Blatt Nr 08.06

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 8

MV 04	Blatt 08	Kapitel 6.1	Linearfaktorzerlegung
keine	ElementareFktn	Nummer: 28 0 200408001	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 8.1.1: Zerlegen Sie die Funktion $p(x) = 4x^3 - 28x^2 + 56x - 32$ in (komplexe) Linearfaktoren.

Parameter:

x_1 = Faktor vor dem x^3, x_2, x_3 = Nullstellen, $x_3 > x_2 > 0, x_1 > 1$

Die Formel ist also: $x_1x^3 - \{(1 + x_2 + x_3) \cdot x_1\}x^2 + \{(x_2 + x_3 + x_2 \cdot x_3) \cdot x_1\}x - \{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3\}.$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 4.$

Erklärung:

Klammern Sie zuerst den Faktor vor dem x^3 aus. Suchen Sie durch Probieren eine Lösung $x_0 \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3\}$. Danach teilen Sie $p(x)$ durch $x - x_0$ mit Polynomdivision. Denken Sie daran, dass jede reelle Zahl auch komplex ist. Das Ausklammern am Anfang erleichtert in erster Linie das Suchen von Nullstellen und das Ausrechnen, es kann auch am Ende gemacht werden.

Rechnung:

Wir klammern zuerst 4 aus: $p(x) = 4(x^3 - 7x^2 + 14x - 8) =: 4 \cdot q(x)$.
Offensichtlich löst $x_0 = 1$ die Gleichung: $p(1) = 4(1^3 - 7 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1 - 8) = 0$.
Damit sind $p(x)$ und $q(x)$ durch $(x - 1)$ teilbar:

$$\begin{array}{rrrrll}
x^3 & -7x^2 & +14x & -8: & (x-1) & = x^2 - 6x + 8 \\
-x^3 & +x^2 & & & & \\
\hline
 & -6x^2 & +14x & & & \\
 & +6x^2 & -6x & & & \\
\hline
 & & +8x & -8 & & \\
 & & -8x & +8 & & \\
\hline
 & & & 0 & &
\end{array}$$

Gesucht sind jetzt noch die Nullstellen von $x^2 - 6x + 8$ (mit der Mitternachtsformel):

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{(6)^2 - 48}}{2} = 2 \quad \text{oder} \quad 4$$

Damit ist die Linearfaktorzerlegung: $4 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)$.

Angebotene Lösungen:

$\boxed{1}$ $(x - 28) \cdot (x + 56) \cdot (x - 32)$	$\boxed{2}$ $(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 4)$	$\boxed{3}$ $(x + 4) \cdot (x + 2) \cdot (x + 4)$
$\boxed{4}$ $(x - 7) \cdot (x - 14) \cdot (x - 8)$	$\boxed{5}$ $4 \cdot (x - 7) \cdot (x + 14) \cdot (x - 8)$	$\boxed{6}$ $4 \cdot (x + 7) \cdot (x + 14) \cdot (x + 8)$
$\boxed{7}$ $4 \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 4)$	$\boxed{8}$ $4 \cdot (x - 7) \cdot (x - 14) \cdot (x - 8)$	$\boxed{9}$ $(x - 4) \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)$
$\boxed{10}$ $(x + 28) \cdot (x + 56) \cdot (x + 32)$	$\boxed{11}$ es gibt keine	$\boxed{\times}$ $4 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)$

Fehlerinterpretation:

1	$(x-28)\cdot(x+56)\cdot(x-32)$	DF: völlig falsch zerlegt
2	$(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+4)$	DF: Vorfaktor vergessen
3	$(x+4)\cdot(x+2)\cdot(x+4)$	DF: Vorfaktor vergessen und falsch zerlegt
4	$(x-7)\cdot(x-14)\cdot(x-8)$	DF: völlig falsch zerlegt
5	$4\cdot(x-7)\cdot(x+14)\cdot(x-8)$	DF: völlig falsch zerlegt
6	$4\cdot(x+7)\cdot(x+14)\cdot(x+8)$	DF: völlig falsch zerlegt
7	$4\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+4)$	RF: Vorzeichen falsch
8	$4\cdot(x-7)\cdot(x-14)\cdot(x-8)$	DF: völlig falsch zerlegt
9	$(x-4)\cdot(x-2)\cdot(x-4)$	DF: Vorfaktor vergessen und falsch zerlegt
10	$(x+28)\cdot(x+56)\cdot(x+32)$	DF: völlig falsch zerlegt
11	es gibt keine	DF: es gibt eine
☒	$4\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4)$	richtig

MV 04	Blatt 08	Kapitel 6.2	gebrochenrationale
stetigeErg	ElementareFktn	Nummer: 38 0 200408006	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 8.1.2: Gegeben sei die gebrochenrationale Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ maximal) mit

$$f(x) \quad = \quad \frac{(5x-10)\cdot(8x+32)^5\cdot(x-6)^2\cdot(x+5)}{(x-6)\cdot(4x+16)^6\cdot(6x-12)\cdot(x+6)}.$$

An welchen Stellen $x \notin \mathbb{D}$ ist $f(x)$ stetig ergänzbar?

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden im Bruch, $x_n > 1$, $x_8 > x_5$, x_2, x_4, x_6, paarweise verschieden, $n = 1..9$

Die Formel lautet: $\frac{(x_1x-\{x_1\cdot x_2\})\cdot(x_3x+\{x_3\cdot x_4\})^{x_5}\cdot(x-x_6)^2\cdot(x+x_2)}{(x-x_6)\cdot(x_7x+\{x_7\cdot x_4\})^{x_8}\cdot(x_9x-\{x_9\cdot x_2\})\cdot(x+x_6)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5$ $x_2 = 2$ $x_3 = 8$ $x_4 = 4$ $x_5 = 5$ $x_6 = 6$ $x_7 = 4$ $x_8 = 6$ $x_9 = 6$.

Erklärung:

Suchen Sie die Nennernullstellen und versuchen Sie (evtl. durch Ausklammern und Linearfaktorzerlegungen) zu Kürzen. Gelingt dies so, dass eine Nullstelle des Nenners nach dem Kürzen keine mehr ist, so ist $f(x)$ dort stetig ergänzbar.

Rechnung:

Der Definitionsbereich der Funktion ist: $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{2, 6, -4, -6\}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \tfrac{(5x-10)\cdot(8x+32)^5\cdot(x-6)^2\cdot(x+2)}{(x-6)\cdot(4x+16)^6\cdot(6x-12)\cdot(x+6)} \\
&= \tfrac{5\cdot(x-2)\cdot 8^5\cdot(x+4)^5\cdot(x-6)^2\cdot(x+2)}{(x-6)\cdot 4^6\cdot(x+4)^6\cdot 6\cdot(x-2)\cdot(x+6)} \\
&= \tfrac{5\cdot 8^5\cdot(x-6)\cdot(x+2)}{4^6\cdot 6\cdot(x+4)^1\cdot(x+6)}
\end{aligned}$$

Die Faktoren $(x-2)$ und $(x-6)$ (und damit die zugehörigen Nullstellen) sind aus dem Nenner verschwunden. Damit ist $f(x)$ bei $x = 2$ und $x = 6$ stetig ergänzbar.

Angebotene Lösungen:

☒	$x = 2$ und $x = 6$	2	$x = 6$ und $x = -2$	3	$\mathbb{R}\backslash\{\pm 2, 6, -4\}$
4	$\mathbb{R}\backslash\{2, \pm 6, -4\}$	5	es gibt keine	6	$x = 2$
7	$\mathbb{R}\backslash\{2\}$	8	$\mathbb{R}\backslash\{6, -2\}$	9	$x = 2$ und $x = \pm 6$ und $x = -4$
10	$\mathbb{R}\backslash\{2, 6\}$	11	$x = -4$ und $x = -6$	12	$x = \pm 2$ und $x = 6$ und $x = -4$

Fehlerinterpretation:

☒	$x=2$ und $x=6$	richtig
2	$x=6$ und $x=-2$	DF: alle Nullstellen angegeben
3	$\mathbb{R}\backslash\{\pm 2, 6, -4\}$	DF: stetige Ergänzung nicht verstanden
4	$\mathbb{R}\backslash\{2, \pm 6, -4\}$	DF: Definitionsbereich angegeben
5	es gibt keine	DF: doch
6	$x=2$	DF: an einer Nullstelle kann f auch stetig ergänzbar sein
7	$\mathbb{R}\backslash\{2\}$	DF: stetige Ergänzung nicht verstanden
8	$\mathbb{R}\backslash\{6, -2\}$	DF: stetige Ergänzung nicht verstanden
9	$x=2$ und $x=\pm 6$ und $x=-4$	DF: alle Nullstellen des Nenners angegeben
10	$\mathbb{R}\backslash\{2, 6\}$	DF: stetige Ergänzung nicht verstanden
11	$x=-4$ und $x=-6$	DF: nur die senkrechten Asymptoten angegeben
12	$x=\pm 2$ und $x=6$ und $x=-4$	DF: alle Nullstellen des Zählers angegeben

MV 04	Blatt 08	Kapitel 6.1	gebrochenrationale
Asymptoten	ElementareFktn	Nummer: 49 0 200408005	Kl: 14G
Grad: 30 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 8.1.3: Finden Sie alle Asymptoten der folgenden Funktion: $f(x) = 2 \cdot \tan\left(\sqrt[8]{2x-8}\right)$ (im Folgenden sei k eine beliebige ganze Zahl, n eine beliebige Zahl aus $\mathbb{N}_0$).

Parameter:

x_1 = Vorfaktor, $x_2 = n$ - te Wurzel, x_3, x_4 = Koeffizienten unter der Wurzel.
$x_1 > 0$, $x_2 > 1$, x_2 gerade $x_3, x_4 > 1$

Die Funktion lautet also: $f(x) = x_1 \cdot \tan\left(\sqrt[x_2]{x_3 x - \{x_4 \cdot x_3\}}\right)$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2$ $x_2 = 8$ $x_3 = 2$ $x_4 = 4$.

Erklärung:

Die senkrechten Asymptoten sind die Nennernullstellen des Tangens, also die Nullstellen des Kosinus.

Rechnung:

$\cos x' = 0$ für $x' = \frac{(2k+1)\pi}{2}$. Also hat $\tan x'$ senkrechten Asymptoten bei $x' = \frac{(2k+1)\pi}{2}$. Setzen wir $x' = \sqrt[8]{2x-8}$, so erhalten wir:

$$\begin{array}{rlcl} x' & = \sqrt[8]{2x-8} & = & \frac{(2k+1)\pi}{2} \\ \Rightarrow & 2\cdot(x-4) & = & \left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)^8 \\ \Leftrightarrow & x-4 & = & \frac{((2k+1)\pi)^8}{2^8 \cdot 2} \\ \Leftrightarrow & x & = & \frac{((2k+1)\pi)^8}{2^8 \cdot 2} + 4 \end{array}$$

Die Probe ist wegen des Potenzierens mit 8 notwendig, wird hier aber nicht durchgeführt. Durch das Potenzieren mit 8 fallen die Asymptoten für negative und positive k zusammen. Deshalb kann hier das k durch ein n ersetzt werden. Die senkrechten Asymptoten sind $x = \frac{((2n+1)\pi)^8}{2^8 \cdot 2} + 4$. Der Defintionsbereich von $f(x)$ ist $x \geq 4$, $x \neq \frac{((2n+1)\pi)^8}{2^8 \cdot 2} + 4$. Bei $x = 4$ hat $f(x)$ eine Nullstelle. Waagrechte oder schiefe Asymptoten hat $f(x)$ nicht. Der Vorfaktor $2 (\neq 0)$ hat für die senkrechten Asymptoten keine Bedeutung.

Angebotene Lösungen:

1	$x = \pm\frac{\sqrt[8]{(2n+1)\pi}}{\sqrt[8]{2}\cdot 2} + 4$ und $y = \pm 2 \cdot \frac{\pi}{2}$	2	es gibt keine
3	$x = \frac{(2n\pi)^8}{2^8\cdot 2} + 4$ und $y = \pm 2 \cdot \frac{\pi}{2}$	4	$x = \frac{\sqrt[8]{(2n+1)\pi}}{\sqrt[8]{2}\cdot 2} + 4$ und $y = \pm 2 \cdot \frac{\pi}{2}$
5	$x = \frac{\sqrt[8]{(2n+1)\pi}}{\sqrt[8]{2}\cdot 2} + 4$	6	$x = \frac{((2n+1)\pi)^8}{2^8\cdot 2} + 4$ und $y = \pm 2 \cdot \frac{\pi}{2}$
7	$x = \pm\frac{(2n\pi)^8}{2^8\cdot 2} + 4$	8	$x = \frac{\sqrt[8]{2n\pi}}{\sqrt[8]{2}\cdot 2} + 4$ und $y = \pm 2 \cdot \frac{\pi}{2}$
9	$x = \pm\frac{((2n+1)\pi)^8}{2^8\cdot 2} + 4$	☒	$x = \frac{((2n+1)\pi)^8}{2^8\cdot 2} + 4$
11	$x = \frac{(2n\pi)^8}{2^8\cdot 2} + 4$	12	162

Fehlerinterpretation:

1	$x = \pm\frac{\sqrt[8]{(2n+1)\pi}}{\sqrt[8]{2}\cdot 2} + 4$ und $y = \pm 2 \cdot \frac{\pi}{2}$	DF: f hat keine waagrechten Asymptoten
2	es gibt keine	DF: doch
3	$x = \frac{(2n\pi)^8}{2^8\cdot 2} + 4$ und $y = \pm 2 \cdot \frac{\pi}{2}$	DF: f hat keine waagrechten Asymptoten
4	$x = \frac{\sqrt[8]{(2n+1)\pi}}{\sqrt[8]{2}\cdot 2} + 4$ und $y = \pm 2 \cdot \frac{\pi}{2}$	DF: f hat keine waagrechten Asymptoten
5	$x = \frac{\sqrt[8]{(2n+1)\pi}}{\sqrt[8]{2}\cdot 2} + 4$	RF: falsch aufgelöst
6	$x = \frac{((2n+1)\pi)^8}{2^8\cdot 2} + 4$ und $y = \pm 2 \cdot \frac{\pi}{2}$	DF: f hat keine waagrechten Asymptoten
7	$x = \pm\frac{(2n\pi)^8}{2^8\cdot 2} + 4$	DF: f ist nur für $x \geq 4$ definiert
8	$x = \frac{\sqrt[8]{2n\pi}}{\sqrt[8]{2}\cdot 2} + 4$ und $y = \pm 2 \cdot \frac{\pi}{2}$	DF: f hat keine waagrechten Asymptoten
9	$x = \pm\frac{((2n+1)\pi)^8}{2^8\cdot 2} + 4$	DF: f ist nur für $x \geq 4$ definiert
☒	$x = \frac{((2n+1)\pi)^8}{2^8\cdot 2} + 4$	richtig
11	$x = \frac{(2n\pi)^8}{2^8\cdot 2} + 4$	DF: das sind die Nullstellen
12	162	GL: geratene Lösung

MV 04	Blatt 08	Kapitel 6.1	Linearfaktorzerlegung
keine	ElementareFktn	Nummer: 54 0 200408002	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 8.1.4: Zerlegen Sie die Funktion $p(x) = 4x^2 - 32x + 260$ in (komplexe) Linearfaktoren.

Parameter:

x_1 = Faktor vor dem x^2, x_2, x_3 = Realteil und Imaginärteil der komplexen Nullstelle, $x_3 > x_2 > 0, x_1 > 1$

Die Formel ist also: $x_1x^2 - \{2 \cdot x_2 \cdot x_1\}x + \{(x_2^2 + x_3^2) \cdot x_1\}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 7$.

Erklärung:

Die Berechung beginnt mit der Mitternachtsformel: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Rechnung:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{32 \pm \sqrt{(32)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 260}}{2 \cdot 4} = \frac{32 \pm \sqrt{-3136}}{8} = 4 \pm \frac{56i}{8} = 4 \pm 7i$$

Damit ist die Linearfaktorzerlegung: $4 \cdot (x - (4 + 7i)) \cdot (x - (4 - 7i))$.

Angebotene Lösungen:

1	$4 \cdot (x - 8) \cdot (x - 65)$	2	$4 \cdot (x - 8i) \cdot (x - 65i)$
3	$(x - (7 + 4i)) \cdot (x - (7 - 4i))$	4	$4 \cdot (x - 4) \cdot (x - 7)$
5	$(x - 32)^2 \cdot (x - 260)^2$	6	$4 \cdot (x - (4 + 7i))^2 \cdot (x - (4 - 7i))^2$
7	es gibt keine	☒	$4 \cdot (x - (4 + 7i)) \cdot (x - (4 - 7i))$
9	$4 \cdot (x - (7 + 4i))^2 \cdot (x - (7 - 4i))^2$	10	$4 \cdot (x - (7 + 4i)) \cdot (x - (7 - 4i))$
11	$(x - 32) \cdot (x - 260)$	12	$(x - (4 + 7i))^2 \cdot (x - (4 - 7i))^2$

Fehlerinterpretation:

1	$4 \cdot (x-8) \cdot (x-65)$	DF: MNF nicht richtig gerechnet
2	$4 \cdot (x-8i) \cdot (x-65i)$	DF: MNF nicht richtig gerechnet
3	$(x-(7+4i)) \cdot (x-(7-4i))$	DF: Realteil und Imaginärteil verwechselt
4	$4 \cdot (x-4) \cdot (x-7)$	DF: MNF nicht richtig gerechnet
5	$(x-32)^2 \cdot (x-260)^2$	DF: MNF nicht richtig gerechnet
6	$4 \cdot (x-(4+7i))^2 \cdot (x-(4-7i))^2$	DF: MNF Wurzel ist 'reell'
7	es gibt keine	DF: es gibt eine (zumindest komplex)
☒	$4 \cdot (x-(4+7i)) \cdot (x-(4-7i))$	richtig
9	$4 \cdot (x-(7+4i))^2 \cdot (x-(7-4i))^2$	DF: Realteil und Imaginärteil verwechselt
10	$4 \cdot (x-(7+4i)) \cdot (x-(7-4i))$	DF: Realteil und Imaginärteil verwechselt
11	$(x-32) \cdot (x-260)$	DF: MNF nicht richtig gerechnet
12	$(x-(4+7i))^2 \cdot (x-(4-7i))^2$	DF: MNF Wurzel ist 'reell'

MV 04	Blatt 08	Kapitel 6.1	gebrochenrationale
Asymptoten	ElementareFktn	Nummer: 75 0 200408004	Kl: 14G
Grad: 30 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 8.1.5: Finden Sie alle Asymptoten der folgenden Funktion:

$$f(x) = (-4) \cdot \frac{(x-2)^3 \cdot (30-5x)}{(x-10)^2 \cdot (x-6)}$$

Parameter:

$x_1, x_5 =$ Vorfaktoren, $x_2, x_3 =$ Zählernullstellen, $x_4, x_3 =$ Nennernullstellen.
$x_1 < 0, \quad x_4 > x_3 > x_2 > 0, \quad x_5 > 1$

Die Funktion lautet also: $f(x) = x_1 \cdot \frac{(x-x_2)^3 \cdot (\{x_3 \cdot x_5\} - x_5 x)}{(x-x_4)^2 \cdot (x-x_3)}$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = -4 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 6 \quad x_4 = 10 \quad x_5 = 5$.

Erklärung:

Die waagrechten oder schiefen Asymptoten berechnen Sie durch Polynomdivision mit Rest, die senkrechten Asymptoten sind im voll gekürzten Fall die Nennernullstellen.

Rechnung:

Sowohl Zähler als auch Nenner haben die Nullstelle 6. Deshalb kann man $(x-6)$ kürzen:

$$(-4) \cdot \frac{(x-2)^3 \cdot (30-5x)}{(x-10)^2 \cdot (x-6)} = (-4) \cdot \frac{(x-2)^3 \cdot (-5) \cdot (x-6)}{(x-10)^2 \cdot (x-6)} = (-4) \cdot \frac{(x-2)^3 \cdot (-5)}{(x-10)^2} = 20 \cdot \frac{(x-2)^3}{(x-10)^2}$$

Damit ist $x = 6$ keine senkrechte Asymptote, $x = 10$ dagegen ist eine. Die schiefe Asymptote errechnet sich durch Polynomdivision mit Rest. Dazu betrachten wir:

$$\begin{array}{rrrrl}
x^3 & -6x^2 & +12x & -8 & : \ (x^2-20x+100) \ = x+14+\frac{192x-1408}{x^2-20x+100} \\
-x^3 & +20x^2 & -100x & & \\
\hline
 & 14x^2 & -88x & & \\
 & -14x^2 & +280x & -1400 & \\
\hline
 & & 192x & -1408 &
\end{array}$$

Damit ist $y = 20 \cdot (x+14) = 20x + 280$ schiefe Asymptote.

Angebotene Lösungen:

☒	$x = 10$ und $y = 20x + 280$	2	$x = 10$ und $x = 6$ und $y = -4x$
3	$x = 10$ und $x = 6$ und $y = 20x + 280$	4	$x = \pm 10$ und $x = 6$ und $y = 20x + 280$
5	$x = \pm 10$ und $y = 20x$	6	$x = \pm 10$ und $x = 6$ und $y = x$
7	$x = \pm 10$ und $y = x + 14$	8	$x = 10$ und $y = -4x$
9	$x = 10$ und $x = 6$ und $y = x$	10	$x = 10$ und $x = 6$ und $y = x + 14$
11	$x = \pm 10$ und $y = 20x + 280$	12	$x = 10$ und $y = x + 14$

Fehlerinterpretation:

☒	$x = 10$ und $y = 20x + 280$	richtig
2	$x = 10$ und $x = 6$ und $y = -4x$	DF: schiefe Asymptote falsch und mehr
3	$x = 10$ und $x = 6$ und $y = 20x + 280$	DF: nicht gekürzt
4	$x = \pm 10$ und $x = 6$ und $y = 20x + 280$	DF: nicht gekürzt und mehr
5	$x = \pm 10$ und $y = 20x$	DF: schiefe Asymptote falsch und mehr
6	$x = \pm 10$ und $x = 6$ und $y = x$	DF: schiefe Asymptote falsch und mehr
7	$x = \pm 10$ und $y = x + 14$	DF: Nennernullstelle falsch interpretiert
8	$x = 10$ und $y = -4x$	DF: schiefe Asymptote falsch und mehr
9	$x = 10$ und $x = 6$ und $y = x$	DF: schiefe Asymptote falsch und mehr
10	$x = 10$ und $x = 6$ und $y = x + 14$	RF: Vorfaktor vergessen
11	$x = \pm 10$ und $y = 20x + 280$	DF: Nennernullstelle falsch interpretiert
12	$x = 10$ und $y = x + 14$	RF: Vorfaktor vergessen

MV 04	Blatt 08	Kapitel 6.1	Linearfaktorzerlegung
keine	ElementareFktn	Nummer: 102 0 200408003	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 8.1.6: Finden Sie ein Polynom möglichst niedrigen Grades durch die Punkte $(-2, 27)$, $(0, 9)$, $(2, 39)$.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Koeffizienten des Ergebnispolynoms, $x_3 > x_2 > 0$, $x_1 > 1$
$x_4, x_5, x_6 = x$ - Werte zu den berechneten y - Werten $x_4 < 0, x_5 = 0, x_6 > 0$

Die Punkte lauten also: $(x_n, \{x_1 \cdot x_n^2 + x_2 \cdot x_n + x_3\})$ $(n = 4, 5, 6)$.
Das Ergebnis ist: $x_1 x^2 + x_2 x + x_3$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 9 \quad x_4 = -2 \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 2$.

Erklärung:

Weil drei Punkte gegeben sind, ist der Minimalgrad des Polynomes $= 3-1 = 2$. Machen Sie also eine Punktprobe mit den drei Punkten bei einem allgemeinen Polynom zweiten Grades und lösen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem.

Rechnung:

Die Punktprobe bei $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ergibt:

$$\begin{array}{rclll} 27 & = & a \cdot (-2)^2 & +b \cdot (-2) & +c \\ 9 & = & a \cdot 0^2 & +b \cdot 0 & +c \\ 39 & = & a \cdot 2^2 & +b \cdot 2 & +c \end{array}$$

Lösung des Gleichungssystems ergibt: $a = 6, b = 3, c = 9$ (wird hier nicht durchgeführt). Damit ist das Lösungspolynom $6x^2 + 3x + 9$.

Angebotene Lösungen:

☒ $6x^2 + 3x + 9$	2 $-2x^2 + 0x + 2$	3 $\pm(9x^2 + 3x + 6)$	4 $3x + 9$
5 $-2x + 0$	6 $\pm(3x + 9)$	7 es gibt keines	8 $\pm(-2x + 0)$
9 $6x + 2$	10 $9x^2 + 3x + 6$	11 $\pm(6x + 2)$	12 $2x^2 + 0x + -2$

Fehlerinterpretation:

☒	$6x^2 + 3x + 9$	richtig
2	$-2x^2 + 0x + 2$	DF: geraten
3	$\pm(9x^2 + 3x + 6)$	DF: Lösung eindeutig
4	$3x + 9$	DF: Grad des Polynoms falsch
5	$-2x + 0$	DF: Grad des Polynoms falsch
6	$\pm(3x + 9)$	DF: Lösung eindeutig
7	es gibt keines	DF: es gibt eines (sogar genau eines)
8	$\pm(-2x + 0)$	DF: Lösung eindeutig
9	$6x + 2$	DF: Grad des Polynoms falsch
10	$9x^2 + 3x + 6$	DF: falsche Reihenfolge der Koeffizienten
11	$\pm(6x + 2)$	DF: Lösung eindeutig
12	$2x^2 + 0x + -2$	DF: geraten

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu