gewählt
6 $-\sqrt{\ln(\frac{x-1}{1})-3}$	DF: falsche Reihenfolge
7 $\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})+1}$	RF: falsch umgeformt
8 $-\ln(\sqrt{\frac{x+3}{3}})+1$	DF: falsche Reihenfolge
☒ $-\sqrt{\ln(\frac{x+3}{3})+1}$	richtig
10 $\ln(\sqrt{\frac{x-3}{3}})+1$	DF: falsche Reihenfolge
11 $-\ln(\sqrt{\frac{x-3}{3}})-1$	DF: falsche Reihenfolge
12 $-\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})+1}$	RF: falsch umgeformt

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Verschiebung
Keine	Funktionen	Nummer: 65 0 200405003	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.4: Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt[6]{2x-9} \cdot \sin(4x+3)$. Wie lautet die Gleichung der Funktion, die um 9 nach rechts und um 5 nach oben verschoben wurde?

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Aufgabe $(n \in 1..7)$ $x_n > 1$, $x_5 < x_6$

Die Funktion lautet: $\sqrt[x_1]{x_2 \cdot x \;-\; x_3} \cdot \sin(x_4 \cdot x \;+\; x_5)$
Der Verschiebungsvektor ist $(x_6\ ,\ x_7)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 9 \quad x_4 = 4 \quad x_5 = 3 \quad x_6 = 9 \quad x_7 = 5$.

Erklärung:

Sei $y := f(x)$. Eine Funktionsverschiebung um (a, b) wirkt sich so aus, dass a direkt von x und b direkt von y subtrahiert werden muss. $y - b = f(x-a)$ oder $y = f(x-a) + b$.

Rechnung:

Damit ergibt sich:

$$f_{\text{neu}}(x) = f(x-9)+5 = \sqrt[6]{2(x-9)-9} \cdot \sin(4(x-9)+3)+5 = \sqrt[6]{2x-27} \cdot \sin(4x-39)+5$$

Angebotene Lösungen:

1	$\sqrt[15]{2x-9}\cdot\sin(4x+3)-5$	2	$\sqrt[6]{18x-9}\cdot\sin(36x+3)+5$	3	$\frac{x-9}{\sqrt[6]{2x-9}\cdot\sin(4x+3)}-5$
4	$\sqrt[6]{2x+9}\cdot\sin(4x-33)-5$	5	$\sqrt[6]{2x+9}\cdot\sin(4x-33)+5$	6	$\frac{1}{\sqrt[6]{2x-27}\cdot\sin(4x-39)+5}$
7	$\sqrt[6]{2x+27}\cdot\sin(4x+39)+5$	8	$\sqrt[6]{18-9}\cdot\sin(36x+3)-5$	9	$\sqrt[6]{2x+27}\cdot\sin(4x+39)-5$
☒	$\sqrt[6]{2x-27}\cdot\sin(4x-39)+5$	11	$\sqrt[6]{2x-27}\cdot\sin(4x-39)-5$	12	$\frac{1}{\sqrt[6]{2x-27}\cdot\sin(4x-39)-5}$

Fehlerinterpretation:

1	$\sqrt[15]{2x-9}\cdot\sin(4x+3)-5$	DF: mit Wurzel verknüpft
2	$\sqrt[6]{18x-9}\cdot\sin(36x+3)+5$	RF: multipliziert statt subtrahiert
3	$\frac{x-9}{\sqrt[6]{2x-9}\cdot\sin(4x+3)}-5$	DF: mit UKF verwechselt
4	$\sqrt[6]{2x+9}\cdot\sin(4x-33)-5$	RF: addiert statt subtrahiert
5	$\sqrt[6]{2x+9}\cdot\sin(4x-33)+5$	RF: addiert statt subtrahiert
6	$\frac{1}{\sqrt[6]{2x-27}\cdot\sin(4x-39)+5}$	DF: mit UKF verwechselt
7	$\sqrt[6]{2x+27}\cdot\sin(4x+39)+5$	RF: addiert statt subtrahiert
8	$\sqrt[6]{18-9}\cdot\sin(36x+3)-5$	RF: multipliziert statt subtrahiert
9	$\sqrt[6]{2x+27}\cdot\sin(4x+39)-5$	RF: addiert statt subtrahiert
☒	$\sqrt[6]{2x-27}\cdot\sin(4x-39)+5$	richtig
11	$\sqrt[6]{2x-27}\cdot\sin(4x-39)-5$	DF: falsch verschoben
12	$\frac{1}{\sqrt[6]{2x-27}\cdot\sin(4x-39)-5}$	DF: mit UKF verwechselt

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Symmetrie
Punktsymmetrie	Funktionen	Nummer: 66 0 2004050008	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.5: Zu welchen Punkten bzw. zu welchen Achsen ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \qquad f(x) \quad = \quad \frac{4}{\tan(2x)} + 5 \qquad \mathbb{D} \text{ maximal}$$

(AS) = achsensymmetrisch − (PS) = punktsymmetrisch − bei der Lösung sei k eine beliebige ganze Zahl.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe ($n \in 1..3$), $x_1 \neq x_2$, $x_n > 1$.

Die Funktion lautet: $\frac{x_1}{\tan(x_2\, x)} + x_3$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 5$.

Erklärung:

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(a, b) \Leftrightarrow f(a-x) + f(a+x) = 2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x = a \Leftrightarrow f(a-x) = f(a+x)$. $\tan x$ ist zu jedem 'Nulldurchgang' punktsymmetrisch.

Rechnung:

$f(x) \;=\; \frac{4}{\tan(2x)} + 5 \;=\; \frac{4\cos(2x)}{\sin(2x)} + 5.$
$f(x)$ hat für $2x = k\pi \;\Leftrightarrow\; x = \frac{k}{2\pi}$ senkrechte Asymptoten.
$4\cos(2x) \;=\; 0$ für $2x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$

$((2k+1)\frac{\pi}{4}, 5)$ sind die Kandidaten für Symmetriepunkte $-$ $a = (2k+1)\frac{\pi}{4}$, $b = 5$.

$$\begin{array}{rcll} f(a+x) & = & \frac{4\cos(2((2k+1)\frac{\pi}{4}+x))}{\sin(2((2k+1)\frac{\pi}{4}+x))} + 5 & \\ & = & 4\frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2}+2x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}+2x)} + 5 & \\ & = & 4\frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(2x) - \sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(2x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(2x) + \cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(2x)} + 5 & \text{Additionstheoreme} \\ & = & 4\frac{-\sin(2x)}{\cos(2x)} + 5 & \sin((2k+1)\frac{\pi}{2}) = 1 \quad \cos((2k+1)\frac{\pi}{2}) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} f(a-x) & = & \frac{4\cos(2((2k+1)\frac{\pi}{4}-x))}{\sin(2((2k+1)\frac{\pi}{4}-x))} + 5 & \\ & = & 4\frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2}-2x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}-2x)} + 5 & \\ & = & 4\frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(2x) + \sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(2x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(2x) - \cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(2x)} + 5 & \text{Additionstheoreme} \\ & = & 4\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} + 5 & \sin((2k+1)\frac{\pi}{2}) = 1 \quad \cos((2k+1)\frac{\pi}{2}) = 0 \end{array}$$

Damit ist $f(a+x) + f(a-x) \; = \; 4\frac{-\sin(2x)}{\cos(2x)} + 5 + 4\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} + 5 \; = \; 2 \cdot 5$.
Dies war zu zeigen. Hausaufgabe: Zeigen Sie, dass es keine weiteren Symmetrien gibt.

Angebotene Lösungen:

[1] PS $(\frac{k\cdot\pi}{2}, 0)$	[2] PS $(k\cdot\pi, 5)$	[3] PS $((2k+1)\frac{\pi}{4}, 0)$	[4] PS $((2k+1)\frac{\pi}{4}, 10)$
[5] PS $((2k+1)\frac{\pi}{2}, 5)$	[6] PS $(\frac{k\cdot\pi}{2}, 10)$	[☒] PS $((2k+1)\frac{\pi}{4}, 5)$	[8] AS $x = 4\cdot(2k+1)\frac{\pi}{4}$
[9] AS $x = \frac{k\pi}{2}$	[10] AS $x = k\pi$	[11] AS $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$	[12] nicht symmetrisch

Fehlerinterpretation:

[1]	PS $(\frac{k\cdot\pi}{2}, 0)$	DF: $y-$ Wert falsch
[2]	PS $(k\cdot\pi, 5)$	DF: Periode ignoriert
[3]	PS $((2k+1)\frac{\pi}{4}, 0)$	DF: $y-$ Wert falsch
[4]	PS $((2k+1)\frac{\pi}{4}, 10)$	DF: $y-$ Wert falsch
[5]	PS $((2k+1)\frac{\pi}{2}, 5)$	DF: Periode ignoriert
[6]	PS $(\frac{k\cdot\pi}{2}, 10)$	DF: $y-$ Wert falsch
[☒]	PS $((2k+1)\frac{\pi}{4}, 5)$	richtig
[8]	AS $x = 4\cdot(2k+1)\frac{\pi}{4}$	DF: f ist PS
[9]	AS $x = \frac{k\pi}{2}$	DF: f ist PS
[10]	AS $x = k\pi$	DF: Periode ignoriert
[11]	AS $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$	DF: f ist PS
[12]	nicht symmetrisch	DF: PS nicht erkannt

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Umkehrfunktion
Injektivisierung	Funktionen	Nummer: 93 0 2004050001	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.6: Gegeben sei die Funktion f: $\mathbb{D} \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{\tan(3\cdot x+15)}{18}$ mit $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ maximal. Schränken Sie den Definitionsbereich der nicht injektiven, aber surjektiven Funktion $f(x)$ so ein, dass die Funktion bijektiv (also injektiv und immer noch surjektiv) ist.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Funktion $(n \in 1..3)$, $x_n > 1$, x_2 ist Vielfaches von x_1

Die Funktion lautet also: $\frac{\tan(x_1\cdot x + x_2)}{x_3}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \qquad x_2 = 15 \qquad x_3 = 18$.

Erklärung:

$\tan x$ ist zwischen zwei senkrechten Asymptoten streng monoton wachsend. Finden Sie zwei benachbarte Asymptoten durch Substitution von $y = 3\cdot x + 15$.

Rechnung:

$\tan y$ ist nicht definiert für $y = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$. Damit ist $\tan(3 \cdot x + 15)$ nicht definiert für $x = \frac{(2k+1)\pi}{2\cdot 3} - \frac{15}{3}$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$. Damit ist $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{(2k+1)\pi}{6} - 5; k \in \mathbb{Z}\}$. $\tan y$ ist zwischen zwei benachbarten senkrechten Asymptoten streng monoton. $f(y) \to -\infty$, wenn y gegen die linke Asymptote geht und $f(y) \to \infty$, wenn y gegen die rechte Asymptote geht. Nach dem Zwischenwertsatz ist dann $f(x)$ zwischen zwei benachbarten senkrechten Asymptoten bijektiv.

$$\text{Also zum Beispiel } y \in (\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \text{ oder } x \in (\frac{-\pi}{6} - 5, \frac{\pi}{6} - 5) \qquad k = -1 \text{ und } k = 0$$

Angebotene Lösungen:

1 $x \in (\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$	2 $x \in (-1, 1]$	3 $x \in [\frac{-\pi}{6} - 5, \frac{\pi}{6} - 5)$
4 $x \in (\frac{-\pi}{6} + 5, \frac{\pi}{6} + 5)$	☒ $x \in (\frac{-\pi}{6} - 5, \frac{\pi}{6} - 5)$	6 $x \in [\frac{-\pi}{6} + 5, \frac{\pi}{6} + 5]$
7 $x \in (\frac{-\pi}{6} - 5, \frac{\pi}{6} - 5]$	8 $x = 0$	9 $x \in (\frac{-\pi}{6} - 5, \frac{\pi}{6} + 5)$
10 $x \in (\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$	11 $x \in (-6 \cdot \pi + 5, 6 \cdot \pi + 5]$	12 $x \in [\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$

Fehlerinterpretation:

1 $x \in (\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$	DF: falsch substituiert
2 $x \in (-1, 1]$	DF: Lösung geraten
3 $x \in [\frac{-\pi}{6} - 5, \frac{\pi}{6} - 5)$	DF: Ränder nicht beachtet
4 $x \in (\frac{-\pi}{6} + 5, \frac{\pi}{6} + 5)$	DF: falsch substituiert
☒ $x \in (\frac{-\pi}{6} - 5, \frac{\pi}{6} - 5)$	richtig
6 $x \in [\frac{-\pi}{6} + 5, \frac{\pi}{6} + 5]$	DF: falsch substituiert
7 $x \in (\frac{-\pi}{6} - 5, \frac{\pi}{6} - 5]$	DF: Ränder nicht beachtet
8 $x = 0$	DF: Lösung geraten
9 $x \in (\frac{-\pi}{6} - 5, \frac{\pi}{6} + 5)$	RF: falsch substituiert
10 $x \in (\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$	DF: falsch substituiert
11 $x \in (-6 \cdot \pi + 5, 6 \cdot \pi + 5]$	DF: falsch substituiert
12 $x \in [\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$	DF: falsch substituiert

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Umkehrfunktion
Injektivisierung	Funktionen	Nummer: 97 0 200405002	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.7: Gegeben sei die Funktion f: $\mathbb{D} \to f(\mathbb{D}) = \mathbb{B} : f(x) = 7 \cdot \sin(\sqrt{3 \cdot x + 9}) + 4$ mit $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ maximal. Schränken Sie den Definitionsbereich der nicht injektiven, aber surjektiven (da der Wertebereich = Bildbereich) Funktion $f(x)$ so ein, dass die Funktion bijektiv (also injektiv und immer noch surjektiv) ist.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Funktion $(n \in 1..4)$ $x_n > 1$

Die Funktion lautet also: $x_1 \cdot \sin(\sqrt{x_2 \cdot x + x_3}) + x_4$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 9 \quad x_4 = 4$.

Erklärung:

Rechnung:

$\sin(\sqrt{y})$ ist nicht definiert für $y < 0$. Also ist $7 \cdot \sin(\sqrt{3 \cdot x + 9}) + 4$ definiert für $3 \cdot x + 9 \geq 0$ und damit $x \geq -3$. Da der Wertebereich von $\sin y = [-1\ ,\ 1]$ ist, ist der Bildbereich von $7 \cdot \sin(\sqrt{3 \cdot x + 9}) + 4 = [4-7\ ,\ 4+7] = [-3\ ,\ 11]$. $\sin y$ ist injektiv (zum Beispiel) für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Weil die Wurzelfunktion monoton ist, kann der eingeschränkte Definitionsbereich durch Substitution ermittelt werden: $\sqrt{3 \cdot x + 9} = 0 \Leftrightarrow x = -3$ und $\sqrt{3 \cdot x + 9} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{(\frac{\pi}{2})^2 - 9}{3}$. Also ist der gesuchte Definitionsbereich $x \in [-3, \frac{(\frac{\pi}{2})^2 - 9}{3}]$.

Angebotene Lösungen:

1	$x \in [-3, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-9}{3})$	☒	$x \in [-3, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-9}{3}]$	3	$x \in [-3, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+9}{3}]$	4	$x \in (-3, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+9}{3})$
5	$x \in (-3, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-9}{3}]$	6	$x \in [3, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-9}{3})$	7	$x \in [3, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+9}{3}]$	8	$x \in (-3, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-9}{3})$
9	$x \in (3, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+9}{3}]$	10	$x \in (-1, 1]$	11	$x \in [-3, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-9}{3})$	12	$x = 0$

Fehlerinterpretation:

1	$x \in [-3, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-9}{3})$	DF: falsch substituiert
☒	$x \in [-3, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-9}{3}]$	richtig
3	$x \in [-3, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+9}{3}]$	DF: falsch substituiert
4	$x \in (-3, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+9}{3})$	DF: falsch substituiert
5	$x \in (-3, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-9}{3}]$	DF: Ränder nicht beachtet
6	$x \in [3, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-9}{3})$	DF: falsch substituiert
7	$x \in [3, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+9}{3}]$	DF: falsch substituiert
8	$x \in (-3, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-9}{3})$	DF: Ränder nicht beachtet
9	$x \in (3, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+9}{3}]$	DF: falsch substituiert
10	$x \in (-1, 1]$	DF: Lösung geraten
11	$x \in [-3, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-9}{3})$	DF: Ränder nicht beachtet
12	$x = 0$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Verschiebung
Keine	Funktionen	Nummer: 101 0 200405004	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.8: Gegeben sei die Funktion $f(x) = (4x + 1)\ln(x - 3)$. Verschieben Sie die Funktion so, dass der Punkt $(8\ ,\ f(8))$ in den Punkt $(13\ ,\ 38\ln 5)$ verschoben wird.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Aufgabe $(n \in 1..6)$ $x_n > 1$, $x_5 > x_4 > x_3 > x_2$, $x_6 > x_1 \cdot x_4 + x_2$

Die Funktion lautet: $(x_1 \cdot x\ +\ x_2)\ln(x\ -\ x_3)$
Die Punkte sind $(x_4\ ,\ f(x_4))$ und $(x_5\ ,\ x_6 \cdot \ln\{x_4\ -\ x_3\})$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = 8 \quad x_5 = 13 \quad x_6 = 38.$

Erklärung:

Sei $y := f(x)$. Eine Verschiebung vom Punkt (a, b) in den Punkt (c, d) ist eine Verschiebung um den Vektor $(c - a, d - b)$.

Rechnung:

Damit ergibt sich für die Funktion: $y - (d - b) = f(x - (c - a))$ oder $y = f(x - c + a) + d - b$. $f(8) = (4 \cdot 8 + 1)\ln(8 - 3) = 33\ln 5$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_{\text{neu}}(x) &= f(x - (13 - 8)) + 38\ln 5 - 33\ln 5 \\ &= f(x - 5) + 5\ln 5 \\ &= (4(x - 5) + 1)\ln((x - 5) - 3) + 5\ln 5 \\ &= (4x - 19)\ln(x - 8) + 5\ln 5 \end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1	$(4x - 83)\ln(x - 24) - 5\ln 5$	2	$(4x + 83)\ln(x + 24) - 5\ln 11$	☒	$(4x - 19)\ln(x - 8) + 5\ln 5$
4	$(4x + 83)\ln(x + 24) + 5\ln 11$	5	$(4x + 83)\ln(x + 24) + 5\ln 5$	6	$(4x - 83)\ln(x - 24) - 5\ln 11$
7	$(4x + 19)\ln(x + 8) - 5\ln 5$	8	$(4x + 83)\ln(x + 24) - 5\ln 5$	9	$(4x + 19)\ln(x + 8) + 5\ln 5$
10	$(4x - 19)\ln(x - 8) - 5\ln 5$	11	$(4x - 83)\ln(x - 24) + 5\ln 11$	12	$(4x - 83)\ln(x - 24) + 5\ln 5$

Fehlerinterpretation:

1	$(4x-83)\ln(x-24)-5\ln 5$	DF: falsch verschoben
2	$(4x+83)\ln(x+24)-5\ln 11$	DF: falsch verschoben
☒	$(4x-19)\ln(x-8)+5\ln 5$	richtig
4	$(4x+83)\ln(x+24)+5\ln 11$	DF: falsch verschoben
5	$(4x+83)\ln(x+24)+5\ln 5$	DF: falsch verschoben
6	$(4x-83)\ln(x-24)-5\ln 11$	DF: falsch verschoben
7	$(4x+19)\ln(x+8)-5\ln 5$	DF: falsch verschoben
8	$(4x+83)\ln(x+24)-5\ln 5$	DF: falsch verschoben
9	$(4x+19)\ln(x+8)+5\ln 5$	DF: falsch verschoben
10	$(4x-19)\ln(x-8)-5\ln 5$	DF: falsch verschoben
11	$(4x-83)\ln(x-24)+5\ln 11$	DF: falsch verschoben
12	$(4x-83)\ln(x-24)+5\ln 5$	DF: falsch verschoben

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu