Blatt Nr 05.09

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 5

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Symmetrie
Achsensymmetrie	Funktionen	Nummer: 28 0 200405007	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.1: Zu welchem Punkt bzw. zu welcher Achse ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f : \mathbb{R}\backslash\{3\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{2\sin(6x-18)}{\sqrt[3]{2x-6}} + 4$$

(AS) = achsensymmetrisch − (PS) = punktsymmetrisch.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe ($n \in 1..5$) $x_n > 1$
$x = x_3$ ist die Symmetrieachse

Die Funktion lautet: $\frac{x_1 \cdot \sin(x_2 \cdot x - \{x_3 \cdot x_2\})}{\sqrt[3]{x_4 \cdot x - \{x_3 \cdot x_4\}}} + \ x_5$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 6 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = 2 \quad x_5 = 4$.

Erklärung:

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(a, b) \Leftrightarrow f(a-x) + f(a+x) = 2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x = a \Leftrightarrow f(a-x) = f(a+x)$.

Rechnung:

$$f(x) = \frac{2\sin(6x-18)}{\sqrt[3]{2x-6}} + 4 = \frac{2\sin(6(x-3))}{\sqrt[3]{2(x-3)}} + 4$$

Damit wird die Symmetrie zur Achse $x = 3$ vermutet:

$$\begin{aligned} f(3-x) &= \tfrac{2\sin(6((3-x)-3))}{\sqrt[3]{2((3-x)-3)}} + 4 \\ &= \tfrac{2\sin(-6x)}{\sqrt[3]{-2x}} + 4 \\ &= \tfrac{-2\sin(6x)}{-\sqrt[3]{2x}} + 4 \\ &= \tfrac{2\sin(6x)}{\sqrt[3]{2x}} + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3+x) &= \tfrac{2\sin(6((3+x)-3))}{\sqrt[3]{2((3+x)-3)}} + 4 \\ &= \tfrac{2\sin(6x)}{\sqrt[3]{2x}} + 4 = f(3-x) \end{aligned}$$

Damit ist die Symmetrie zur Achse $x = 3$ gezeigt.

Angebotene Lösungen:

[1] AS $x = -4$	[2] PS $(0, 0)$	[3] AS $x = -6$	[4] AS $x = 0$
[5] PS $(-3, -8)$	[6] PS $(3, 4)$	[7] AS $x = -3$	[8] PS $(3, 8)$
[9] PS $(-3, 4)$	[10] nicht symmetrisch	[11] AS $x = 4$	[X] AS $x = 3$

Fehlerinterpretation:

$\boxed{1}$	AS $x = -4$	DF: geraten
$\boxed{2}$	PS $(0, 0)$	DF: geraten
$\boxed{3}$	AS $x = -6$	DF: geraten
$\boxed{4}$	AS $x = 0$	DF: geraten
$\boxed{5}$	PS $(-3, -8)$	DF: AS nicht erkannt
$\boxed{6}$	PS $(3, 4)$	DF: AS nicht erkannt
$\boxed{7}$	AS $x = -3$	RF: falsches Vorzeichen
$\boxed{8}$	PS $(3, 8)$	DF: AS nicht erkannt
$\boxed{9}$	PS $(-3, 4)$	DF: AS nicht erkannt
$\boxed{10}$	nicht symmetrisch	DF: AS nicht erkannt
$\boxed{11}$	AS $x = 4$	DF: geraten
$\boxtimes$	AS $x = 3$	richtig

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Verschiebung
Keine	Funktionen	Nummer: 32 0 200405004	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.2: Gegeben sei die Funktion $f(x) = (4x + 2)\ln(x - 5)$. Verschieben Sie die Funktion so, dass der Punkt $(9\ ,\ f(9))$ in den Punkt $(14\ ,\ 40\ln 4)$ verschoben wird.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Aufgabe $(n \in 1..6)$ $x_n > 1$, $x_5 > x_4 > x_3 > x_2$, $x_6 > x_1 \cdot x_4 + x_2$

Die Funktion lautet: $(x_1 \cdot x\ +\ x_2)\ln(x\ -\ x_3)$
Die Punkte sind $(x_4\ ,\ f(x_4))$ und $(x_5\ ,\ x_6 \cdot \ln\{x_4\ -\ x_3\})$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4$ $\quad x_2 = 2$ $\quad x_3 = 5$ $\quad x_4 = 9$ $\quad x_5 = 14$ $\quad x_6 = 40$.

Erklärung:

Sei $y := f(x)$. Eine Verschiebung vom Punkt (a, b) in den Punkt (c, d) ist eine Verschiebung um den Vektor $(c - a, d - b)$.

Rechnung:

Damit ergibt sich für die Funktion: $y - (d - b) = f(x - (c - a))$ oder $y = f(x - c + a) + d - b$. $f(9) = (4 \cdot 9 + 2)\ln(9 - 5) = 38\ln 4$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_{\text{neu}}\ (x) &= f(x - (14 - 9)) + 40\ln 4 - 38\ln 4 \\ &= f(x - 5) + 2\ln 4 \\ &= (4(x - 5) + 2)\ln((x - 5) - 5) + 2\ln 4 \\ &= (4x - 18)\ln(x - 10) + 2\ln 4 \end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

$\boxed{1}$	$(4x - 90)\ln(x - 28) + 2\ln 4$	$\boxed{2}$	$(4x + 18)\ln(x + 10) - 2\ln 4$	$\boxed{3}$	$(4x + 90)\ln(x + 28) - 2\ln 4$
$\boxed{4}$	$(4x + 90)\ln(x + 28) + 2\ln 14$	$\boxed{5}$	$(4x - 90)\ln(x - 28) + 2\ln 14$	$\boxed{6}$	$(4x + 90)\ln(x + 28) - 2\ln 14$
$\boxtimes$	$(4x - 18)\ln(x - 10) + 2\ln 4$	$\boxed{8}$	$(4x + 18)\ln(x + 10) + 2\ln 4$	$\boxed{9}$	$(4x - 18)\ln(x - 10) - 2\ln 4$
$\boxed{10}$	$(4x - 90)\ln(x - 28) - 2\ln 14$	$\boxed{11}$	$(4x + 90)\ln(x + 28) + 2\ln 4$	$\boxed{12}$	$(4x - 90)\ln(x - 28) - 2\ln 4$

Fehlerinterpretation:

☐ 1	$(4x-90)\ln(x-28)+2\ln 4$	DF: falsch verschoben
☐ 2	$(4x+18)\ln(x+10)-2\ln 4$	DF: falsch verschoben
☐ 3	$(4x+90)\ln(x+28)-2\ln 4$	DF: falsch verschoben
☐ 4	$(4x+90)\ln(x+28)+2\ln 14$	DF: falsch verschoben
☐ 5	$(4x-90)\ln(x-28)+2\ln 14$	DF: falsch verschoben
☐ 6	$(4x+90)\ln(x+28)-2\ln 14$	DF: falsch verschoben
☒	$(4x-18)\ln(x-10)+2\ln 4$	richtig
☐ 8	$(4x+18)\ln(x+10)+2\ln 4$	DF: falsch verschoben
☐ 9	$(4x-18)\ln(x-10)-2\ln 4$	DF: falsch verschoben
☐ 10	$(4x-90)\ln(x-28)-2\ln 14$	DF: falsch verschoben
☐ 11	$(4x+90)\ln(x+28)+2\ln 4$	DF: falsch verschoben
☐ 12	$(4x-90)\ln(x-28)-2\ln 4$	DF: falsch verschoben

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Symmetrie
Punktsymmetrie	Funktionen	Nummer: 51 0 2004050008	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.3: Zu welchen Punkten bzw. zu welchen Achsen ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \qquad f(x) \quad = \quad \frac{2}{\tan(3x)} + 3 \qquad \mathbb{D} \text{ maximal}$$

(AS) = achsensymmetrisch − (PS) = punktsymmetrisch − bei der Lösung sei k eine beliebige ganze Zahl.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe ($n \in 1..3$), $x_1 \neq x_2$, $x_n > 1$.

Die Funktion lautet: $\frac{x_1}{\tan(x_2\, x)} + x_3$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 3$.

Erklärung:

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(a, b) \Leftrightarrow f(a-x) + f(a+x) = 2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x = a \Leftrightarrow f(a-x) = f(a+x)$. $\tan x$ ist zu jedem 'Nulldurchgang' punktsymmetrisch.

Rechnung:

$f(x) \;=\; \frac{2}{\tan(3x)} + 3 \;=\; \frac{2\cos(3x)}{\sin(3x)} + 3$.
$f(x)$ hat für $3x = k\pi \;\Leftrightarrow\; x = \frac{k}{3\pi}$ senkrechte Asymptoten.
$2\cos(3x) \;=\; 0$ für $3x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; x = (2k+1)\frac{\pi}{6}$
$((2k+1)\frac{\pi}{6}, 3)$ sind die Kandidaten für Symmetriepunkte − $a = (2k+1)\frac{\pi}{6}$, $b = 3$.

$$\begin{aligned}
f(a+x) &= \frac{2\cos(3((2k+1)\frac{\pi}{6}+x))}{\sin(3((2k+1)\frac{\pi}{6}+x))} + 3\\
&= 2\frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2}+3x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}+3x)} + 3\\
&= 2\frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(3x) - \sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(3x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(3x) + \cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(3x)} + 3 && \text{Additionstheoreme}\\
&= 2\frac{-\sin(3x)}{\cos(3x)} + 3 && \sin((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = 1 \quad \cos((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(a-x) &= \frac{2\cos(3((2k+1)\frac{\pi}{6}-x))}{\sin(3((2k+1)\frac{\pi}{6}-x))} + 3\\
&= 2\frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2}-3x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}-3x)} + 3\\
&= 2\frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(3x) + \sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(3x)}{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})\cos(3x) - \cos((2k+1)\frac{\pi}{2})\sin(3x)} + 3 && \text{Additionstheoreme}\\
&= 2\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} + 3 && \sin((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = 1 \quad \cos((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = 0
\end{aligned}$$

Damit ist $f(a+x) + f(a-x) \;=\; 2\frac{-\sin(3x)}{\cos(3x)} + 3 + 2\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} + 3 \;=\; 2\cdot 3$.
Dies war zu zeigen. Hausaufgabe: Zeigen Sie, dass es keine weiteren Symmetrien gibt.

Angebotene Lösungen:

[1] AS $x=(2k+1)\frac{\pi}{6}$	[2] PS $((2k+1)\frac{\pi}{2},3)$	[3] PS $(k\cdot\pi,3)$	[4] PS $(\frac{k\cdot\pi}{3},6)$
[5] PS $((2k+1)\frac{\pi}{6},6)$	[X] PS $((2k+1)\frac{\pi}{6},3)$	[7] AS $x=k\pi$	[8] PS $((2k+1)\frac{\pi}{6},0)$
[9] AS $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$	[10] PS $(\frac{k\cdot\pi}{3},0)$	[11] PS $(\frac{k\cdot\pi}{3},3)$	[12] AS $x=2\cdot\frac{k\pi}{3}$

Fehlerinterpretation:

[1] AS $x=(2k+1)\frac{\pi}{6}$	DF: f ist PS
[2] PS $((2k+1)\frac{\pi}{2},3)$	DF: Periode ignoriert
[3] PS $(k\cdot\pi,3)$	DF: Periode ignoriert
[4] PS $(\frac{k\cdot\pi}{3},6)$	DF: $y-$ Wert falsch
[5] PS $((2k+1)\frac{\pi}{6},6)$	DF: $y-$ Wert falsch
[X] PS $((2k+1)\frac{\pi}{6},3)$	richtig
[7] AS $x=k\pi$	DF: Periode ignoriert
[8] PS $((2k+1)\frac{\pi}{6},0)$	DF: $y-$ Wert falsch
[9] AS $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$	DF: Periode ignoriert
[10] PS $(\frac{k\cdot\pi}{3},0)$	DF: $y-$ Wert falsch
[11] PS $(\frac{k\cdot\pi}{3},3)$	DF: Symmetriepunkte des Tangens
[12] AS $x=2\cdot\frac{k\pi}{3}$	DF: f ist PS

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Umkehrfunktion
Injektivisierung	Funktionen	Nummer: 61 0 2004050001	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.4: Gegeben sei die Funktion f: $\mathbb{D}\to\mathbb{R}: f(x)=\frac{\tan(5\cdot x+25)}{31}$ mit $\mathbb{D}\subseteq\mathbb{R}$ maximal. Schränken Sie den Definitionsbereich der nicht injektiven, aber surjektiven Funktion $f(x)$ so ein, dass die Funktion bijektiv (also injektiv und immer noch surjektiv) ist.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Funktion ($n\in 1..3$), $x_n>1$, x_2 ist Vielfaches von x_1

Die Funktion lautet also: $\frac{\tan(x_1\cdot x+x_2)}{x_3}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=5 \quad x_2=25 \quad x_3=31$.

Erklärung:

$\tan x$ ist zwischen zwei senkrechten Asymptoten streng monoton wachsend. Finden Sie zwei benachbarte Asymptoten durch Substitution von $y=5\cdot x+25$.

Rechnung:

$\tan y$ ist nicht definiert für $y=\frac{(2k+1)\pi}{2}$ ($\forall k\in\mathbb{Z}$). Damit ist $\tan(5\cdot x+25)$ nicht definiert für $x=\frac{(2k+1)\pi}{2\cdot 5}-\frac{25}{5}$ ($\forall k\in\mathbb{Z}$). Damit ist $\mathbb{D}=\{x\in\mathbb{R}|x\neq\frac{(2k+1)\pi}{10}-5;k\in\mathbb{Z}\}$. $\tan y$ ist zwischen zwei benachbarten senkrechten Asymptoten streng monoton. $f(y)\to-\infty$, wenn y gegen die linke Asymptote geht und $f(y)\to\infty$, wenn y gegen die rechte Asymptote geht. Nach dem Zwischenwertsatz ist dann $f(x)$ zwischen zwei benachbarten senkrechten Asymptoten bijektiv.

$$\text{Also zum Beispiel } y\in(\tfrac{-\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}) \text{ oder } x\in(\frac{-\pi}{10}-5,\frac{\pi}{10}-5) \qquad k=-1 \text{ und } k=0$$

Angebotene Lösungen:

[1] $\emptyset$	[2] $x\in(-10\cdot\pi+5,10\cdot\pi+5]$	[3] $x\in[\frac{-\pi}{10}-5,\frac{\pi}{10}-5)$
[4] $x\in(\frac{-\pi}{10}+5,\frac{\pi}{10}+5)$	[5] $x\in[-10\cdot\pi-5,10\cdot\pi-5)$	[6] $x\in[\frac{-\pi}{10}+5,\frac{\pi}{10}+5]$
[7] $x\in(-1,1]$	[8] $x\in(\frac{-\pi}{10}-5,\frac{\pi}{10}+5]$	[X] $x\in(\frac{-\pi}{10}-5,\frac{\pi}{10}-5)$
[10] $x\in(\frac{-\pi}{10}-5,\frac{\pi}{10}-5]$	[11] $x\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	[12] $x=0$

Fehlerinterpretation:

1	$\emptyset$	DF: Lösung geraten
2	$x \in (-10 \cdot \pi + 5, 10 \cdot \pi + 5]$	DF: falsch substituiert
3	$x \in [\frac{-\pi}{10} - 5, \frac{\pi}{10} - 5)$	DF: Ränder nicht beachtet
4	$x \in (\frac{-\pi}{10} + 5, \frac{\pi}{10} + 5)$	DF: falsch substituiert
5	$x \in [-10 \cdot \pi - 5, 10 \cdot \pi - 5)$	DF: falsch substituiert
6	$x \in [\frac{-\pi}{10} + 5, \frac{\pi}{10} + 5]$	DF: falsch substituiert
7	$x \in (-1, 1]$	DF: Lösung geraten
8	$x \in (\frac{-\pi}{10} - 5, \frac{\pi}{10} + 5]$	RF: falsch substituiert
☒	$x \in (\frac{-\pi}{10} - 5, \frac{\pi}{10} - 5)$	richtig
10	$x \in (\frac{-\pi}{10} - 5, \frac{\pi}{10} - 5]$	DF: Ränder nicht beachtet
11	$x \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	DF: nicht substituiert
12	$x = 0$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Symmetrie
Punktsymmetrie	Funktionen	Nummer: 64 0 200405006	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.5: Zu welchem Punkt bzw. zu welcher Achse ist die folgende Funktion symmetrisch?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{4x - 8}{8x^2 - 64x + 40} + 5$$

(AS) = achsensymmetrisch − (PS) = punktsymmetrisch.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Aufgabe ($n \in 1..4$) $x_n > 1$
(x_2, x_4) ist der Symmetriepunkt

Die Funktion lautet: $\frac{x_1\ x - \{x_1 \cdot x_2\}}{x_3 x^2\ -\ \{2 \cdot x_3 \cdot 4\} x + \{x_3 \cdot (x_1^2 + 1)\}}\ +\ x_4$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 8 \quad x_4 = 5.$

Erklärung:

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zum Punkt $(a, b) \Leftrightarrow f(a - x) + f(a + x) = 2b$ und achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x = a \Leftrightarrow f(a - x) = f(a + x)$.

Rechnung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{4x-8}{8x^2-32x+40} + 5 \\ &= \tfrac{4(x-2)}{8(x^2-4x+4+1)} + 5 \\ &= \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{x-2}{(x-2)^2+1} + 5 \end{aligned}$$

Damit wird eine Symmetrie zum Punkt $(2, ?)$ vermutet:

$$\begin{aligned} f(2-x) + f(2+x) &= \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{(2-x)-2}{((2-x)-2)^2+1} + 5 + \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{(2+x)-2}{((2+x)-2)^2+1} + 5 \\ &= \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{-x}{(-x)^2+1} + \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{x}{x^2+1} + 10 \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{x-x}{x^2+1} + 10 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Damit ist $b = 5$ und die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt $(2\,,\,5)$.

Angebotene Lösungen:

1 nicht symmetrisch	2 AS $x = -\frac{4}{8}$	3 PS $(-5, -2)$	4 AS $x = \frac{4}{8}$
5 AS $x = -2$	6 PS $(5, 2)$	7 PS $(-2, 5)$	8 AS $x = 5$
9 PS $(2, -5)$	10 PS $(0, 0)$	☒ PS $(2, 5)$	12 AS $x = -5$

Fehlerinterpretation:

1	nicht symmetrisch	DF: PS nicht erkannt
2	AS $x = -\frac{4}{8}$	DF: geraten
3	PS $(-5, -2)$	DF: Koordinaten vertauscht
4	AS $x = \frac{4}{8}$	DF: geraten
5	AS $x = -2$	DF: PS nicht erkannt
6	PS $(5, 2)$	DF: Koordinaten vertauscht
7	PS $(-2, 5)$	RF: falsches Vorzeichen
8	AS $x = 5$	DF: PS nicht erkannt
9	PS $(2, -5)$	RF: falsches Vorzeichen
10	PS $(0, 0)$	DF: geraten
☒	PS $(2, 5)$	richtig
12	AS $x = -5$	DF: PS nicht erkannt

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Verschiebung
Keine	Funktionen	Nummer: 66 0 200405003	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.6: Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt[6]{2x-5} \cdot \sin(6x+7)$. Wie lautet die Gleichung der Funktion, die um 9 nach rechts und um 7 nach oben verschoben wurde?

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Aufgabe $(n \in 1..7)$ $x_n > 1$, $x_5 < x_6$

Die Funktion lautet: $\sqrt[x_1]{x_2 \cdot x \ - \ x_3} \cdot \sin(x_4 \cdot x \ + \ x_5)$
Der Verschiebungsvektor ist $(x_6 \ , \ x_7)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 6 \quad x_5 = 7 \quad x_6 = 9 \quad x_7 = 7$.

Erklärung:

Sei $y := f(x)$. Eine Funktionsverschiebung um (a, b) wirkt sich so aus, dass a direkt von x und b direkt von y subtrahiert werden muss. $y - b = f(x-a)$ oder $y = f(x-a) + b$.

Rechnung:

Damit ergibt sich:

$$f_{\text{neu}}(x) = f(x-9)+7 = \sqrt[6]{2(x-9)-5} \cdot \sin(6(x-9)+7)+7 = \sqrt[6]{2x-23} \cdot \sin(6x-61)+7$$

Angebotene Lösungen:

1	$\frac{x-9}{\sqrt[6]{2x-5 \cdot \sin(6x+7)}} + 7$	2	$\sqrt[15]{2x-5} \cdot \sin(6x+7) - 7$	3	$\sqrt[6]{2x-23} \cdot \sin(6x-61) - 7$
4	$\sqrt[15]{2x-5} \cdot \sin(6x+7) + 7$	5	$\sqrt[6]{18-5} \cdot \sin(54x+7) - 7$	6	$\sqrt[6]{18x-5} \cdot \sin(54x+7) + 7$
7	$\sqrt[6]{2x+23} \cdot \sin(6x+61) + 7$	8	$\sqrt[6]{2x+13} \cdot \sin(6x-47) + 7$	9	$\frac{1}{\sqrt[6]{2x-23 \cdot \sin(6x-61)+7}}$
☒	$\sqrt[6]{2x-23} \cdot \sin(6x-61) + 7$	11	$\sqrt[6]{2x+23} \cdot \sin(6x+61) - 7$	12	$\frac{x-9}{\sqrt[6]{2x-5 \cdot \sin(6x+7)}} - 7$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{x-9}{\sqrt[6]{2x-5}\cdot\sin(6x+7)}+7$	DF: mit UKF verwechselt
2	$\sqrt[15]{2x-5}\cdot\sin(6x+7)-7$	DF: mit Wurzel verknüpft
3	$\sqrt[6]{2x-23}\cdot\sin(6x-61)-7$	DF: falsch verschoben
4	$\sqrt[15]{2x-5}\cdot\sin(6x+7)+7$	DF: mit Wurzel verknüpft
5	$\sqrt[6]{18-5}\cdot\sin(54x+7)-7$	RF: multipliziert statt subtrahiert
6	$\sqrt[6]{18x-5}\cdot\sin(54x+7)+7$	RF: multipliziert statt subtrahiert
7	$\sqrt[6]{2x+23}\cdot\sin(6x+61)+7$	RF: addiert statt subtrahiert
8	$\sqrt[6]{2x+13}\cdot\sin(6x-47)+7$	RF: addiert statt subtrahiert
9	$\frac{1}{\sqrt[6]{2x-23}\cdot\sin(6x-61)+7}$	DF: mit UKF verwechselt
☒	$\sqrt[6]{2x-23}\cdot\sin(6x-61)+7$	richtig
11	$\sqrt[6]{2x+23}\cdot\sin(6x+61)-7$	RF: addiert statt subtrahiert
12	$\frac{x-9}{\sqrt[6]{2x-5}\cdot\sin(6x+7)}-7$	DF: mit UKF verwechselt

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Umkehrfunktion
Keine	Funktionen	Nummer: 70 0 200405005	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.7: Bestimmen Sie die Umkehrfunktion der (bijektiven) Funktion

$$f : \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^+ \qquad f(x) = 5(e^{(x-3)^2} - 1)$$

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl der Funktion ($n \in 1..2$) $x_n > 1$

Die Funktion lautet: $x_1(e^{(x\ -\ x_2)^2} - 1)$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 3$.

Erklärung:

Sei $y := f(x)$. Das Bilden der Umkehrfunktion bedeutet das Vertauschen von x und y und anschließend das Auflösen nach y.

Rechnung:

$y = 5(e^{(x-3)^2} - 1)$ wird zu $x = 5(e^{(y-3)^2} - 1)$.

$$\begin{array}{rcll}
f^{-1}(x) & : & x & = & 5(e^{(y-3)^2} - 1) \\
& \Leftrightarrow & \frac{x+5}{5} & = & e^{(y-3)^2} \\
& \Leftrightarrow & \ln(\frac{x+5}{5}) & = & (y-3)^2 \\
& \Leftrightarrow & \pm\sqrt{\ln(\frac{x+5}{5})} & = & y-3 \\
& \Leftrightarrow & \pm\sqrt{\ln(\frac{x+5}{5})}\ +3 & = & y
\end{array}$$

Weil der Definitionsbereich von $f(x)$ $\mathbb{R}_0^-$ ist, muss hier der negative Teil der Wurzel als Umkehrfunktion gewählt werden. Verifikation durch eine Punktprobe: $f(-1) = 5(e^{((-1)-3)^2} - 1) = 5e^{16} - 5$. Also muss $f^{-1}(5e^{16} - 5) = -1$ sein:

$$\begin{array}{rcl}
f^{-1}(5e^{16} - 5) & = & -\sqrt{\ln(\frac{(5e^{16}-5)+5}{5})}\ +3 \\
& = & -\sqrt{\ln(\frac{5e^{16}}{5})}\ +3 \\
& = & -\sqrt{\ln(e^{16})}\ +3 \\
& = & -\sqrt{16}\ +3 \\
& = & -|4|\ +3 \\
& = & -1
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

$\boxed{1}$ $-\sqrt{\ln(\frac{x-5}{5})}+3$ $\boxed{2}$ $-\sqrt{\ln(\frac{x-5}{5})}-3$ $\boxed{3}$ $\ln(\sqrt{\frac{x-5}{5}})+3$

$\boxed{4}$ $-\sqrt{\ln(\frac{x+3}{3})}+5$ $\boxed{5}$ $-\ln(\sqrt{\frac{x-5}{5}})-3$ $\boxed{6}$ $\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})}-5$

$\boxed{7}$ $\ln(\sqrt{\frac{x+5}{5}})+3$ $\boxtimes$ $-\sqrt{\ln(\frac{x+5}{5})}+3$ $\boxed{9}$ $-\ln(\sqrt{\frac{x+5}{5}})+3$

$\boxed{10}$ $\sqrt{\ln(\frac{x-5}{5})}+3$ $\boxed{11}$ $-\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})}-5$ $\boxed{12}$ $\sqrt{\ln(\frac{x+3}{3})}+5$

Fehlerinterpretation:

$\boxed{1}$ $-\sqrt{\ln(\frac{x-5}{5})}+3$	RF: falsch umgeformt
$\boxed{2}$ $-\sqrt{\ln(\frac{x-5}{5})}-3$	RF: falsch umgeformt
$\boxed{3}$ $\ln(\sqrt{\frac{x-5}{5}})+3$	DF: falsche Reihenfolge
$\boxed{4}$ $-\sqrt{\ln(\frac{x+3}{3})}+5$	DF: falsche Reihenfolge
$\boxed{5}$ $-\ln(\sqrt{\frac{x-5}{5}})-3$	DF: falsche Reihenfolge
$\boxed{6}$ $\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})}-5$	DF: falsches Vorzeichen gewählt
$\boxed{7}$ $\ln(\sqrt{\frac{x+5}{5}})+3$	DF: falsche Reihenfolge
$\boxtimes$ $-\sqrt{\ln(\frac{x+5}{5})}+3$	richtig
$\boxed{9}$ $-\ln(\sqrt{\frac{x+5}{5}})+3$	DF: falsche Reihenfolge
$\boxed{10}$ $\sqrt{\ln(\frac{x-5}{5})}+3$	RF: falsch umgeformt
$\boxed{11}$ $-\sqrt{\ln(\frac{x-3}{3})}-5$	DF: falsche Reihenfolge
$\boxed{12}$ $\sqrt{\ln(\frac{x+3}{3})}+5$	DF: falsches Vorzeichen gewählt

MV 04	Blatt 05	Kapitel 4.1	Umkehrfunktion
Injektivisierung	Funktionen	Nummer: 82 0 200405002	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 5.1.8: Gegeben sei die Funktion f: $\mathbb{D} \to f(\mathbb{D}) = \mathbb{B} : f(x) = 2 \cdot \sin(\sqrt{14 \cdot x + 20}) + 4$ mit $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ maximal. Schränken Sie den Definitionsbereich der nicht injektiven, aber surjektiven (da der Wertebereich = Bildbereich) Funktion $f(x)$ so ein, dass die Funktion bijektiv (also injektiv und immer noch surjektiv) ist.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in der Funktion $(n \in 1..4)$ $x_n > 1$

Die Funktion lautet also: $x_1 \cdot \sin(\sqrt{x_2 \cdot x\ +\ x_3})\ +\ x_4$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 14 \quad x_3 = 20 \quad x_4 = 4$.

Erklärung:

Rechnung:

$\sin(\sqrt{y})$ ist nicht definiert für $y < 0$. Also ist $2 \cdot \sin(\sqrt{14 \cdot x + 20}) + 4$ definiert für $14 \cdot x + 20 \geq 0$ und damit $x \geq -\frac{10}{7}$. Da der Wertebereich von $\sin y = [-1\ ,\ 1]$ ist, ist der Bildbereich von $2 \cdot \sin(\sqrt{14 \cdot x + 20}) + 4 = [4-2\ ,\ 4+2] = [2\ ,\ 6]$. $\sin y$ ist injektiv (zum Beispiel) für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Weil die Wurzelfunktion monoton ist, kann der eingeschränkte Definitionsbereich durch Substitution ermittelt werden: $\sqrt{14 \cdot x + 20} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{10}{7}$ und $\sqrt{14 \cdot x + 20} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{(\frac{\pi}{2})^2 - 20}{14}$. Also ist der gesuchte Definitionsbereich $x \in [\frac{-10}{7}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-20}{14}]$.

Angebotene Lösungen:

$\boxed{1}$ $x \in \mathbb{R}$ $\boxed{2}$ $x \in (\frac{10}{7}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+20}{14})$ $\boxed{3}$ $x \in [-\frac{10}{7}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+20}{14}]$ $\boxed{4}$ $x \in [\frac{10}{7}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+20}{14}]$

$\boxed{5}$ $x \in (\frac{10}{7}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+20}{14}]$ $\boxed{6}$ $x \in (-\frac{10}{7}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-20}{14}]$ $\boxed{7}$ $x \in [-\frac{10}{7}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+20}{14}]$ $\boxed{8}$ $\emptyset$

$\boxed{9}$ $x \in (-\frac{10}{7}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+20}{14}]$ $\boxtimes$ $x \in [-\frac{10}{7}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-20}{14}]$ $\boxed{11}$ $x \in (-\frac{10}{7}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+20}{14})$ $\boxed{12}$ $x \in [-1, 1]$

Fehlerinterpretation:

1	$x \in \mathbb{R}$	DF: Lösung geraten
2	$x \in (\frac{10}{7}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+20}{14_2})$	DF: falsch substituiert
3	$x \in [-\frac{10}{7}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+20}{14}]$	DF: falsch substituiert
4	$x \in [\frac{10}{7}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+20}{14}]$	DF: falsch substituiert
5	$x \in (\frac{10}{7}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+20}{14_2}]$	DF: falsch substituiert
6	$x \in (-\frac{10}{7}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-20}{14}]$	DF: Ränder nicht beachtet
7	$x \in [-\frac{10}{7}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+20}{14}]$	DF: falsch substituiert
8	$\emptyset$	DF: Lösung geraten
9	$x \in (-\frac{10}{7}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2+20}{14}]$	DF: falsch substituiert
☒	$x \in [-\frac{10}{7}, \frac{(\frac{\pi}{2})^2-20}{14}]$	richtig
11	$x \in (-\frac{10}{7}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+20}{14})$	DF: falsch substituiert
12	$x \in [-1, 1]$	DF: Lösung geraten

Allgemeine Hinweise:

Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).

Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu