Blatt Nr 07.00

**Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 7**

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 07 | Kapitel 5.1 | Polarkoordinaten |
| keine | komplex | Nummer: 2 0 200407003 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 7.1.1:** Wandeln Sie die komplexe Zahl $-i \cdot 4$ in Polarkoordinaten der Form $r \cdot e^{i\phi}$ um.

**Parameter:**

$x_1 =$ (negativer) Imaginärteil $x_1 > 0$

In dieser Aufgabe ist
$x_1 = 4$.

**Erklärung:**

Für den Radius $r$ und den Winkel $\phi$ gelten die Gleichungen $\quad r^2 = a^2 + b^2 \quad$ und $\quad \tan\phi = \dfrac{b}{a}$.

In diesem Sonderfall muss aber eine Asymptote des arctan gewählt werden.

**Rechnung:**

$r^2 = (-4)^2$ und $\tan\phi =$ ' $\frac{-4}{0}$ '.

Nach der Vorlesung gilt für $z = a + ib$ : $$\phi = \begin{cases} \arctan_0 \frac{b}{a} & \text{für } a > 0 \\ \arctan_\pi \frac{b}{a} & \text{für } a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

Da $a = 0$ und $b < 0$ ist, gilt $\phi = -\frac{\pi}{2}$ . Also ist $\quad z = 4 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$

**Angebotene Lösungen:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 $4 \cdot e^{-i\pi}$ | 2 $4 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ | 3 $\frac{\pi}{2} \cdot e^{i\arctan_0(-4)}$ | 4 $-\frac{\pi}{2} \cdot e^{i\arctan_0(4)}$ |
| ☒ $4 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$ | 6 $\frac{\pi}{2} \cdot e^{i\arctan_0(4)}$ | 7 $-4 \cdot e^{-i\pi}$ | 8 $-4 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$ |
| 9 $-4 \cdot e^{i\pi}$ | 10 $-\frac{\pi}{2} \cdot e^{i\arctan_0(-4)}$ | 11 es gibt keine | 12 $4 \cdot e^{i\pi}$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $4 \cdot e^{-i\pi}$ | DF: falscher Winkel |
| 2 | $4 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ | DF: falscher Winkel |
| 3 | $\frac{\pi}{2} \cdot e^{i\arctan_0(-4)}$ | DF: $r$ und $\phi$ vertauscht |
| 4 | $-\frac{\pi}{2} \cdot e^{i\arctan_0(4)}$ | DF: $r$ und $\phi$ vertauscht |
| ☒ | $4 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$ | richtig |
| 6 | $\frac{\pi}{2} \cdot e^{i\arctan_0(4)}$ | DF: $r$ und $\phi$ vertauscht |
| 7 | $-4 \cdot e^{-i\pi}$ | DF: $r$ ist immer positiv |
| 8 | $-4 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$ | DF: $r$ ist immer positiv |
| 9 | $-4 \cdot e^{i\pi}$ | DF: $r$ ist immer positiv |
| 10 | $-\frac{\pi}{2} \cdot e^{i\arctan_0(-4)}$ | DF: $r$ und $\phi$ vertauscht |
| 11 | es gibt keine | DF: es gibt eine |
| 12 | $4 \cdot e^{i\pi}$ | DF: falscher Winkel |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 07 | Kapitel 5.1 | Arithmetik |
| keine | komplex | Nummer: 11 0 200407009 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 7.1.2:** Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z$, für die gilt: $z^4 = -7 - 5i$ (bei der Lösung sei $k$ eine beliebige natürliche Zahl zwischen 0 und 3).

**Parameter:**

$x_1$ = Potenz, $x_2$ = Realteil, $x_3$ = Imaginärteil $x_2 > 0, x_3 > 0, x_1 > 1$

Die Formel ist also $z^{x_1} = -x_2 - x_3 i$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 7 \quad x_3 = 5$.

**Erklärung:**

Wenden Sie die Formel von Moivre an:

$$\sqrt[n]{\mathring{z}} \quad = \quad \sqrt[n]{(r\mathring{e}^{i(\phi+2k\pi)})} \quad = \quad \sqrt[n]{r} \cdot \sqrt[n]{e^{i(\phi+2k\pi)}} \quad = \quad \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\phi+2k\pi}{n}}$$

**Rechnung:**

Wir müssen zunächst $-7-5i$ in Polarkoordinaten umwandeln: Es gilt $r = \sqrt{(-7)^2+(-5)^2} = \sqrt{74}$ und (weil der Realteil von $-7-5i$ negativ ist) $\phi = \arctan_\pi \frac{-5}{-7} = \arctan_0(\frac{5}{7}) + \pi$. Damit ist

$$\sqrt[4]{-7-5i} \quad = \quad \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\phi+2k\pi}{n}} \quad = \quad \sqrt[2\cdot 4]{74} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(\frac{5}{7})+\pi+2k\pi}{4}} \quad = \quad \sqrt[8]{74} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(\frac{5}{7})+(2k+1)\pi}{4}}$$

**Angebotene Lösungen:**

| | | |
|---|---|---|
| [1] $\pm\sqrt[4]{-5} - (\sqrt[4]{-7} + 2(k+1)\pi)i$ | [2] $\sqrt[4]{74} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(\frac{5}{7})+2k\pi}{4}}$ | [3] $\pm\sqrt[4]{7} \pm (\sqrt[4]{5} + 2k\pi)i$ |
| [4] $\pm\sqrt[4]{-7} - (\sqrt[4]{-5} + 2(k+1)\pi)i$ | [X] $\sqrt[8]{74} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(\frac{5}{7})+(2k+1)\pi}{4}}$ | [6] $\sqrt[4]{74} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(\frac{5}{7})+(2k+1)\pi}{4}}$ |
| [7] $\pm\sqrt[4]{74} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(\frac{5}{7})+2k\pi}{4}}$ | [8] $\pm\sqrt[4]{7} \pm (\sqrt[4]{5} + 2(k+1)\pi)i$ | [9] $\sqrt[8]{74} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(\frac{5}{7})+2k\pi}{4}}$ |
| [10] es gibt keine | [11] $\sqrt[4]{12} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(\frac{5}{7})+2k\pi}{4}}$ | [12] $\pm\sqrt[4]{-7} + (\sqrt[4]{-5} + 2k\pi)i$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | |
|---|---|
| [1] $\pm\sqrt[4]{-5} - (\sqrt[4]{-7} + 2(k+1)\pi)i$ | DF: falsch die Wurzel gezogen |
| [2] $\sqrt[4]{74} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(\frac{5}{7})+2k\pi}{4}}$ | DF: falscher Faktor vor dem $\pi$ |
| [3] $\pm\sqrt[4]{7} \pm (\sqrt[4]{5} + 2k\pi)i$ | DF: falsch die Wurzel gezogen |
| [4] $\pm\sqrt[4]{-7} - (\sqrt[4]{-5} + 2(k+1)\pi)i$ | DF: falsch die Wurzel gezogen |
| [X] $\sqrt[8]{74} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(\frac{5}{7})+(2k+1)\pi}{4}}$ | richtig |
| [6] $\sqrt[4]{74} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(\frac{5}{7})+(2k+1)\pi}{4}}$ | RF: falsche Wurzel |
| [7] $\pm\sqrt[4]{74} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(\frac{5}{7})+2k\pi}{4}}$ | DF: falscher Faktor vor dem $\pi$ |
| [8] $\pm\sqrt[4]{7} \pm (\sqrt[4]{5} + 2(k+1)\pi)i$ | DF: falsch die Wurzel gezogen |
| [9] $\sqrt[8]{74} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(\frac{5}{7})+2k\pi}{4}}$ | DF: falscher Faktor vor dem $\pi$ |
| [10] es gibt keine | DF: es gibt eine |
| [11] $\sqrt[4]{12} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(\frac{5}{7})+2k\pi}{4}}$ | DF: falscher Radius |
| [12] $\pm\sqrt[4]{-7} + (\sqrt[4]{-5} + 2k\pi)i$ | DF: falsch die Wurzel gezogen |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 07 | Kapitel 5.1 | Arithmetik |
| keine | komplex | Nummer: 13 0 200407008 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 7.1.3:** Berechnen Sie das Produkt $(7+5i)\cdot(3+4i)$.

**Parameter:**

$x_1, x_3$ = Realteil, $x_2, x_4$ = Imaginärteil $x_n > 0$

Die Formel ist also $(x_1 + x_2 i)\cdot(x_3 + x_4 i)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = 4$.

**Erklärung:**

Wenden Sie das Distributivgesetz an: $(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) \quad = \quad (a_1 \cdot a_2 \; - \; b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)i$

**Rechnung:**

$$(7 + 5i) \cdot (3 + 4i) \quad = \quad (7 \cdot 3 - 5 \cdot 4) + (7 \cdot 4 + 5 \cdot 3)i \quad = \quad 1 + 43i$$

**Angebotene Lösungen:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 $1 + 13i$ | 2 $-41 + -43i$ | 3 $41 + 13i$ | 4 $41 + 43i$ |
| 5 es gibt keines | 6 $21 + 20i$ | 7 $-21 + 20i$ | 8 $-21 + -20i$ |
| 9 $-1 + -43i$ | 10 $21 + -20i$ | ☒ $1 + 43i$ | 12 $-1 + -13i$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $1 + 13i$ | RF: falsch ausmultipliziert |
| 2 | $-41 + -43i$ | RF: falsch ausmultipliziert |
| 3 | $41 + 13i$ | RF: falsch ausmultipliziert |
| 4 | $41 + 43i$ | RF: falsch ausmultipliziert |
| 5 | es gibt keines | DF: es gibt eines |
| 6 | $21 + 20i$ | DF: falsch multipliziert |
| 7 | $-21 + 20i$ | DF: falsch multipliziert |
| 8 | $-21 + -20i$ | DF: falsch multipliziert |
| 9 | $-1 + -43i$ | RF: falsch ausmultipliziert |
| 10 | $21 + -20i$ | DF: falsch multipliziert |
| ☒ | $1 + 43i$ | richtig |
| 12 | $-1 + -13i$ | RF: falsch ausmultipliziert |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 07 | Kapitel 5.1 | Arithmetik |
| keine | komplex | Nummer: 15 0 200407007 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 7.1.4:** Wandeln Sie den Quotienten $\frac{5+5i}{2+3i}$ in die Form $a + bi$ um.

**Parameter:**

$x_1, x_3 =$ Realteil, $x_2, x_4 =$ Imaginärteil $x_n > 0$

Die Formel ist also $\frac{x_1 + x_2 i}{x_3 + x_4 i}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = 3$.

**Erklärung:**

Zu der Umwandlung müssen Sie den Bruch mit dem konjugiert komplexen des Nenners erweitern:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \quad = \quad \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} \quad = \quad \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_1^2 - i b_2 a_2 + i b_2 a_2 - i^2 \cdot b_2^2} \quad = \quad \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1^2 + b_2^2} i$$

**Rechnung:**

$$\frac{5 + 5i}{2 + 3i} \quad = \quad \frac{(5 + 5i) \cdot (2 - 3i)}{(2 + 3i) \cdot (2 - 3i)} \quad = \quad \frac{5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + i \cdot (2 \cdot 5 - 5 \cdot 3)}{2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + i \cdot (2 \cdot 3 - 2 \cdot 3)} \quad = \quad \frac{25 + -5i}{13} \quad = \quad \frac{25}{13} + \frac{-5}{13} i$$

**Angebotene Lösungen:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 $1 + 1i$ | 2 $\frac{5}{3} + \frac{5}{2} i$ | 3 $-5 + 1i$ | 4 $\frac{5}{2} + \frac{-5}{3} i$ |
| 5 $\frac{5}{3} + -1i$ | 6 $\frac{25}{13} + \frac{25}{13} i$ | 7 $\frac{5}{2} + \frac{5}{3} i$ | ☒ $\frac{25}{13} + \frac{-5}{13} i$ |
| 9 es gibt keinen | 10 $\frac{-5}{13} + \frac{25}{13} i$ | 11 $\frac{-5}{13} + \frac{-5}{13} i$ | 12 $-5 + -5i$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $1+1i$ | RF: Multiplikation bzw. Erweiterung falsch |
| 2 | $\frac{5}{3}+\frac{5}{2}i$ | DF: Multiplikation nicht verstanden |
| 3 | $-5+1i$ | RF: Multiplikation bzw. Erweiterung falsch |
| 4 | $\frac{5}{2}+\frac{-5}{3}i$ | DF: Multiplikation nicht verstanden |
| 5 | $\frac{5}{3}+-1i$ | DF: Multiplikation nicht verstanden |
| 6 | $\frac{25}{13}+\frac{25}{13}i$ | RF: Multiplikation bzw. Erweiterung falsch |
| 7 | $\frac{5}{2}+\frac{5}{3}i$ | DF: Multiplikation nicht verstanden |
| ☒ | $\frac{25}{13}+\frac{-5}{13}i$ | richtig |
| 9 | es gibt keinen | DF: es gibt einen |
| 10 | $\frac{-5}{13}+\frac{25}{13}i$ | RF: Multiplikation bzw. Erweiterung falsch |
| 11 | $\frac{-5}{13}+\frac{-5}{13}i$ | RF: Multiplikation bzw. Erweiterung falsch |
| 12 | $-5+-5i$ | RF: Multiplikation bzw. Erweiterung falsch |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 07 | Kapitel 4.5 | Umkehrmengenabbildung |
| keine | Funktionen | Nummer: 38 0 200407001 | Kl: 14G |
| Grad: 40 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 7.1.5:** Sei $M := \{1,5,6,7\}$ und $N := \{A,B,C,D,E\}$ und sei $f : M \to N$ definiert durch

$$f(1) := A \quad f(5) := C \quad f(6) := A \quad f(7) := A$$

Bestimmen Sie die Umkehrmengenabbildung $f^N(\{A,B\})$.

**Parameter:**

$x_n = n-$ te Zahl in N ($n \in 1..4$) $x_n > x_{n-1}$.
$x_7$ Anzahl der Elemente im Wertebereich $N$. $3 \leq x_7 \leq 6$

**Erklärung:**

Die Umkehrmengenabbildung $f^N$ ist so definiert: Sei $V$ eine beliebige Teilmenge von $N$, dann ist

$$f^N(V) := \{x \in M | \exists y \in V \text{mit } f(x) = y\}.$$

**Rechnung:**

$A$ hat die Urbilder $1,6,7$ und $B$ hat kein Urbild. Damit ist $f^N(\{A,B\}) = \{1,6,7\}$.

**Angebotene Lösungen:**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\{5,6,7\}$ | 2 | $\{1,5,7\}$ | 3 | $\{6,7\}$ | 4 | $\{1,6,7,\emptyset\}$ |
| 5 | $\{\emptyset,6,7\}$ | 6 | $\{1\}$ | 7 | $M$ | ☒ | $\{1,6,7\}$ |
| 9 | nicht definiert | 10 | $\{1,5,6\}$ | 11 | $\emptyset$ | 12 | $N$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\{5,6,7\}$ | DF: Umkehrmengenabbildung nicht verstanden |
| 2 | $\{1,5,7\}$ | DF: Umkehrmengenabbildung nicht verstanden |
| 3 | $\{6,7\}$ | DF: Umkehrmengenabbildung nicht verstanden |
| 4 | $\{1,6,7,\emptyset\}$ | DF: $\emptyset$ ist kein Element von $M$ |
| 5 | $\{\emptyset,6,7\}$ | DF: $\emptyset$ ist kein Element von $M$ |
| 6 | $\{1\}$ | DF: Umkehrmengenabbildung nicht verstanden |
| 7 | $M$ | DF: Umkehrmengenabbildung nicht verstanden |
| ☒ | $\{1,6,7\}$ | richtig |
| 9 | nicht definiert | DF: diese existiert immer |
| 10 | $\{1,5,6\}$ | DF: Umkehrmengenabbildung nicht verstanden |
| 11 | $\emptyset$ | DF: Umkehrmengenabbildung nicht verstanden |
| 12 | $N$ | DF: Umkehrmengenabbildung nicht verstanden |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 07 | Kapitel 5.1 | Polarkoordinaten |
| keine | komplex | Nummer: 40 0 200407002 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 7.1.6:** Wandeln Sie die komplexe Zahl $-4 + i \cdot 7$ in Polarkoordinaten der Form $r \cdot e^{i\phi}$ um.

**Parameter:**

$x_1$ = negativer Realteil, $x_2$ = Imaginärteil $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1 \neq x_2$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \qquad x_2 = 7$.

**Erklärung:**

Für den Radius $r$ und den Winkel $\phi$ gelten die Gleichungen $\qquad r^2 = a^2 + b^2 \qquad$ und $\qquad \tan\phi = \dfrac{b}{a}$.

**Rechnung:**

$r^2 = (-4)^2 + 7^2 = 65$ und $\tan\phi = \frac{7}{-4}$.

$$\text{Für } z = a + ib \text{ gilt:} \qquad \phi = \begin{cases} \arctan_0 \frac{b}{a} & \text{für } a > 0 \\ \arctan_\pi \frac{b}{a} & \text{für } a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

Da $a = -4$ negativ ist, muss $\phi = \arctan_\pi \frac{b}{a}$ gewählt werden.
Damit gilt $r = \sqrt{65}$ und $\phi = \arctan_\pi \frac{-7}{4} = \arctan_0(-\frac{7}{4}) + \pi$.

$$\text{Also ist} \qquad z = \sqrt{65} \cdot e^{i \arctan_0(-\frac{7}{4}) + \pi}$$

**Angebotene Lösungen:**

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{1}$ $\sqrt{65} \cdot e^{i \arctan_0(-\frac{7}{4})}$ | $\boxtimes$ $\sqrt{65} \cdot e^{i(\arctan_0(-\frac{7}{4})+\pi)}$ | $\boxed{3}$ $\sqrt{33} \cdot e^{i \arctan_0(\frac{7}{4})}$ |
| $\boxed{4}$ $\sqrt{65} \cdot e^{i(\arctan_0(-\frac{4}{7})+\pi)}$ | $\boxed{5}$ es gibt keine | $\boxed{6}$ $\sqrt{33} \cdot e^{i \arctan_0(-\frac{7}{4})}$ |
| $\boxed{7}$ $\sqrt{33} \cdot e^{i(\arctan_0(\frac{7}{4})+\pi)}$ | $\boxed{8}$ $\sqrt{65} \cdot e^{i(\arctan_0(\frac{7}{4})+\pi)}$ | $\boxed{9}$ $\sqrt{33} \cdot e^{i(\arctan_0(\frac{4}{7})+\pi)}$ |
| $\boxed{10}$ $\sqrt{33} \cdot e^{i(\arctan_0(-\frac{7}{4})+\pi)}$ | $\boxed{11}$ $\sqrt{33} \cdot e^{i \arctan_0(-\frac{4}{7})}$ | $\boxed{12}$ $\sqrt{65} \cdot e^{i(\arctan_0(\frac{4}{7})+\pi)}$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{1}$ | $\sqrt{65} \cdot e^{i \arctan_0(-\frac{7}{4})}$ | RF: falscher Zweig des arctan |
| $\boxtimes$ | $\sqrt{65} \cdot e^{i(\arctan_0(-\frac{7}{4})+\pi)}$ | richtig |
| $\boxed{3}$ | $\sqrt{33} \cdot e^{i \arctan_0(\frac{7}{4})}$ | RF: falscher Radius |
| $\boxed{4}$ | $\sqrt{65} \cdot e^{i(\arctan_0(-\frac{4}{7})+\pi)}$ | RF: falscher Quotient |
| $\boxed{5}$ | es gibt keine | DF: es gibt eine |
| $\boxed{6}$ | $\sqrt{33} \cdot e^{i \arctan_0(-\frac{7}{4})}$ | RF: falscher Radius |
| $\boxed{7}$ | $\sqrt{33} \cdot e^{i(\arctan_0(\frac{7}{4})+\pi)}$ | RF: falscher Radius |
| $\boxed{8}$ | $\sqrt{65} \cdot e^{i(\arctan_0(\frac{7}{4})+\pi)}$ | RF: falsches Vorzeichen |
| $\boxed{9}$ | $\sqrt{33} \cdot e^{i(\arctan_0(\frac{4}{7})+\pi)}$ | RF: falscher Radius, falscher Quotient |
| $\boxed{10}$ | $\sqrt{33} \cdot e^{i(\arctan_0(-\frac{7}{4})+\pi)}$ | RF: falscher Radius |
| $\boxed{11}$ | $\sqrt{33} \cdot e^{i \arctan_0(-\frac{4}{7})}$ | RF: falscher Radius, falscher Quotient |
| $\boxed{12}$ | $\sqrt{65} \cdot e^{i(\arctan_0(\frac{4}{7})+\pi)}$ | RF: falsches Vorzeichen, falscher Quotient |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 07 | Kapitel 5.1 | Polarkoordinaten |
| keine | komplex | Nummer: 77 0 200407004 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 7.1.7:** Wandeln Sie die in Polarkoordinaten gegebene komplexe Zahl $z = 2\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}$ in die Koordinatenform $z = a + ib$ um.

**Parameter:**

$x_1$ = Faktor von $\sqrt{2}$, $x_1 > 0$

In dieser Aufgabe ist $x_1 = 2$.

**Erklärung:**

Wenden Sie die Formel von Euler an:

$$z = r \cdot e^{i\phi} = r\cos\phi + ir\sin\phi \quad \text{also ist} \quad a = \Re(z) = r\cos\phi \quad \text{und} \quad b = \Im(z) = r\sin\phi$$

**Rechnung:**

$$\text{Nach der Formel von Euler gilt:} \quad \begin{array}{lclcl} a = \Re(z) = 2\sqrt{2}\cos(\frac{5\pi}{4}) & = & 2\sqrt{2}\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2}) & = & -2 \quad \text{und} \\ b = \Im(z) = 2\sqrt{2}\sin(\frac{5\pi}{4}) & = & 2\sqrt{2}\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2}) & = & -2. \end{array}$$

Damit ist $z = -2 - i2$.

**Angebotene Lösungen:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 $\frac{2\sqrt{3}}{2} - i1$ | 2 $\frac{2\sqrt{3}}{2} + i1$ | 3 $-\frac{2\sqrt{3}}{2} + i1$ | 4 $5\sqrt{2} + i4\pi\sqrt{2}$ |
| 5 $2\sqrt{2} + i\frac{5\pi}{4}$ | ☒ $-2 - i2$ | 7 $2 + i2$ | 8 $-2\sqrt{2} - i2\sqrt{2}$ |
| 9 es gibt keine | 10 $2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$ | 11 $-2 + i2$ | 12 $5 + i4\pi$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{2\sqrt{3}}{2} - i1$ | RF: Winkelfunktionen sind falsch berechnet |
| 2 | $\frac{2\sqrt{3}}{2} + i1$ | RF: Winkelfunktionen sind falsch berechnet |
| 3 | $-\frac{2\sqrt{3}}{2} + i1$ | RF: Winkelfunktionen sind falsch berechnet |
| 4 | $5\sqrt{2} + i4\pi\sqrt{2}$ | RF: Winkelfunktionen sind falsch berechnet |
| 5 | $2\sqrt{2} + i\frac{5\pi}{4}$ | DF: Eulerformel nicht angewendet |
| ☒ | $-2 - i2$ | richtig |
| 7 | $2 + i2$ | RF: Falsches Vorzeichen |
| 8 | $-2\sqrt{2} - i2\sqrt{2}$ | RF: Winkelfunktionen sind falsch berechnet |
| 9 | es gibt keine | DF: es gibt eine |
| 10 | $2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$ | RF: Winkelfunktionen sind falsch berechnet |
| 11 | $-2 + i2$ | RF: Falsches Vorzeichen |
| 12 | $5 + i4\pi$ | RF: Winkelfunktionen sind falsch berechnet |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 07 | Kapitel 5.1 | Polarkoordinaten |
| keine | komplex | Nummer: 89 0 200407005 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 7.1.8:** Wandeln Sie die in Polarkoordinaten gegebene komplexe Zahl $z = 5 \cdot e^{-i\cdot\frac{4}{11}}$ in die Koordinatenform $z = a + ib$ um.

**Parameter:**

$x_1$ = Betrag, $x_2, x_3$ = Argument ; $x_1, x_2 > 1$, $x_2 < x_3$

Die Formel ist also $z = x_1 \cdot e^{-i\cdot\frac{x_2}{x_3}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 11$.

**Erklärung:**

Wenden Sie die Formel von Euler an:

$$z = r \cdot e^{i\phi} = r\cos\phi + ir\sin\phi \quad \text{also ist} \quad a = \Re(z) = r\cos\phi \quad \text{und} \quad b = \Im(z) = r\sin\phi$$

**Rechnung:**

$$\text{Nach der Formel von Euler gilt:} \quad a = \Re(z) = 5\cos(\tfrac{4}{11}) \quad \text{und} \quad b = \Im(z) = 5\sin(\tfrac{-4}{11})$$

Damit ist $z = 5\cos\frac{4}{11} - i5\sin\frac{4}{11}$.

**Angebotene Lösungen:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| [1] $5\sin\frac{4}{11}+5i\cos\frac{4}{11}$ | [2] es gibt keine | [3] $-5\cos\frac{4}{11}-5i\sin\frac{4}{11}$ | [4] $5\cos\frac{4}{11}+5i\sin\frac{4}{11}$ |
| [X] $5\cos\frac{4}{11}-5i\sin\frac{4}{11}$ | [6] $-\frac{4}{11}\cos 5+\frac{4}{11}i\sin 5$ | [7] $-5\cos\frac{4}{11}+5i\sin\frac{4}{11}$ | [8] $\frac{4}{11}\sin 5+\frac{4}{11}i\cos 5$ |
| [9] $-5\sin\frac{4}{11}+5i\cos\frac{4}{11}$ | [10] $-5\sin\frac{4}{11}-5i\cos\frac{4}{11}$ | [11] $5\sin\frac{4}{11}-5i\cos\frac{4}{11}$ | [12] 162 |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| [1] $5\sin\frac{4}{11}+5i\cos\frac{4}{11}$ | DF: falsche Winkelfunktionen | |
| [2] es gibt keine | DF: es gibt eine | |
| [3] $-5\cos\frac{4}{11}-5i\sin\frac{4}{11}$ | RF: falsches Vorzeichen | |
| [4] $5\cos\frac{4}{11}+5i\sin\frac{4}{11}$ | RF: falsches Vorzeichen | |
| [X] $5\cos\frac{4}{11}-5i\sin\frac{4}{11}$ | richtig | |
| [6] $-\frac{4}{11}\cos 5+\frac{4}{11}i\sin 5$ | DF: falsche Deutung von $r$ und $\phi$ | |
| [7] $-5\cos\frac{4}{11}+5i\sin\frac{4}{11}$ | RF: falsches Vorzeichen | |
| [8] $\frac{4}{11}\sin 5+\frac{4}{11}i\cos 5$ | DF: falsche Deutung von $r$ und $\phi$ | |
| [9] $-5\sin\frac{4}{11}+5i\cos\frac{4}{11}$ | DF: falsche Winkelfunktionen | |
| [10] $-5\sin\frac{4}{11}-5i\cos\frac{4}{11}$ | DF: falsche Winkelfunktionen | |
| [11] $5\sin\frac{4}{11}-5i\cos\frac{4}{11}$ | DF: falsche Winkelfunktionen | |
| [12] 162 | GL: | geratene Lösung |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 07 | Kapitel 5.1 | Logarithmen |
| keine | komplex | Nummer: 92 0 200407006 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 7.1.9:** Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z$, für die gilt: $e^z=-7-6i$ (bei der Lösung sei $k$ eine beliebige ganze Zahl).

**Parameter:**

$x_1$ = Realteil, $x_2$ = Imaginärteil $x_1>x_2>0$

Die Formel ist also $e^z=-x_1-x_2$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=7\quad x_2=6$.

**Erklärung:**

Es gilt $e^z=c\Leftrightarrow z=\ln c$. Sei $c=r\cdot e^{i\phi}$, dann gilt

$$\ln c=\ln(re^{i(\phi+2k\pi)})=\ln r+\ln(e^{i(\phi+2k\pi)})=\ln r+i(\phi+2k\pi)\quad\forall k\in\mathbb{Z}.$$

**Rechnung:**

Wir müssen zunächst $-7-6i$ in Polarkoordinaten umwandeln: Es gilt $r=\sqrt{(-7)^2+(-6)^2}=\sqrt{85}$ und (weil der Realteil von $-7-6i$ negativ ist) $\phi=\arctan_\pi\frac{-6}{-7}=\arctan_0(\frac{6}{7})+\pi$. Damit ist

$$\ln -7-i6 \;=\; \ln r+i(\phi+2k\pi) \;=\; \ln\sqrt{85}+i(\arctan_0(\frac{6}{7})+\pi+2k\pi) \;=\; \frac{\ln 85}{2}+i(\arctan_0(\frac{6}{7})+(2k+1)\pi)$$

**Angebotene Lösungen:**

| | |
|---|---|
| [1] $-\frac{\ln 85}{2}-i(\arctan_0(\frac{6}{7})+k\pi)$ | [2] $\frac{\ln 85}{2}+i(\arctan_0(\frac{6}{7})+k\pi)$ |
| [3] $\sqrt{\ln 85}-i(\arctan_0(\frac{6}{7})+2k\pi)$ | [4] $\frac{\ln 85}{2}-i(\arctan_0(\frac{6}{7})+2k\pi)$ |
| [5] $\frac{\ln 85}{2}+i(\arctan_0(\frac{6}{7})+2k\pi)$ | [6] $-\frac{\ln 85}{2}-i(\arctan_0(\frac{6}{7})+(2k+1)\pi)$ |
| [7] es gibt keine | [8] $\frac{\ln 85}{2}-i(\arctan_0(\frac{6}{7})+(2k+1)\pi)$ |
| [9] $-\frac{\ln 85}{2}-i(\arctan_0(\frac{6}{7})+2k\pi)$ | [10] $\frac{\ln 85}{2}-i(\arctan_0(\frac{6}{7})+k\pi)$ |
| [X] $\frac{\ln 85}{2}+i(\arctan_0(\frac{6}{7})+(2k+1)\pi)$ | [12] $-\sqrt{\ln 85}-i(\arctan_0(\frac{6}{7})+k\pi)$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $-\frac{\ln 85}{2} - i(\arctan_0(\frac{6}{7}) + k\pi)$ | DF: falscher Faktor vor dem $\pi$ |
| 2 | $\frac{\ln 85}{2} + i(\arctan_0(\frac{6}{7}) + k\pi)$ | DF: falscher Faktor vor dem $\pi$ |
| 3 | $\sqrt{\ln 85} - i(\arctan_0(\frac{6}{7}) + 2k\pi)$ | DF: falscher Ansatz $\pi$ |
| 4 | $\frac{\ln 85}{2} - i(\arctan_0(\frac{6}{7}) + 2k\pi)$ | DF: falscher Faktor vor dem $\pi$ |
| 5 | $\frac{\ln 85}{2} + i(\arctan_0(\frac{6}{7}) + 2k\pi)$ | DF: falscher Faktor vor dem $\pi$ |
| 6 | $-\frac{\ln 85}{2} - i(\arctan_0(\frac{6}{7}) + (2k+1)\pi)$ | RF: falsches Vorzeichen |
| 7 | es gibt keine | DF: es gibt eine |
| 8 | $\frac{\ln 85}{2} - i(\arctan_0(\frac{6}{7}) + (2k+1)\pi)$ | RF: falsches Vorzeichen |
| 9 | $-\frac{\ln 85}{2} - i(\arctan_0(\frac{6}{7}) + 2k\pi)$ | DF: falscher Faktor vor dem $\pi$ |
| 10 | $\frac{\ln 85}{2} - i(\arctan_0(\frac{6}{7}) + k\pi)$ | DF: falscher Faktor vor dem $\pi$ |
| ☒ | $\frac{\ln 85}{2} + i(\arctan_0(\frac{6}{7}) + (2k+1)\pi)$ | richtig |
| 12 | $-\sqrt{\ln 85} - i(\arctan_0(\frac{6}{7}) + k\pi)$ | DF: falscher Ansatz $\pi$ |

**Allgemeine Hinweise:**
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de ).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu