

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 9

MV 04	Blatt 09	Kapitel 6.4	trigonometrische
keine	ElementareFktn	Nummer: 4 0 200409006	Kl: 14G
Grad: 20	Zeit: 30	Quelle: keine	W

Aufgabe 9.1.1: Berechnen Sie die Umkehrfunktion von $f : \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \cosh(7x)$ elementar.

Parameter:

$x_1 =$ Faktor $x_1 > 1$.

Die Formel lautet: $\cosh(x_1 x)$.

In dieser Aufgabe ist $x_1 = 7$.

Erklärung:

Wenden Sie die Definition von $y = \cosh x$ an und lösen Sie die Gleichung mittels Substitution und Mitternachtsformel nach y auf.

Rechnung:

$$\begin{aligned} \cosh(7x) = \frac{e^{7x} + e^{-7x}}{2} = y &\Leftrightarrow e^{7x} - 2y + e^{-7x} = 0 && \text{Multiplikation mit 2} \\ &\Leftrightarrow e^{2 \cdot 7x} - 2y \cdot e^{7x} + 1 = 0 && \text{Multiplikation mit } e^{7x} \\ &\Leftrightarrow u^2 - 2y \cdot u + 1 = 0 && \text{Substitution } e^{7x} = u \\ &\Leftrightarrow u_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} && \text{Mitternachtsformel} \\ &\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{\ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1})}{7} && \text{Rücksubstitution} \end{aligned}$$

Damit ist die Umkehrfunktion $y = \frac{\ln(x - \sqrt{x^2 - 1})}{7}$ mit $\text{ID} = [1, \infty)$ (was dem Wertebereich von $\cosh(7x)$ entspricht).

Angebotene Lösungen:

- | | | | | | | | |
|----------------------------|-------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|-------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $7 \sinh x$ | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | $\frac{\ln(x - \sqrt{x^2 - 1})}{7}$ | <input type="checkbox"/> 3 | $\ln(7x + \sqrt{(7x)^2 - 1})$ | <input type="checkbox"/> 4 | $\sin(7x)$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\sinh(7x)$ | <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{\ln(x - \sqrt{x^2 + 1})}{7}$ | <input type="checkbox"/> 7 | $\ln(7x - \sqrt{(7x)^2 + 1})$ | <input type="checkbox"/> 8 | $7 \cosh x$ |
| <input type="checkbox"/> 9 | $\ln(7x + \sqrt{(7x)^2 + 1})$ | <input type="checkbox"/> 10 | $7 \sin x$ | <input type="checkbox"/> 11 | $\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{7}$ | <input type="checkbox"/> 12 | $\cos(7x)$ |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|---------------------------------------|-------------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> 1 | $7 \sinh x$ | DF: Lösung geraten |
| <input checked="" type="checkbox"/> 2 | $\frac{\ln(x - \sqrt{x^2 - 1})}{7}$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 3 | $\ln(7x + \sqrt{(7x)^2 - 1})$ | RF: falsch substituiert |
| <input type="checkbox"/> 4 | $\sin(7x)$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\sinh(7x)$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{\ln(x - \sqrt{x^2 + 1})}{7}$ | RF: $\sinh 7x$ invertiert |
| <input type="checkbox"/> 7 | $\ln(7x - \sqrt{(7x)^2 + 1})$ | RF: falsch substituiert |
| <input type="checkbox"/> 8 | $7 \cosh x$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 9 | $\ln(7x + \sqrt{(7x)^2 + 1})$ | RF: falsch substituiert |
| <input type="checkbox"/> 10 | $7 \sin x$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 11 | $\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{7}$ | RF: Falscher Zweig der Umkehrfunktion gewählt |
| <input type="checkbox"/> 12 | $\cos(7x)$ | DF: Lösung geraten |

MV 04	Blatt 09	Kapitel 6.3	Partialbruchzerlegung
Koeffizientenvergleich	ElementareFktn	Nummer: 8 0 200409002	Kl: 14G
Grad: 20	Zeit: 30	Quelle: keine	W

Aufgabe 9.1.2: Zerlegen Sie den Bruch $\frac{4x+16}{(x-2)^2}$ in Partialbrüche.

Parameter:

$x_n =$ Faktoren und Summanden im Bruch, $x_n > 1$ ($x_3 \geq 1$) $n = 1..3$

Die Formel lautet: $\frac{x_1 x + x_2}{(x - x_3)^2}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4$ $x_2 = 16$ $x_3 = 2$.

Erklärung:

Der Nenner liegt bereits in linearfaktorzerlegter Form vor. Er besitzt nur eine Nullstelle x_0 , diese hat aber Vielfachheit 2. Stellen Sie $f(x)$ als $\frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2}$ dar. Weil der Zählergrad < Nennergrad ist, kann auf eine Polynomdivision mit Rest verzichtet werden.

Rechnung:

$$f(x) = \frac{4x+16}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} \Rightarrow 4x+16 = A \cdot (x-2) + B \quad (*)$$

Mit der Grenzwertmethode kann hier nur ein Koeffizient bestimmt werden. Den zweiten Koeffizienten bestimmen wir durch das Einsetzen des bestimmten Wertes $x = 0$ in (*):

$$\begin{aligned} x = 2 & : 4 \cdot 2 + 16 = A \cdot (2 - 2) + B \Rightarrow B = 24 \\ x = 0 & : 4 \cdot 0 + 16 = A \cdot (0 - 2) + 24 \Rightarrow A = 4 \end{aligned}$$

$$\text{Damit ist die Partialbruchzerlegung: } f(x) = \frac{4}{x-2} + \frac{24}{(x-2)^2}.$$

Angebotene Lösungen:

<input type="checkbox"/> 1 $\frac{4x}{x-2} + \frac{16}{(x-2)^2}$	<input checked="" type="checkbox"/> 2 $\frac{4}{x-2} + \frac{24}{(x-2)^2}$	<input type="checkbox"/> 3 $\frac{20}{x} + \frac{16}{4}$	<input type="checkbox"/> 4 $\frac{1}{4(x-2)} + \frac{1}{24(x-2)^2}$
<input type="checkbox"/> 5 $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$	<input type="checkbox"/> 6 $\frac{4}{x-2} + \frac{16}{(x-2)^2}$	<input type="checkbox"/> 7 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4}$	<input type="checkbox"/> 8 $\left(\frac{4(x+4)}{(x-2)}\right)^2$
<input type="checkbox"/> 9 $\frac{1}{4(x-2)} + \frac{1}{16(x-2)^2}$	<input type="checkbox"/> 10 $\frac{20}{x^2} + \frac{20}{4x} + \frac{20}{4}$	<input type="checkbox"/> 11 $\frac{4(x+4)}{(x-2)^2}$	<input type="checkbox"/> 12 $\frac{4}{x^2} + \frac{16}{4x} + \frac{1}{4}$

Fehlerinterpretation:

<input type="checkbox"/> 1 $\frac{4x}{x-2} + \frac{16}{(x-2)^2}$	DF: Partialbruchzerlegung nicht verstanden
<input checked="" type="checkbox"/> 2 $\frac{4}{x-2} + \frac{24}{(x-2)^2}$	richtig
<input type="checkbox"/> 3 $\frac{20}{x} + \frac{16}{4}$	DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden
<input type="checkbox"/> 4 $\frac{1}{4(x-2)} + \frac{1}{24(x-2)^2}$	DF: Vermutlich Koeffizienten falsch berechnet
<input type="checkbox"/> 5 $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$	DF: Partialbruchzerlegung falsch durchgeführt
<input type="checkbox"/> 6 $\frac{4}{x-2} + \frac{16}{(x-2)^2}$	DF: Partialbruchzerlegung falsch durchgeführt
<input type="checkbox"/> 7 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4}$	DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden
<input type="checkbox"/> 8 $\left(\frac{4(x+4)}{(x-2)}\right)^2$	DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden
<input type="checkbox"/> 9 $\frac{1}{4(x-2)} + \frac{1}{16(x-2)^2}$	DF: Vermutlich Koeffizienten falsch berechnet
<input type="checkbox"/> 10 $\frac{20}{x^2} + \frac{20}{4x} + \frac{20}{4}$	DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden
<input type="checkbox"/> 11 $\frac{4(x+4)}{(x-2)^2}$	DF: Partialbruchzerlegung nicht durchgeführt
<input type="checkbox"/> 12 $\frac{4}{x^2} + \frac{16}{4x} + \frac{1}{4}$	DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden

MV 04 Blatt 09 Kapitel 6.4 trigonometrische
keine ElementareFktn Nummer: 67 0 200409005 Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 9.1.3: Bestimmen Sie $\cos(\arcsin(5x))$ für $x \in [0, \frac{1}{5}]$ (- der Wertebereich von $\arcsin x$ sei $[0, \frac{\pi}{2}]$).

Parameter:

$x_1 =$ Faktor $x_1 > 1$.

Die Formel lautet: $\cos(\arcsin(x_1 x))$.

In dieser Aufgabe ist $x_1 = 5$.

Erklärung:

Substituieren Sie $y = \arcsin(5x)$ und wenden Sie die Formel $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ an. Durch die Einschränkung des Bild und Definitionsbereiches fällt das \pm beim Auflösen der Gleichung weg.

Rechnung:

Sei $y = \arcsin(5x)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \cos y &= \sqrt{1 - \sin^2 y} & y \in [0, \frac{\pi}{2}] &\Rightarrow \cos y \geq 0 \\ &= \sqrt{1 - (\sin(\arcsin(5x)))^2} & y &= \arcsin(5x) \\ &= \sqrt{1 - (5x)^2} & \sin(\arcsin 5x) &= 5x \end{aligned}$$

Damit ist $\cos(\arcsin(5x)) = \sqrt{1 - (5x)^2}$.

Angebotene Lösungen:

- | | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|--------------------------|-----------------------------|-------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | $\sqrt{1 - (5x)^2}$ | <input type="checkbox"/> 2 | $5 \cos x$ | <input type="checkbox"/> 3 | $\sqrt{25 - x^2}$ | <input type="checkbox"/> 4 | $\sqrt{1 - 5x^2}$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\frac{1}{\sqrt{1-5x^2}}$ | <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}$ | <input type="checkbox"/> 7 | $\frac{5}{\sqrt{5-x^2}}$ | <input type="checkbox"/> 8 | $\cos(5x)$ |
| <input type="checkbox"/> 9 | $\sqrt{5 - x^2}$ | <input type="checkbox"/> 10 | $\frac{5}{\sqrt{1-5x^2}}$ | <input type="checkbox"/> 11 | $5 \sin x$ | <input type="checkbox"/> 12 | $5x$ |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|---------------------------------------|-----------------------------|-------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | $\sqrt{1 - (5x)^2}$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 2 | $5 \cos x$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 3 | $\sqrt{25 - x^2}$ | DF: falsch substituiert |
| <input type="checkbox"/> 4 | $\sqrt{1 - 5x^2}$ | RF: falsch substituiert |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\frac{1}{\sqrt{1-5x^2}}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 7 | $\frac{5}{\sqrt{5-x^2}}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 8 | $\cos(5x)$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 9 | $\sqrt{5 - x^2}$ | DF: falsch substituiert |
| <input type="checkbox"/> 10 | $\frac{5}{\sqrt{1-5x^2}}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 11 | $5 \sin x$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 12 | $5x$ | DF: Lösung geraten |

MV 04 Blatt 09 Kapitel 6.3 Partialbruchzerlegung
Grenzwertmethode ElementareFktn Nummer: 71 0 200409004 Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 9.1.4: Zerlegen Sie den Bruch $\frac{9}{(x-2) \cdot (x^2+5)}$ in (reelle) Partialbrüche.

Parameter:

$x_n =$ Faktoren und Summanden im Bruch, $x_n > 1$, $n = 1..2$

Die Formel lautet: $\frac{\{x_1^2 + x_2\}}{(x - x_1) \cdot (x^2 + x_2)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2$ $x_2 = 5$.

Erklärung:

Der Nenner hat die komplexen Nullstellen $\pm i\sqrt{5}$. Die reelle Partialbruchzerlegung ist von der Form $\frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+5}$.

Rechnung:

$$f(x) = \frac{9}{(x-2) \cdot (x^2+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+5} \Rightarrow 9 = A \cdot (x^2+5) + (Bx+C) \cdot (x-2) \quad (*)$$

Wir wenden zuerst die Grenzwertmethode zur Berechnung von A an.

Dazu setzen wir in die Gleichung (*) den (Grenz-) Wert $x = 2$ ein:

$$x = 2 : 9 = A \cdot (2^2 + 5) + (Bx + C) \cdot (2 - 2) = 9 \cdot A \Rightarrow A = 1$$

Jetzt setzen wir in die Gleichung (*) den speziellen Wert $x = 0$ (und $A = 1$) ein:

$$x = 0 : 9 = 1 \cdot (0^2 + 5) + (B \cdot 0 + C) \cdot (0 - 2) = 5 - 2 \cdot C \Rightarrow C = -2$$

Um C zu bestimmen, verwenden wir einen Koeffizientenvergleich. Dazu formen wir (*) um:

$$0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 9 = (A + B) \cdot x^2 + (C - 2B) \cdot x + (5A - 2C) = (1 + B) \cdot x^2 + (-2 - 2B) \cdot x + 5 + 4$$

Koeffizientenvergleich ergibt das Gleichungssystem

$$0 = 1 + B \quad 0 = -2 - 2B \quad 9 = 5 + 4 \Rightarrow B = -1.$$

Damit ist $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{-x-2}{x^2+5}$.

Angebotene Lösungen:

- | | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------|--|-----------------------------|--|-----------------------------|-----------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-5}{x^2+5}$ | <input type="checkbox"/> 2 | $\frac{1}{x-2} + \frac{x+2}{x^2+5}$ | <input type="checkbox"/> 3 | $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{5x} + \frac{1}{10}$ | <input type="checkbox"/> 4 | $\frac{2}{x-2} + \frac{5}{x^2+5}$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | es gibt keine | <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{2}{x^3} - \frac{2}{2x^2} + \frac{5}{5x} - \frac{5}{10}$ | <input type="checkbox"/> 7 | $\frac{-2}{(x-2) \cdot (x^2+5)}$ | <input type="checkbox"/> 8 | $\frac{2}{x-2} - \frac{5}{x^2+5}$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 9 | $\frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+5}$ | <input type="checkbox"/> 10 | $\frac{x-2}{x-2} - \frac{x+5}{x^2+5}$ | <input type="checkbox"/> 11 | $\frac{2}{x^3} + \frac{2}{2x^2} + \frac{5}{5x} + \frac{5}{10}$ | <input type="checkbox"/> 12 | $\frac{2}{(x-2) \cdot (x^2+5)}$ |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|---------------------------------------|--|-------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-5}{x^2+5}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 2 | $\frac{1}{x-2} + \frac{x+2}{x^2+5}$ | RF: Falsches Vorzeichen |
| <input type="checkbox"/> 3 | $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{5x} + \frac{1}{10}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 4 | $\frac{2}{x-2} + \frac{5}{x^2+5}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 5 | es gibt keine | DF: Doch |
| <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{2}{x^3} - \frac{2}{2x^2} + \frac{5}{5x} - \frac{5}{10}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 7 | $\frac{-2}{(x-2) \cdot (x^2+5)}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 8 | $\frac{2}{x-2} - \frac{5}{x^2+5}$ | DF: Lösung geraten |
| <input checked="" type="checkbox"/> 9 | $\frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+5}$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 10 | $\frac{x-2}{x-2} - \frac{x+5}{x^2+5}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 11 | $\frac{2}{x^3} + \frac{2}{2x^2} + \frac{5}{5x} + \frac{5}{10}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 12 | $\frac{2}{(x-2) \cdot (x^2+5)}$ | DF: Lösung geraten |

MV 04 Blatt 09 Kapitel 6.3 Partialbruchzerlegung
 Grenzwertmethode ElementareFktn Nummer: 78 0 200409001 Kl: 14G
 Grad: 20 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 9.1.5: Zerlegen Sie den Bruch $\frac{4}{20x^2-200x+420}$ in Partialbrüche.

Parameter:

$x_n =$ Faktoren und Summanden im Bruch, $x_n > 1$ ($x_3 \geq 1$), x_1 ist Teiler von x_2 , $x_3 < x_4$ $n = 1..4$

Die Formel lautet: $\frac{x_1}{x_2x^2 - \{x_2 \cdot (x_3 + x_4)\}x + \{x_2 \cdot x_3 \cdot x_4\}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4$ $x_2 = 20$ $x_3 = 3$ $x_4 = 7$.

Erklärung:

Suchen Sie zuerst die Nennernullstellen x_1 und x_2 von $f(x)$. Weil der Zählergrad $<$ Nennergrad ist, kann auf eine Polynomdivision mit Rest verzichtet werden. Stellen Sie $f(x)$ als $\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$ dar.

Rechnung:

$$f(x) = \frac{4}{20x^2 - 200x + 420} = \frac{4}{20} \cdot \frac{1}{x^2 - 10x + 21} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(x-3) \cdot (x-7)} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-7} \right)$$

$$\text{Damit gilt: } \frac{1}{x^2 - 10x + 21} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-7} \Rightarrow 1 = A \cdot (x-7) + B \cdot (x-3) \quad (*)$$

Wir wenden die Grenzwertmethode an.

Dazu setzen wir in die Gleichung (*) die (Grenz-) Werte $x = 3$ und $x = 7$ ein:

$$\begin{aligned} x = 3 & : 1 = A \cdot (3-7) + B \cdot (3-3) \Rightarrow A = \frac{-1}{4} \\ x = 7 & : 1 = A \cdot (7-7) + B \cdot (7-3) \Rightarrow B = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Damit ist } f(x) = \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{4} \frac{1}{x-3} + \frac{1}{4} \frac{1}{x-7} \right) = \frac{1}{20} \frac{1}{x-7} - \frac{1}{20} \frac{1}{x-3}$$

Angebotene Lösungen:

- | | | | | | | | |
|----------------------------|--|-----------------------------|--|---------------------------------------|---|-----------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-3}$ | <input type="checkbox"/> 2 | $\frac{1}{x^2-10x+21}$ | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | $\frac{1}{20} \frac{1}{x-7} - \frac{1}{20} \frac{1}{x-3}$ | <input type="checkbox"/> 4 | $\frac{1}{5} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5} \frac{1}{10x} + \frac{1}{5} \frac{1}{21}$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+3}$ | <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{1}{5} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{10x} + \frac{1}{21}$ | <input type="checkbox"/> 7 | $\frac{4}{20x^2} - \frac{4}{200x} + \frac{4}{420}$ | <input type="checkbox"/> 8 | $\frac{1}{20} \frac{1}{x+7} - \frac{1}{20} \frac{1}{x+3}$ |
| <input type="checkbox"/> 9 | $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{10x} + \frac{1}{21}$ | <input type="checkbox"/> 10 | $\frac{4}{5} \frac{1}{x+7} - \frac{4}{5} \frac{1}{x+3}$ | <input type="checkbox"/> 11 | $\frac{1}{5} \frac{1}{x^2+10x+21}$ | <input type="checkbox"/> 12 | $\frac{4}{5} \frac{1}{x-7} - \frac{4}{5} \frac{1}{x-3}$ |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|---------------------------------------|--|--|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-3}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 2 | $\frac{1}{x^2-10x+21}$ | DF: Partialbruchzerlegung nicht verstanden |
| <input checked="" type="checkbox"/> 3 | $\frac{1}{20} \frac{1}{x-7} - \frac{1}{20} \frac{1}{x-3}$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 4 | $\frac{1}{5} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5} \frac{1}{10x} + \frac{1}{5} \frac{1}{21}$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+3}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{1}{5} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{10x} + \frac{1}{21}$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| <input type="checkbox"/> 7 | $\frac{4}{20x^2} - \frac{4}{200x} + \frac{4}{420}$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| <input type="checkbox"/> 8 | $\frac{1}{20} \frac{1}{x+7} - \frac{1}{20} \frac{1}{x+3}$ | RF: falsches Vorzeichen im Nenner |
| <input type="checkbox"/> 9 | $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{10x} + \frac{1}{21}$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| <input type="checkbox"/> 10 | $\frac{4}{5} \frac{1}{x+7} - \frac{4}{5} \frac{1}{x+3}$ | RF: falsches Vorzeichen im Nenner |
| <input type="checkbox"/> 11 | $\frac{1}{5} \frac{1}{x^2+10x+21}$ | DF: Partialbruchzerlegung nicht verstanden |
| <input type="checkbox"/> 12 | $\frac{4}{5} \frac{1}{x-7} - \frac{4}{5} \frac{1}{x-3}$ | RF: Brüche falsch aufgelöst |

MV 04 Blatt 09 Kapitel 6.3 Partialbruchzerlegung
 Reihen ElementareFktn Nummer: 91 0 200409003 Kl: 14G
 Grad: 20 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 9.1.6:

Gegen welchen Wert (gerundet auf zwei Stellen) strebt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{12}{(k+4) \cdot (k+6)}$?

Parameter:

$x_n =$ Koeffizienten im Bruch, $x_n > 0$ $n = 1..3$, ($x_2 > x_1$)

Die Summe lautet: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{(x_2 - x_1) \cdot x_3\}}{(k + x_1) \cdot (k + x_2)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4$ $x_2 = 6$ $x_3 = 6$.

Erklärung:

Die Reihe wird zuerst als Limes einer (endlichen) Summe interpretiert. Durch Partialbruchzerlegung kann die Summe aufgespalten und als Teleskopsumme interpretiert werden.

Stellen Sie die Summenglieder als $\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$ dar.

Rechnung:

$$\frac{12}{(k+4) \cdot (k+6)} := \frac{A}{k+4} + \frac{B}{k+6} \Rightarrow 12 = A \cdot (k+6) + B \cdot (k+4)$$

$$\text{Mit } k \rightarrow -4 \text{ gilt } 12 = A \cdot (-4+6) + B \cdot (-4+4) \Rightarrow A = 6,$$

$$\text{mit } k \rightarrow -6 \text{ gilt } 12 = A \cdot (-6+6) + B \cdot (-6+4) \Rightarrow B = -6.$$

$$\begin{aligned} \text{Damit ist } \frac{12}{(k+4) \cdot (k+6)} &= \frac{6}{k+4} - \frac{6}{k+6} \\ \sum_{k=0}^n \frac{12}{(k+4) \cdot (k+6)} &= \sum_{k=0}^n \frac{6}{k+4} - \frac{6}{k+6} && \text{Partialbruchzerlegung} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{6}{k+4} - \sum_{k=0}^n \frac{6}{k+6} && \text{Distributivgesetz u.ä.} \\ &= \sum_{k=4}^{n+4} \frac{6}{k} - \sum_{k=6}^{n+6} \frac{6}{k} && \text{Indexverschiebung} \\ &= \sum_{k=4}^{6-1} \frac{6}{k} + \sum_{k=6}^{n+4} \frac{6}{k} - \sum_{k=6}^{n+4} \frac{6}{k} - \sum_{k=n+4+1}^{n+6} \frac{6}{k} \\ &= \sum_{k=4}^5 \frac{6}{k} - \sum_{k=n+5}^{n+6} \frac{6}{k} && \text{Teleskopsumme} \end{aligned}$$

Für die Reihe gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{12}{(k+4) \cdot (k+6)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{12}{(k+4) \cdot (k+6)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4}^5 \frac{6}{k} - \sum_{k=n+5}^{n+6} \frac{6}{k} = \sum_{k=4}^5 \frac{6}{k} - 0 \\ &= \sum_{k=4}^5 \frac{6}{k} = \frac{6}{4} + \frac{6}{5} \approx 2.7 \end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

<input checked="" type="checkbox"/> 2.7	<input type="checkbox"/> 1.5	<input type="checkbox"/> 4.7	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 3.7	<input type="checkbox"/> 1.2	<input type="checkbox"/> 0.34	<input type="checkbox"/> 9
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 12

Fehlerinterpretation:

<input checked="" type="checkbox"/> 2.7	richtig
<input type="checkbox"/> 2	RF: Letztes Summenglied vergessen
<input type="checkbox"/> 3	RF: Ein Summenglied zuviel addiert
<input type="checkbox"/> 4	DF: Falsche Summe gerechnet
<input type="checkbox"/> 5	RF: Ein Summenglied zuviel addiert
<input type="checkbox"/> 6	RF: Erstes Summenglied vergessen
<input type="checkbox"/> 7	DF: Erster Summand angegeben
<input type="checkbox"/> 8	DF: Falsche Summe gerechnet
<input type="checkbox"/> 9	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 10	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 11	DF: Limes der Folge
<input type="checkbox"/> 12	DF: Falsche Summe gerechnet

Allgemeine Hinweise:

Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware@yahoo.de).

Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: <http://www.vorkurs.de.vu>