Blatt Nr 07.04

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 7

MV 04	Blatt 07	Kapitel 5.1	Arithmetik
keine	komplex	Nummer: 4 0 200407009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 7.1.1: Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z, für die gilt: $z^6 = -4 - 4i$ (bei der Lösung sei k eine beliebige natürliche Zahl zwischen 0 und 5).

Parameter:

$x_1 =$ Potenz, $x_2 =$ Realteil, $x_3 =$ Imaginärteil $x_2 > 0, x_3 > 0, x_1 > 1$

Die Formel ist also $z^{x_1} = -x_2 - x_3 i$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6 \qquad x_2 = 4 \qquad x_3 = 4$.

Erklärung:

Wenden Sie die Formel von Moivre an:

$$\overset{\circ}{\sqrt[n]{z}} \quad = \quad \sqrt[n]{\overset{\circ}{(re^{i(\phi+2k\pi)})}} \quad = \quad \sqrt[n]{r} \cdot \sqrt[n]{e^{i(\phi+2k\pi)}} \quad = \quad \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\phi+2k\pi}{n}}$$

Rechnung:

Wir müssen zunächst $-4 - 4i$ in Polarkoordinaten umwandeln: Es gilt $r = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$ und (weil der Realteil von $-4 - 4i$ negativ ist) $\phi = \arctan_\pi \frac{-4}{-4} = \arctan_0(1) + \pi$. Damit ist

$$\sqrt[6]{-4-4i} \quad = \quad \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\phi+2k\pi}{n}} \quad = \quad \sqrt[2\cdot 6]{32} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(1)+\pi+2k\pi}{6}} \quad = \quad \sqrt[12]{32} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(1)+(2k+1)\pi}{6}}$$

Angebotene Lösungen:

$\boxed{1}$ $\pm\sqrt[6]{-4} - (\sqrt[6]{-4} + 2(k+1)\pi)i$	$\boxed{2}$ $\sqrt[6]{32} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(1)+(2k+1)\pi}{6}}$	$\boxed{3}$ $\pm\sqrt[6]{-4} + (\sqrt[6]{-4} + 2k\pi)i$
$\boxtimes$ $\sqrt[12]{32} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(1)+(2k+1)\pi}{6}}$	$\boxed{5}$ $\pm\sqrt[6]{8} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(1)+2k\pi}{6}}$	$\boxed{6}$ $\pm\sqrt[6]{32} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(1)+2k\pi}{6}}$
$\boxed{7}$ $\sqrt[6]{8} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(1)+2k\pi}{6}}$	$\boxed{8}$ $\pm\sqrt[6]{4} \pm (\sqrt[6]{4} + 2(k+1)\pi)i$	$\boxed{9}$ $\pm\sqrt[6]{4} \pm (\sqrt[6]{4} + 2k\pi)i$
$\boxed{10}$ $\sqrt[12]{32} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(1)+2k\pi}{6}}$	$\boxed{11}$ $\sqrt[6]{32} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(1)+2k\pi}{6}}$	$\boxed{12}$ es gibt keine

Fehlerinterpretation:

$\boxed{1}$ $\pm\sqrt[6]{-4} - (\sqrt[6]{-4} + 2(k+1)\pi)i$	DF: falsch die Wurzel gezogen
$\boxed{2}$ $\sqrt[6]{32} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(1)+(2k+1)\pi}{6}}$	RF: falsche Wurzel
$\boxed{3}$ $\pm\sqrt[6]{-4} + (\sqrt[6]{-4} + 2k\pi)i$	DF: falsch die Wurzel gezogen
$\boxtimes$ $\sqrt[12]{32} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(1)+(2k+1)\pi}{6}}$	richtig
$\boxed{5}$ $\pm\sqrt[6]{8} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(1)+2k\pi}{6}}$	DF: falscher Radius
$\boxed{6}$ $\pm\sqrt[6]{32} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(1)+2k\pi}{6}}$	DF: falscher Faktor vor dem π
$\boxed{7}$ $\sqrt[6]{8} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(1)+2k\pi}{6}}$	DF: falscher Radius
$\boxed{8}$ $\pm\sqrt[6]{4} \pm (\sqrt[6]{4} + 2(k+1)\pi)i$	DF: falsch die Wurzel gezogen
$\boxed{9}$ $\pm\sqrt[6]{4} \pm (\sqrt[6]{4} + 2k\pi)i$	DF: falsch die Wurzel gezogen
$\boxed{10}$ $\sqrt[12]{32} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(1)+2k\pi}{6}}$	DF: falscher Faktor vor dem π
$\boxed{11}$ $\sqrt[6]{32} \cdot e^{i\frac{\arctan_0(1)+2k\pi}{6}}$	DF: falscher Faktor vor dem π
$\boxed{12}$ es gibt keine	DF: es gibt eine

MV 04	Blatt 07	Kapitel 5.1	Polarkoordinaten
keine	komplex	Nummer: 7 0 200407004	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 7.1.2: Wandeln Sie die in Polarkoordinaten gegebene komplexe Zahl $z = 7\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}$ in die Koordinatenform $z = a + ib$ um.

Parameter:

x_1 = Faktor von $\sqrt{2}$, $x_1 > 0$

In dieser Aufgabe ist $x_1 = 7$.

Erklärung:

Wenden Sie die Formel von Euler an:

$$z = r \cdot e^{i\phi} = r\cos\phi + ir\sin\phi \quad \text{also ist} \quad a = \Re(z) = r\cos\phi \quad \text{und} \quad b = \Im(z) = r\sin\phi$$

Rechnung:

Nach der Formel von Euler gilt:
$$\begin{aligned} a = \Re(z) = 7\sqrt{2}\cos(\tfrac{5\pi}{4}) &= 7\sqrt{2} \cdot (-\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = -7 \quad \text{und} \\ b = \Im(z) = 7\sqrt{2}\sin(\tfrac{5\pi}{4}) &= 7\sqrt{2} \cdot (-\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = -7. \end{aligned}$$

Damit ist $z = -7 - i7$.

Angebotene Lösungen:

☒ $-7 - i7$	2 $7 - i7$	3 $-\frac{7\sqrt{3}}{2} - i\frac{7}{2}$	4 $7\sqrt{2} - i7\sqrt{2}$
5 $-7\sqrt{2} - i7\sqrt{2}$	6 $\frac{7\sqrt{3}}{2} + i\frac{7}{2}$	7 $-\frac{7\sqrt{3}}{2} + i\frac{7}{2}$	8 $-7\sqrt{2} + i7\sqrt{2}$
9 $7\sqrt{2} + i\frac{5\pi}{4}$	10 $-7 + i7$	11 $5 + i4\pi$	12 $7\sqrt{2} + i7\sqrt{2}$

Fehlerinterpretation:

☒	$-7 - i7$	richtig
2	$7 - i7$	RF: Falsches Vorzeichen
3	$-\frac{7\sqrt{3}}{2} - i\frac{7}{2}$	RF: Winkelfunktionen sind falsch berechnet
4	$7\sqrt{2} - i7\sqrt{2}$	RF: Winkelfunktionen sind falsch berechnet
5	$-7\sqrt{2} - i7\sqrt{2}$	RF: Winkelfunktionen sind falsch berechnet
6	$\frac{7\sqrt{3}}{2} + i\frac{7}{2}$	RF: Winkelfunktionen sind falsch berechnet
7	$-\frac{7\sqrt{3}}{2} + i\frac{7}{2}$	RF: Winkelfunktionen sind falsch berechnet
8	$-7\sqrt{2} + i7\sqrt{2}$	RF: Winkelfunktionen sind falsch berechnet
9	$7\sqrt{2} + i\frac{5\pi}{4}$	DF: Eulerformel nicht angewendet
10	$-7 + i7$	RF: Falsches Vorzeichen
11	$5 + i4\pi$	RF: Winkelfunktionen sind falsch berechnet
12	$7\sqrt{2} + i7\sqrt{2}$	RF: Winkelfunktionen sind falsch berechnet

MV 04	Blatt 07	Kapitel 5.1	Polarkoordinaten
keine	komplex	Nummer: 59 0 200407002	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 7.1.3: Wandeln Sie die komplexe Zahl $-4 + i \cdot 3$ in Polarkoordinaten der Form $r \cdot e^{i\phi}$ um.

Parameter:

x_1 = negativer Realteil, x_2 = Imaginärteil $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1 \neq x_2$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \qquad x_2 = 3$.

Erklärung:

Für den Radius r und den Winkel ϕ gelten die Gleichungen $\qquad r^2 = a^2 + b^2 \qquad$ und $\qquad \tan\phi = \dfrac{b}{a}$.

Rechnung:

$r^2 = (-4)^2 + 3^2 = 25$ und $\tan\phi = \frac{3}{-4}$.

$$\text{Für } z = a + ib \text{ gilt:} \qquad \phi = \begin{cases} \arctan_0 \frac{b}{a} & \text{für } a > 0 \\ \arctan_\pi \frac{b}{a} & \text{für } a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

Da $a = -4$ negativ ist, muss $\phi = \arctan_\pi \frac{b}{a}$ gewählt werden.
Damit gilt $r = \sqrt{25}$ und $\phi = \arctan_\pi \frac{-3}{4} = \arctan_0(-\frac{3}{4}) + \pi$.

$$\text{Also ist} \qquad z = \sqrt{25} \cdot e^{i \arctan_0(-\frac{3}{4})+\pi}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\sqrt{25} \cdot e^{i(\arctan_0(\frac{4}{3})+\pi)}$	2 $\sqrt{-7} \cdot e^{i \arctan_0(-\frac{3}{4})}$	3 $\sqrt{-7} \cdot e^{i \arctan_0(-\frac{4}{3})}$
☒ $\sqrt{25} \cdot e^{i(\arctan_0(-\frac{3}{4})+\pi)}$	5 $\sqrt{-7} \cdot e^{i(\arctan_0(-\frac{4}{3})+\pi)}$	6 $\sqrt{25} \cdot e^{i \arctan_0(-\frac{3}{4})}$
7 es gibt keine	8 $\sqrt{-7} \cdot e^{i(\arctan_0(\frac{3}{4})+\pi)}$	9 $\sqrt{-7} \cdot e^{i \arctan_0(\frac{3}{4})}$
10 $\sqrt{25} \cdot e^{i \arctan_0(-\frac{4}{3})}$	11 $\sqrt{25} \cdot e^{i(\arctan_0(\frac{3}{4})+\pi)}$	12 $\sqrt{25} \cdot e^{i(\arctan_0(-\frac{4}{3})+\pi)}$

Fehlerinterpretation:

1	$\sqrt{25} \cdot e^{i(\arctan_0(\frac{4}{3})+\pi)}$	RF: falsches Vorzeichen, falscher Quotient
2	$\sqrt{-7} \cdot e^{i \arctan_0(-\frac{3}{4})}$	RF: falscher Radius
3	$\sqrt{-7} \cdot e^{i \arctan_0(-\frac{4}{3})}$	RF: falscher Radius, falscher Quotient
☒	$\sqrt{25} \cdot e^{i(\arctan_0(-\frac{3}{4})+\pi)}$	richtig
5	$\sqrt{-7} \cdot e^{i(\arctan_0(-\frac{4}{3})+\pi)}$	RF: falscher Radius, falscher Quotient
6	$\sqrt{25} \cdot e^{i \arctan_0(-\frac{3}{4})}$	RF: falscher Zweig des arctan
7	es gibt keine	DF: es gibt eine
8	$\sqrt{-7} \cdot e^{i(\arctan_0(\frac{3}{4})+\pi)}$	RF: falscher Radius
9	$\sqrt{-7} \cdot e^{i \arctan_0(\frac{3}{4})}$	RF: falscher Radius
10	$\sqrt{25} \cdot e^{i \arctan_0(-\frac{4}{3})}$	RF: falscher Zweig des arctan , falscher Quotient
11	$\sqrt{25} \cdot e^{i(\arctan_0(\frac{3}{4})+\pi)}$	RF: falsches Vorzeichen
12	$\sqrt{25} \cdot e^{i(\arctan_0(-\frac{4}{3})+\pi)}$	RF: falscher Quotient

MV 04	Blatt 07	Kapitel 5.1	Polarkoordinaten
keine	komplex	Nummer: 71 0 200407005	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 7.1.4: Wandeln Sie die in Polarkoordinaten gegebene komplexe Zahl $z = 7 \cdot e^{-i \cdot \frac{4}{9}}$ in die Koordinatenform $z = a + ib$ um.

Parameter:

$x_1 =$ Betrag, $x_2, x_3 =$ Argument ; $x_1, x_2 > 1$, $x_2 < x_3$

Die Formel ist also $z = x_1 \cdot e^{-i \cdot \frac{x_2}{x_3}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 9$.

Erklärung:

Wenden Sie die Formel von Euler an:

$$z = r \cdot e^{i\phi} = r\cos\phi + ir\sin\phi \quad \text{also ist} \quad a = \Re(z) = r\cos\phi \quad \text{und} \quad b = \Im(z) = r\sin\phi$$

Rechnung:

$$\text{Nach der Formel von Euler gilt:} \quad a = \Re(z) = 7\cos(\tfrac{4}{9}) \quad \text{und} \quad b = \Im(z) = 7\sin(\tfrac{-4}{9})$$

Damit ist $z = 7\cos\frac{4}{9} - i7\sin\frac{4}{9}$.

Angebotene Lösungen:

1 $-7\sin\frac{4}{9}+7i\cos\frac{4}{9}$	2 es gibt keine	3 $-7\cos\frac{4}{9}+7i\sin\frac{4}{9}$	4 $\frac{4}{9}\sin 7+\frac{4}{9}i\cos 7$
5 $-7\sin\frac{4}{9}-7i\cos\frac{4}{9}$	6 $-\frac{4}{9}\cos 7+\frac{4}{9}i\sin 7$	7 $7\cos\frac{4}{9}+7i\sin\frac{4}{9}$	8 $-7\cos\frac{4}{9}-7i\sin\frac{4}{9}$
9 $7\sin\frac{4}{9}-7i\cos\frac{4}{9}$	☒ $7\cos\frac{4}{9}-7i\sin\frac{4}{9}$	11 $7\sin\frac{4}{9}+7i\cos\frac{4}{9}$	12 162

Fehlerinterpretation:

1	$-7\sin\frac{4}{9}+7i\cos\frac{4}{9}$	DF: falsche Winkelfunktionen	
2	es gibt keine	DF: es gibt eine	
3	$-7\cos\frac{4}{9}+7i\sin\frac{4}{9}$	RF: falsches Vorzeichen	
4	$\frac{4}{9}\sin 7+\frac{4}{9}i\cos 7$	DF: falsche Deutung von r und ϕ	
5	$-7\sin\frac{4}{9}-7i\cos\frac{4}{9}$	DF: falsche Winkelfunktionen	
6	$-\frac{4}{9}\cos 7+\frac{4}{9}i\sin 7$	DF: falsche Deutung von r und ϕ	
7	$7\cos\frac{4}{9}+7i\sin\frac{4}{9}$	RF: falsches Vorzeichen	
8	$-7\cos\frac{4}{9}-7i\sin\frac{4}{9}$	RF: falsches Vorzeichen	
9	$7\sin\frac{4}{9}-7i\cos\frac{4}{9}$	DF: falsche Winkelfunktionen	
☒	$7\cos\frac{4}{9}-7i\sin\frac{4}{9}$	richtig	
11	$7\sin\frac{4}{9}+7i\cos\frac{4}{9}$	DF: falsche Winkelfunktionen	
12	162	GL:	geratene Lösung

MV 04	Blatt 07	Kapitel 5.1	Polarkoordinaten
keine	komplex	Nummer: 77 0 200407003	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 7.1.5: Wandeln Sie die komplexe Zahl $-i\cdot 7$ in Polarkoordinaten der Form $r\cdot e^{i\phi}$ um.

Parameter:

x_1 = (negativer) Imaginärteil $x_1 > 0$

In dieser Aufgabe ist
$x_1 = 7$.

Erklärung:

Für den Radius r und den Winkel ϕ gelten die Gleichungen $\quad r^2 = a^2+b^2 \quad$ und $\quad \tan\phi = \dfrac{b}{a}$.

In diesem Sonderfall muss aber eine Asymptote des arctan gewählt werden.

Rechnung:

$r^2 = (-7)^2$ und $\tan\phi =$ ' $\frac{-7}{0}$ '.

Nach der Vorlesung gilt für $z = a+ib$:
$$\phi = \begin{cases} \arctan_0 \frac{b}{a} & \text{für } a > 0 \\ \arctan_\pi \frac{b}{a} & \text{für } a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

Da $a = 0$ und $b < 0$ ist, gilt $\phi = -\frac{\pi}{2}$. Also ist $\quad z = 7\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Angebotene Lösungen:

1 $-7\cdot e^{i\pi}$	2 $7\cdot e^{-i\pi}$	3 es gibt keine	4 $7\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$
5 $\frac{\pi}{2}\cdot e^{i\arctan_0(7)}$	6 $-\frac{\pi}{2}\cdot e^{i\arctan_0(7)}$	7 $\frac{\pi}{2}\cdot e^{i\arctan_0(-7)}$	8 $7\cdot e^{i\pi}$
☒ $7\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$	10 $-7\cdot e^{-i\pi}$	11 $-7\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$	12 $-\frac{\pi}{2}\cdot e^{i\arctan_0(-7)}$

Fehlerinterpretation:

$\boxed{1}$	$-7 \cdot e^{i\pi}$	DF: r ist immer positiv
$\boxed{2}$	$7 \cdot e^{-i\pi}$	DF: falscher Winkel
$\boxed{3}$	es gibt keine	DF: es gibt eine
$\boxed{4}$	$7 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$	DF: falscher Winkel
$\boxed{5}$	$\frac{\pi}{2} \cdot e^{i\arctan_0(7)}$	DF: r und ϕ vertauscht
$\boxed{6}$	$-\frac{\pi}{2} \cdot e^{i\arctan_0(7)}$	DF: r und ϕ vertauscht
$\boxed{7}$	$\frac{\pi}{2} \cdot e^{i\arctan_0(-7)}$	DF: r und ϕ vertauscht
$\boxed{8}$	$7 \cdot e^{i\pi}$	DF: falscher Winkel
$\boxtimes$	$7 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$	richtig
$\boxed{10}$	$-7 \cdot e^{-i\pi}$	DF: r ist immer positiv
$\boxed{11}$	$-7 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$	DF: r ist immer positiv
$\boxed{12}$	$-\frac{\pi}{2} \cdot e^{i\arctan_0(-7)}$	DF: r und ϕ vertauscht

MV 04	Blatt 07	Kapitel 4.5	Umkehrmengenabbildung
keine	Funktionen	Nummer: 86 0 200407001	Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 7.1.6: Sei $M := \{1, 6, 10, 12\}$ und $N := \{A, B, C, D, E\}$ und sei $f : M \to N$ definiert durch

$$f(1) := A \quad f(6) := C \quad f(10) := A \quad f(12) := A$$

Bestimmen Sie die Umkehrmengenabbildung $f^N(\{A, B\})$.

Parameter:

$x_n = n-$ te Zahl in N ($n \in 1..4$) $x_n > x_{n-1}$.
x_7 Anzahl der Elemente im Wertebereich N. $3 \leq x_7 \leq 6$

Erklärung:

Die Umkehrmengenabbildung f^N ist so definiert: Sei V eine beliebige Teilmenge von N, dann ist

$$f^N(V) := \{x \in M | \exists y \in V \text{mit } f(x) = y\}.$$

Rechnung:

A hat die Urbilder $1, 10, 12$ und B hat kein Urbild. Damit ist $f^N(\{A, B\}) = \{1, 10, 12\}$.

Angebotene Lösungen:

$\boxed{1}$	$\{1, 6, 12\}$	$\boxed{2}$	$\{1, 10, 12, \emptyset\}$	$\boxed{3}$	$\{10, 12\}$	$\boxed{4}$	$\{1, 6, 10, 12, \emptyset\}$
$\boxed{5}$	$\{\emptyset, 10, 12\}$	$\boxed{6}$	M	$\boxed{7}$	nicht definiert	$\boxed{8}$	$\{1, 6, 10\}$
$\boxed{9}$	N	$\boxed{10}$	$\emptyset$	$\boxtimes$	$\{1, 10, 12\}$	$\boxed{12}$	$\{6, 10, 12\}$

Fehlerinterpretation:

$\boxed{1}$	$\{1, 6, 12\}$	DF: Umkehrmengenabbildung nicht verstanden
$\boxed{2}$	$\{1, 10, 12, \emptyset\}$	DF: $\emptyset$ ist kein Element von M
$\boxed{3}$	$\{10, 12\}$	DF: Umkehrmengenabbildung nicht verstanden
$\boxed{4}$	$\{1, 6, 10, 12, \emptyset\}$	DF: $\emptyset$ ist kein Element von M
$\boxed{5}$	$\{\emptyset, 10, 12\}$	DF: $\emptyset$ ist kein Element von M
$\boxed{6}$	M	DF: Umkehrmengenabbildung nicht verstanden
$\boxed{7}$	nicht definiert	DF: diese existiert immer
$\boxed{8}$	$\{1, 6, 10\}$	DF: Umkehrmengenabbildung nicht verstanden
$\boxed{9}$	N	DF: Umkehrmengenabbildung nicht verstanden
$\boxed{10}$	$\emptyset$	DF: Umkehrmengenabbildung nicht verstanden
$\boxtimes$	$\{1, 10, 12\}$	richtig
$\boxed{12}$	$\{6, 10, 12\}$	DF: Umkehrmengenabbildung nicht verstanden

MV 04	Blatt 07	Kapitel 5.1	Logarithmen
keine	komplex	Nummer: 88 0 200407006	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 7.1.7: Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z, für die gilt: $e^z = -2 - 4i$ (bei der Lösung sei k eine beliebige ganze Zahl).

Parameter:

x_1 = Realteil, x_2 = Imaginärteil $x_1 > x_2 > 0$

Die Formel ist also $e^z = -x_1 - x_2$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 4$.

Erklärung:

Es gilt $e^z = c \Leftrightarrow z = \ln c$. Sei $c = r \cdot e^{i\phi}$, dann gilt

$$\ln c = \ln(re^{i(\phi+2k\pi)}) = \ln r + \ln(e^{i(\phi+2k\pi)}) = \ln r + i(\phi + 2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Rechnung:

Wir müssen zunächst $-2 - 4i$ in Polarkoordinaten umwandeln: Es gilt $r = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$ und (weil der Realteil von $-2 - 4i$ negativ ist) $\phi = \arctan_\pi \frac{-4}{-2} = \arctan_0(2) + \pi$. Damit ist

$$\ln -2 - i4 = \ln r + i(\phi + 2k\pi) = \ln\sqrt{20} + i(\arctan_0(2) + \pi + 2k\pi) = \frac{\ln 20}{2} + i(\arctan_0(2) + (2k+1)\pi)$$

Angebotene Lösungen:

[1] $\frac{\ln 20}{2} - i(\arctan_0(2) + 2k\pi)$	[2] $-\frac{\ln 20}{2} - i(\arctan_0(2) + (2k+1)\pi)$
[3] $\frac{\ln 20}{2} + i(\arctan_0(2) + k\pi)$	[4] $-\sqrt{\ln 20} - i(\arctan_0(2) + k\pi)$
[5] es gibt keine	[X] $\frac{\ln 20}{2} + i(\arctan_0(2) + (2k+1)\pi)$
[7] $\frac{\ln 20}{2} - i(\arctan_0(2) + k\pi)$	[8] $\frac{\ln 20}{2} - i(\arctan_0(2) + (2k+1)\pi)$
[9] $-\frac{\ln 20}{2} - i(\arctan_0(2) + 2k\pi)$	[10] $\frac{\ln 20}{2} + i(\arctan_0(2) + 2k\pi)$
[11] $-\frac{\ln 20}{2} - i(\arctan_0(2) + k\pi)$	[12] $\sqrt{\ln 20} - i(\arctan_0(2) + 2k\pi)$

Fehlerinterpretation:

[1]	$\frac{\ln 20}{2} - i(\arctan_0(2) + 2k\pi)$	DF: falscher Faktor vor dem π
[2]	$-\frac{\ln 20}{2} - i(\arctan_0(2) + (2k+1)\pi)$	RF: falsches Vorzeichen
[3]	$\frac{\ln 20}{2} + i(\arctan_0(2) + k\pi)$	DF: falscher Faktor vor dem π
[4]	$-\sqrt{\ln 20} - i(\arctan_0(2) + k\pi)$	DF: falscher Ansatz π
[5]	es gibt keine	DF: es gibt eine
[X]	$\frac{\ln 20}{2} + i(\arctan_0(2) + (2k+1)\pi)$	richtig
[7]	$\frac{\ln 20}{2} - i(\arctan_0(2) + k\pi)$	DF: falscher Faktor vor dem π
[8]	$\frac{\ln 20}{2} - i(\arctan_0(2) + (2k+1)\pi)$	RF: falsches Vorzeichen
[9]	$-\frac{\ln 20}{2} - i(\arctan_0(2) + 2k\pi)$	DF: falscher Faktor vor dem π
[10]	$\frac{\ln 20}{2} + i(\arctan_0(2) + 2k\pi)$	DF: falscher Faktor vor dem π
[11]	$-\frac{\ln 20}{2} - i(\arctan_0(2) + k\pi)$	DF: falscher Faktor vor dem π
[12]	$\sqrt{\ln 20} - i(\arctan_0(2) + 2k\pi)$	DF: falscher Ansatz π

MV 04	Blatt 07	Kapitel 5.1	Arithmetik
keine	komplex	Nummer: 101 0 200407007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 7.1.8: Wandeln Sie den Quotienten $\frac{7+2i}{5+10i}$ in die Form $a + bi$ um.

Parameter:

x_1, x_3 = Realteil, x_2, x_4 = Imaginärteil $x_n > 0$

Die Formel ist also $\frac{x_1+x_2i}{x_3+x_4i}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 10.$

Erklärung:

Zu der Umwandlung müssen Sie den Bruch mit dem konjugiert komplexen des Nenners erweitern:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_1^2 - i b_2 a_2 + i b_2 a_2 - i^2 \cdot b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1^2 + b_2^2} i$$

Rechnung:

$$\frac{7 + 2i}{5 + 10i} = \frac{(7 + 2i) \cdot (5 - 10i)}{(5 + 10i) \cdot (5 - 10i)} = \frac{7 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + i \cdot (5 \cdot 2 - 7 \cdot 10)}{5 \cdot 5 + 10 \cdot 10 + i \cdot (5 \cdot 10 - 5 \cdot 10)} = \frac{55 + -60i}{125} = \frac{11}{25} + \frac{-12}{25} i$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{7}{5} + \frac{-1}{5} i$	2 $\frac{1}{5} + \frac{7}{5} i$	☒ $\frac{11}{25} + \frac{-12}{25} i$	4 $\frac{-11}{15} + \frac{4}{5} i$
5 $\frac{7}{5} + \frac{1}{5} i$	6 $\frac{3}{25} + \frac{16}{25} i$	7 $\frac{7}{10} + \frac{-7}{2} i$	8 es gibt keinen
9 $\frac{11}{25} + \frac{16}{25} i$	10 $\frac{-1}{5} + \frac{4}{5} i$	11 $\frac{1}{5} + \frac{-7}{5} i$	12 $\frac{3}{25} + \frac{-12}{25} i$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{7}{5} + \frac{-1}{5} i$	DF: Multiplikation nicht verstanden
2	$\frac{1}{5} + \frac{7}{5} i$	DF: Multiplikation nicht verstanden
☒	$\frac{11}{25} + \frac{-12}{25} i$	richtig
4	$\frac{-11}{15} + \frac{4}{5} i$	RF: Multiplikation bzw. Erweiterung falsch
5	$\frac{7}{5} + \frac{1}{5} i$	DF: Multiplikation nicht verstanden
6	$\frac{3}{25} + \frac{16}{25} i$	RF: Multiplikation bzw. Erweiterung falsch
7	$\frac{7}{10} + \frac{-7}{2} i$	DF: Multiplikation nicht verstanden
8	es gibt keinen	DF: es gibt einen
9	$\frac{11}{25} + \frac{16}{25} i$	RF: Multiplikation bzw. Erweiterung falsch
10	$\frac{-1}{5} + \frac{4}{5} i$	RF: Multiplikation bzw. Erweiterung falsch
11	$\frac{1}{5} + \frac{-7}{5} i$	DF: Multiplikation nicht verstanden
12	$\frac{3}{25} + \frac{-12}{25} i$	RF: Multiplikation bzw. Erweiterung falsch

MV 04	Blatt 07	Kapitel 5.1	Arithmetik
keine	komplex	Nummer: 109 0 200407008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 7.1.9: Berechnen Sie das Produkt $(6 + 2i) \cdot (4 + 3i)$.

Parameter:

$x_1, x_3 =$ Realteil, $x_2, x_4 =$ Imaginärteil $x_n > 0$

Die Formel ist also $(x_1 + x_2 i) \cdot (x_3 + x_4 i)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 4 \quad x_4 = 3.$

Erklärung:

Wenden Sie das Distributivgesetz an: $(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) i$

Rechnung:

$$(6 + 2i) \cdot (4 + 3i) = (6 \cdot 4 - 2 \cdot 3) + (6 \cdot 3 + 2 \cdot 4) i = 18 + 26i$$

Angebotene Lösungen:

1 $30+10i$	2 $30+26i$	3 $-18+-10i$	4 $-30+-26i$
5 $24+6i$	6 $-24+-6i$	☒ $18+26i$	8 $-18+-26i$
9 es gibt keines	10 $-24+6i$	11 $18+10i$	12 $24+-6i$

Fehlerinterpretation:

1	$30+10i$	RF: falsch ausmultipliziert
2	$30+26i$	RF: falsch ausmultipliziert
3	$-18+-10i$	RF: falsch ausmultipliziert
4	$-30+-26i$	RF: falsch ausmultipliziert
5	$24+6i$	DF: falsch multipliziert
6	$-24+-6i$	DF: falsch multipliziert
☒	$18+26i$	richtig
8	$-18+-26i$	RF: falsch ausmultipliziert
9	es gibt keines	DF: es gibt eines
10	$-24+6i$	DF: falsch multipliziert
11	$18+10i$	RF: falsch ausmultipliziert
12	$24+-6i$	DF: falsch multipliziert

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu