

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 9

MV 04 Blatt 09 Kapitel 6.3 Partialbruchzerlegung
 Grenzwertmethode ElementareFktn Nummer: 2 0 200409004 Kl: 14G
 Grad: 20 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 9.1.1: Zerlegen Sie den Bruch $\frac{14}{(x-3) \cdot (x^2+5)}$ in (reelle) Partialbrüche.

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden im Bruch, $x_n > 1$, $n = 1..2$

Die Formel lautet: $\frac{\{x_1^2 + x_2\}}{(x - x_1) \cdot (x^2 + x_2)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3$ $x_2 = 5$.

Erklärung:

Der Nenner hat die komplexen Nullstellen $\pm i\sqrt{5}$. Die reelle Partialbruchzerlegung ist von der Form $\frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+5}$.

Rechnung:

$$f(x) = \frac{14}{(x-3) \cdot (x^2+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+5} \Rightarrow 14 = A \cdot (x^2+5) + (Bx+C) \cdot (x-3) \quad (*)$$

Wir wenden zuerst die Grenzwertmethode zur Berechnung von A an.

Dazu setzen wir in die Gleichung (*) den (Grenz -) Wert $x = 3$ ein:

$$x = 3 : 14 = A \cdot (3^2 + 5) + (Bx + C) \cdot (3 - 3) = 14 \cdot A \Rightarrow A = 1$$

Jetzt setzen wir in die Gleichung (*) den speziellen Wert $x = 0$ (und $A = 1$) ein:

$$x = 0 : 14 = 1 \cdot (0^2 + 5) + (B \cdot 0 + C) \cdot (0 - 3) = 5 - 3 \cdot C \Rightarrow C = -3$$

Um C zu bestimmen, verwenden wir einen Koeffizientenvergleich. Dazu formen wir (*) um:

$$0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 14 = (A + B) \cdot x^2 + (C - 3B) \cdot x + (5A - 3C) = (1 + B) \cdot x^2 + (-3 - 3B) \cdot x + 5 + 9$$

Koeffizientenvergleich ergibt das Gleichungssystem

$$0 = 1 + B \quad 0 = -3 - 3B \quad 14 = 5 + 9 \Rightarrow B = -1.$$

Damit ist $f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{-x-3}{x^2+5}$.

Angebotene Lösungen:

- | | | | |
|---|--|---|--|
| <input type="checkbox"/> 1 $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{5x} + \frac{1}{15}$ | <input type="checkbox"/> 2 $\frac{3}{x^3} + \frac{3}{3x^2} + \frac{5}{5x} + \frac{5}{15}$ | <input type="checkbox"/> 3 $\frac{x-3}{x-3} - \frac{x+5}{x^2+5}$ | <input type="checkbox"/> 4 $\frac{-3}{(x-3) \cdot (x^2+5)}$ |
| <input type="checkbox"/> 5 $\frac{3}{x-3} + \frac{5}{x^2+5}$ | <input checked="" type="checkbox"/> 6 $\frac{1}{x-3} - \frac{x+3}{x^2+5}$ | <input type="checkbox"/> 7 $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{5x} - \frac{1}{15}$ | <input type="checkbox"/> 8 $\frac{3}{x-3} - \frac{5}{x^2+5}$ |
| <input type="checkbox"/> 9 $\frac{1}{x-3} + \frac{x+3}{x^2+5}$ | <input type="checkbox"/> 10 $\frac{3}{x^3} - \frac{3}{3x^2} + \frac{5}{5x} - \frac{5}{15}$ | <input type="checkbox"/> 11 $\frac{3}{(x-3) \cdot (x^2+5)}$ | <input type="checkbox"/> 12 es gibt keine |

Fehlerinterpretation:

- | | |
|--|-------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{5x} + \frac{1}{15}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 2 $\frac{3}{x^3} + \frac{3}{3x^2} + \frac{5}{5x} + \frac{5}{15}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 3 $\frac{x-3}{x-3} - \frac{x+5}{x^2+5}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 4 $\frac{-3}{(x-3) \cdot (x^2+5)}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 5 $\frac{3}{x-3} + \frac{5}{x^2+5}$ | DF: Lösung geraten |
| <input checked="" type="checkbox"/> 6 $\frac{1}{x-3} - \frac{x+3}{x^2+5}$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 7 $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{5x} - \frac{1}{15}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 8 $\frac{3}{x-3} - \frac{5}{x^2+5}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 9 $\frac{1}{x-3} + \frac{x+3}{x^2+5}$ | RF: Falsches Vorzeichen |
| <input type="checkbox"/> 10 $\frac{3}{x^3} - \frac{3}{3x^2} + \frac{5}{5x} - \frac{5}{15}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 11 $\frac{3}{(x-3) \cdot (x^2+5)}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 12 es gibt keine | DF: Doch |

Aufgabe 9.1.2: Berechnen Sie die Umkehrfunktion von $f: \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \cosh(3x)$ elementar.

Parameter:

$x_1 =$ Faktor $x_1 > 1$.

Die Formel lautet: $\cosh(x_1 x)$.

In dieser Aufgabe ist $x_1 = 3$.

Erklärung:

Wenden Sie die Definition von $y = \cosh x$ an und lösen Sie die Gleichung mittels Substitution und Mitternachtsformel nach y auf.

Rechnung:

$$\begin{aligned}
 \cosh(3x) = \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{2} = y &\Leftrightarrow e^{3x} - 2y + e^{-3x} = 0 && \text{Multiplikation mit 2} \\
 &\Leftrightarrow e^{2 \cdot 3x} - 2y \cdot e^{3x} + 1 = 0 && \text{Multiplikation mit } e^{3x} \\
 &\Leftrightarrow u^2 - 2y \cdot u + 1 = 0 && \text{Substitution } e^{3x} = u \\
 &\Leftrightarrow u_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} && \text{Mitternachtsformel} \\
 &\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{\ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1})}{3} && \text{Rücksubstitution}
 \end{aligned}$$

Damit ist die Umkehrfunktion $y = \frac{\ln(x - \sqrt{x^2 - 1})}{3}$ mit $\mathbb{D} = [1, \infty)$ (was dem Wertebereich von $\cosh(3x)$ entspricht).

Angebotene Lösungen:

- | | | | |
|---|---|--|---|
| <input type="checkbox"/> 1 $3 \cos x$ | <input type="checkbox"/> 2 $3 \sinh x$ | <input type="checkbox"/> 3 $\ln(3x + \sqrt{(3x)^2 + 1})$ | <input type="checkbox"/> 4 $\sin(3x)$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 5 $\frac{\ln(x - \sqrt{x^2 - 1})}{3}$ | <input type="checkbox"/> 6 $\sinh(3x)$ | <input type="checkbox"/> 7 $3 \cosh x$ | <input type="checkbox"/> 8 $\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{3}$ |
| <input type="checkbox"/> 9 $\cos(3x)$ | <input type="checkbox"/> 10 $\ln(3x - \sqrt{(3x)^2 - 1})$ | <input type="checkbox"/> 11 $\cosh(3x)$ | <input type="checkbox"/> 12 $\frac{\ln(x - \sqrt{x^2 + 1})}{3}$ |

Fehlerinterpretation:

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> 1 $3 \cos x$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 2 $3 \sinh x$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 3 $\ln(3x + \sqrt{(3x)^2 + 1})$ | RF: falsch substituiert |
| <input type="checkbox"/> 4 $\sin(3x)$ | DF: Lösung geraten |
| <input checked="" type="checkbox"/> 5 $\frac{\ln(x - \sqrt{x^2 - 1})}{3}$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 6 $\sinh(3x)$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 7 $3 \cosh x$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 8 $\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{3}$ | RF: Falscher Zweig der Umkehrfunktion gewählt |
| <input type="checkbox"/> 9 $\cos(3x)$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 10 $\ln(3x - \sqrt{(3x)^2 - 1})$ | RF: falsch substituiert |
| <input type="checkbox"/> 11 $\cosh(3x)$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 12 $\frac{\ln(x - \sqrt{x^2 + 1})}{3}$ | RF: $\sinh 3x$ invertiert |

Aufgabe 9.1.3: Bestimmen Sie $\cos(\arcsin(4x))$ für $x \in [0, \frac{1}{4}]$ (- der Wertebereich von $\arcsin x$ sei $[0, \frac{\pi}{2}]$).

Parameter:

$x_1 =$ Faktor $x_1 > 1$.

Die Formel lautet: $\cos(\arcsin(x_1 x))$.

In dieser Aufgabe ist $x_1 = 4$.

Erklärung:

Substituieren Sie $y = \arcsin(4x)$ und wenden Sie die Formel $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ an. Durch die Einschränkung des Bild und Definitionsbereiches fällt das \pm beim Auflösen der Gleichung weg.

Rechnung:

Sei $y = \arcsin(4x)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \cos y &= \sqrt{1 - \sin^2 y} & y \in [0, \frac{\pi}{2}] &\Rightarrow \cos y \geq 0 \\ &= \sqrt{1 - (\sin(\arcsin(4x)))^2} & y &= \arcsin(4x) \\ &= \sqrt{1 - (4x)^2} & \sin(\arcsin 4x) &= 4x \end{aligned}$$

Damit ist $\cos(\arcsin(4x)) = \sqrt{1 - (4x)^2}$.

Angebotene Lösungen:

- | | | | | | | | |
|----------------------------|----------------|-----------------------------|---------------------------|-----------------------------|--------------------------|---------------------------------------|-------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\cos(4x)$ | <input type="checkbox"/> 2 | $\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ | <input type="checkbox"/> 3 | $\sqrt{1-4x^2}$ | <input type="checkbox"/> 4 | $4 \cos x$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $4x$ | <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ | <input type="checkbox"/> 7 | $\sin(4x)$ | <input type="checkbox"/> 8 | $\sqrt{16-x^2}$ |
| <input type="checkbox"/> 9 | $\sqrt{4-x^2}$ | <input type="checkbox"/> 10 | $4 \sin x$ | <input type="checkbox"/> 11 | $\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}$ | <input checked="" type="checkbox"/> X | $\sqrt{1-(4x)^2}$ |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|---------------------------------------|---------------------------|-------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\cos(4x)$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 2 | $\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 3 | $\sqrt{1-4x^2}$ | RF: falsch substituiert |
| <input type="checkbox"/> 4 | $4 \cos x$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 5 | $4x$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 7 | $\sin(4x)$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 8 | $\sqrt{16-x^2}$ | DF: falsch substituiert |
| <input type="checkbox"/> 9 | $\sqrt{4-x^2}$ | DF: falsch substituiert |
| <input type="checkbox"/> 10 | $4 \sin x$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 11 | $\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}$ | DF: Lösung geraten |
| <input checked="" type="checkbox"/> X | $\sqrt{1-(4x)^2}$ | richtig |

MV 04 Blatt 09 Kapitel 6.3 Partialbruchzerlegung
 Grenzwertmethode ElementareFktn Nummer: 73 0 200409001 Kl: 14G
 Grad: 20 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 9.1.4: Zerlegen Sie den Bruch $\frac{4}{12x^2-84x+120}$ in Partialbrüche.

Parameter:

$x_n =$ Faktoren und Summanden im Bruch, $x_n > 1$ ($x_3 \geq 1$), x_1 ist Teiler von x_2 , $x_3 < x_4$ $n = 1..4$

Die Formel lautet: $\frac{x_1}{x_2 x^2 - \{x_2 \cdot (x_3 + x_4)\}x + \{x_2 \cdot x_3 \cdot x_4\}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4$ $x_2 = 12$ $x_3 = 2$ $x_4 = 5$.

Erklärung:

Suchen Sie zuerst die Nennernullstellen x_1 und x_2 von $f(x)$. Weil der Zählergrad < Nennergrad ist, kann auf eine Polynomdivision mit Rest verzichtet werden. Stellen Sie $f(x)$ als $\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$ dar.

Rechnung:

$$f(x) = \frac{4}{12x^2 - 84x + 120} = \frac{4}{12} \cdot \frac{1}{x^2 - 7x + 10} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x-2) \cdot (x-5)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-5} \right)$$

$$\text{Damit gilt: } \frac{1}{x^2 - 7x + 10} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-5} \Rightarrow 1 = A \cdot (x-5) + B \cdot (x-2) \quad (*)$$

Wir wenden die Grenzwertmethode an.

Dazu setzen wir in die Gleichung (*) die (Grenz-) Werte $x = 2$ und $x = 5$ ein:

$$\begin{aligned} x = 2 & : 1 = A \cdot (2-5) + B \cdot (2-2) \Rightarrow A = -\frac{1}{3} \\ x = 5 & : 1 = A \cdot (5-5) + B \cdot (5-2) \Rightarrow B = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Damit ist } f(x) = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-5} \right) = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-2} \right)$$

Angebotene Lösungen:

- | | | | | | | | |
|----------------------------|---|-----------------------------|---|---------------------------------------|--|-----------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+2}$ | <input type="checkbox"/> 2 | $\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-2}$ | <input type="checkbox"/> 3 | $\frac{4}{12x^2} - \frac{4}{84x} + \frac{4}{120}$ | <input type="checkbox"/> 4 | $\frac{1}{9} \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+2} \right)$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{7x} + \frac{1}{10}$ | <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{1}{3} - \frac{1}{7x} + \frac{1}{10}$ | <input checked="" type="checkbox"/> X | $\frac{1}{9} \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-2} \right)$ | <input type="checkbox"/> 8 | $\frac{1}{3} + \frac{1}{7x} + \frac{1}{10}$ |
| <input type="checkbox"/> 9 | $\frac{1}{x^2 - 7x + 10}$ | <input type="checkbox"/> 10 | $\frac{1}{x^2 + 7x + 10}$ | <input type="checkbox"/> 11 | $\frac{1}{x^2 - 7x + 10}$ | <input type="checkbox"/> 12 | 162 |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|---------------------------------------|--|--|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+2}$ | RF: falsches Vorzeichen im Nenner |
| <input type="checkbox"/> 2 | $\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-2}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 3 | $\frac{4}{12x^2} - \frac{4}{84x} + \frac{4}{120}$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| <input type="checkbox"/> 4 | $\frac{1}{9} \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+2} \right)$ | RF: falsches Vorzeichen im Nenner |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{7x} + \frac{1}{10}$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{1}{3} - \frac{1}{7x} + \frac{1}{10}$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| <input checked="" type="checkbox"/> X | $\frac{1}{9} \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-2} \right)$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 8 | $\frac{1}{3} + \frac{1}{7x} + \frac{1}{10}$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| <input type="checkbox"/> 9 | $\frac{1}{x^2 - 7x + 10}$ | DF: Partialbruchzerlegung nicht verstanden |
| <input type="checkbox"/> 10 | $\frac{1}{x^2 + 7x + 10}$ | DF: Partialbruchzerlegung nicht verstanden |
| <input type="checkbox"/> 11 | $\frac{1}{x^2 - 7x + 10}$ | DF: Partialbruchzerlegung nicht verstanden |
| <input type="checkbox"/> 12 | 162 | GL: geratene Lösung |

MV 04 Blatt 09 Kapitel 6.3 Partialbruchzerlegung
 Koeffizientenvergleich ElementareFktn Nummer: 76 0 200409002 Kl: 14G
 Grad: 20 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 9.1.5: Zerlegen Sie den Bruch $\frac{5x+10}{(x-7)^2}$ in Partialbrüche.

Parameter:

$x_n =$ Faktoren und Summanden im Bruch, $x_n > 1$ ($x_3 \geq 1$) $n = 1..3$

Die Formel lautet: $\frac{x_1 x + x_2}{(x-x_3)^2}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5$ $x_2 = 10$ $x_3 = 7$.

Erklärung:

Der Nenner liegt bereits in linearfaktorzerlegter Form vor. Er besitzt nur eine Nullstelle x_0 , diese hat aber Vielfachheit 2. Stellen Sie $f(x)$ als $\frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2}$ dar. Weil der Zählergrad < Nennergrad ist, kann auf eine Polynomdivision mit Rest verzichtet werden.

Rechnung:

$$f(x) = \frac{5x+10}{(x-7)^2} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{(x-7)^2} \Rightarrow 5x+10 = A \cdot (x-7) + B \quad (*)$$

Mit der Grenzwertmethode kann hier nur ein Koeffizient bestimmt werden. Den zweiten Koeffizienten bestimmen wir durch das Einsetzen des bestimmten Wertes $x = 0$ in (*):

$$\begin{aligned} x = 7 & : 5 \cdot 7 + 10 = A \cdot (7 - 7) + B \Rightarrow B = 45 \\ x = 0 & : 5 \cdot 0 + 10 = A \cdot (0 - 7) + 45 \Rightarrow A = 5 \end{aligned}$$

Damit ist die Partialbruchzerlegung: $f(x) = \frac{5}{x-7} + \frac{45}{(x-7)^2}$.

Angebotene Lösungen:

- | | | | | | | | |
|----------------------------|---|--|--|-----------------------------|---|-----------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\frac{1}{5(x-7)} + \frac{1}{45(x-7)^2}$ | <input type="checkbox"/> 2 | $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{14x} + \frac{1}{49}$ | <input type="checkbox"/> 3 | $\frac{5x}{x-7} + \frac{10}{(x-7)^2}$ | <input type="checkbox"/> 4 | $\frac{15}{x} + \frac{10}{49}$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\frac{5(x+2)}{(x-7)^2}$ | <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{1}{x-7} + \frac{1}{(x-7)^2}$ | <input type="checkbox"/> 7 | $\left(\frac{5(x+2)}{(x-7)}\right)^2$ | <input type="checkbox"/> 8 | $\frac{1}{5(x-7)} + \frac{1}{10(x-7)^2}$ |
| <input type="checkbox"/> 9 | $\frac{5}{x^2} + \frac{10}{14x} + \frac{1}{49}$ | <input checked="" type="checkbox"/> 10 | $\frac{5}{x-7} + \frac{45}{(x-7)^2}$ | <input type="checkbox"/> 11 | $\frac{15}{x^2} + \frac{15}{14x} + \frac{15}{49}$ | <input type="checkbox"/> 12 | $\frac{5}{x-7} + \frac{10}{(x-7)^2}$ |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|--|---|--|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\frac{1}{5(x-7)} + \frac{1}{45(x-7)^2}$ | DF: Vermutlich Koeffizienten falsch berechnet |
| <input type="checkbox"/> 2 | $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{14x} + \frac{1}{49}$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| <input type="checkbox"/> 3 | $\frac{5x}{x-7} + \frac{10}{(x-7)^2}$ | DF: Partialbruchzerlegung nicht verstanden |
| <input type="checkbox"/> 4 | $\frac{15}{x} + \frac{10}{49}$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\frac{5(x+2)}{(x-7)^2}$ | DF: Partialbruchzerlegung nicht durchgeführt |
| <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{1}{x-7} + \frac{1}{(x-7)^2}$ | DF: Partialbruchzerlegung falsch durchgeführt |
| <input type="checkbox"/> 7 | $\left(\frac{5(x+2)}{(x-7)}\right)^2$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| <input type="checkbox"/> 8 | $\frac{1}{5(x-7)} + \frac{1}{10(x-7)^2}$ | DF: Vermutlich Koeffizienten falsch berechnet |
| <input type="checkbox"/> 9 | $\frac{5}{x^2} + \frac{10}{14x} + \frac{1}{49}$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| <input checked="" type="checkbox"/> 10 | $\frac{5}{x-7} + \frac{45}{(x-7)^2}$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 11 | $\frac{15}{x^2} + \frac{15}{14x} + \frac{15}{49}$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| <input type="checkbox"/> 12 | $\frac{5}{x-7} + \frac{10}{(x-7)^2}$ | DF: Partialbruchzerlegung falsch durchgeführt |

MV 04 Blatt 09 Kapitel 6.3 Partialbruchzerlegung
 Reihen ElementareFktn Nummer: 85 0 200409003 Kl: 14G
 Grad: 20 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 9.1.6:

Gegen welchen Wert (gerundet auf zwei Stellen) strebt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{10}{(k+3) \cdot (k+5)}$?

Parameter:

$x_n =$ Koeffizienten im Bruch, $x_n > 0$ $n = 1..3$, ($x_2 > x_1$)

Die Summe lautet: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{(x_2 - x_1) \cdot x_3\}}{(k+x_1) \cdot (k+x_2)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3$ $x_2 = 5$ $x_3 = 5$.

Erklärung:

Die Reihe wird zuerst als Limes einer (endlichen) Summe interpretiert. Durch Partialbruchzerlegung kann die Summe aufgespalten und als Teleskopsumme interpretiert werden. Stellen Sie die Summenglieder als $\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$ dar.

Rechnung:

$$\frac{10}{(k+3) \cdot (k+5)} := \frac{A}{k+3} + \frac{B}{k+5} \Rightarrow 10 = A \cdot (k+5) + B \cdot (k+3)$$

Mit $k \rightarrow -3$ gilt $10 = A \cdot (-3 + 5) + B \cdot (-3 + 3) \Rightarrow A = 5$,
mit $k \rightarrow -5$ gilt $10 = A \cdot (-5 + 5) + B \cdot (-5 + 3) \Rightarrow B = -5$.

$$\begin{aligned} \text{Damit ist } \frac{10}{(k+3) \cdot (k+5)} &= \frac{5}{k+3} - \frac{5}{k+5} \\ \sum_{k=0}^n \frac{10}{(k+3) \cdot (k+5)} &= \sum_{k=0}^n \frac{5}{k+3} - \frac{5}{k+5} && \text{Partialbruchzerlegung} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{5}{k+3} - \sum_{k=0}^n \frac{5}{k+5} && \text{Distributivgesetz u.ä.} \\ &= \sum_{k=3}^{n+3} \frac{5}{k} - \sum_{k=5}^{n+5} \frac{5}{k} && \text{Indexverschiebung} \\ &= \sum_{k=3}^{5-1} \frac{5}{k} + \sum_{k=5}^{n+3} \frac{5}{k} - \sum_{k=5}^{n+3} \frac{5}{k} - \sum_{k=n+3+1}^{n+5} \frac{5}{k} \\ &= \sum_{k=3}^4 \frac{5}{k} - \sum_{k=n+4}^{n+5} \frac{5}{k} && \text{Teleskopsumme} \end{aligned}$$

Für die Reihe gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{10}{(k+3) \cdot (k+5)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{10}{(k+3) \cdot (k+5)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3}^4 \frac{5}{k} - \sum_{k=n+4}^{n+5} \frac{5}{k} = \sum_{k=3}^4 \frac{5}{k} - 0 \\ &= \sum_{k=3}^4 \frac{5}{k} = \frac{5}{3} + \frac{5}{4} \approx 2.92 \end{aligned}$$

Angeborene Lösungen:

- | | | | | | | | |
|----------------------------|------|-----------------------------|----------|--|------|-----------------------------|------|
| <input type="checkbox"/> 1 | 1.67 | <input type="checkbox"/> 2 | ∞ | <input type="checkbox"/> 3 | 7.5 | <input type="checkbox"/> 4 | 0 |
| <input type="checkbox"/> 5 | 10 | <input type="checkbox"/> 6 | 1 | <input type="checkbox"/> 7 | 0.42 | <input type="checkbox"/> 8 | 3.92 |
| <input type="checkbox"/> 9 | 5 | <input type="checkbox"/> 10 | 5.42 | <input checked="" type="checkbox"/> 11 | 2.92 | <input type="checkbox"/> 12 | 1.25 |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|--|----------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | 1.67 | RF: Letztes Summenglied vergessen |
| <input type="checkbox"/> 2 | ∞ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 3 | 7.5 | DF: Falsche Summe gerechnet |
| <input type="checkbox"/> 4 | 0 | DF: Limes der Folge |
| <input type="checkbox"/> 5 | 10 | DF: Falsche Summe gerechnet |
| <input type="checkbox"/> 6 | 1 | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 7 | 0.42 | DF: Erster Summand angegeben |
| <input type="checkbox"/> 8 | 3.92 | RF: Ein Summenglied zuviel addiert |
| <input type="checkbox"/> 9 | 5 | DF: Falsche Summe gerechnet |
| <input type="checkbox"/> 10 | 5.42 | RF: Ein Summenglied zuviel addiert |
| <input checked="" type="checkbox"/> 11 | 2.92 | richtig |
| <input type="checkbox"/> 12 | 1.25 | RF: Erstes Summenglied vergessen |

Allgemeine Hinweise:

Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware@yahoo.de).

Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: <http://www.vorkurs.de.vu>