Blatt Nr 09.03

**Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 9**

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 09 | Kapitel 6.3 | Partialbruchzerlegung |
| Koeffizientenvergleich | ElementareFktn | Nummer: 24 0 200409002 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 9.1.1:** Zerlegen Sie den Bruch $\frac{4x+20}{(x-4)^2}$ in Partialbrüche.

**Parameter:**

$x_n$ = Faktoren und Summanden im Bruch, $x_n > 1 \ \ (x_3 \geq 1) \quad n = 1..3$

Die Formel lautet: $\frac{x_1 x + x_2}{(x-x_3)^2}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \qquad x_2 = 20 \qquad x_3 = 4$.

**Erklärung:**

Der Nenner liegt bereits in linearfaktorzerlegter Form vor. Er besitzt nur eine Nullstelle $x_0$, diese hat aber Vielfachheit 2. Stellen Sie $f(x)$ als $\frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2}$ dar. Weil der Zählergrad < Nennergrad ist, kann auf eine Polynomdivision mit Rest verzichtet werden.

**Rechnung:**

$$f(x) \quad = \quad \frac{4x+20}{(x-4)^2} \quad = \quad \frac{A}{(x-4)} + \frac{B}{(x-4)^2} \qquad \Rightarrow \qquad 4x+20 \quad = \quad A \cdot (x-4) + B \quad (*)$$

Mit der Grenzwertmethode kann hier nur ein Koeffizient bestimmt werden. Den zweiten Koeffitzienten bestimmen wir durch das Einsetzen des bestimmten Wertes $x = 0$ in $(*)$:

$$\begin{array}{lcl} x = 4 & : & 4 \cdot 4 + 20 = A \cdot (4-4) + B \quad \Rightarrow \quad B = 36 \\ x = 0 & : & 4 \cdot 0 + 20 = A \cdot (0-4) + 36 \quad \Rightarrow \quad A = 4 \end{array}$$

$$\text{Damit ist die Partialbruchzerlegung:} \quad f(x) \quad = \quad \frac{4}{x-4} + \frac{36}{(x-4)^2}.$$

**Angebotene Lösungen:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\boxed{1}$ $\frac{4x}{x-4} + \frac{20}{(x-4)^2}$ | $\boxed{2}$ $\frac{1}{4(x-4)} + \frac{1}{36(x-4)^2}$ | $\boxed{3}$ $\frac{4(x+5)}{(x-4)^2}$ | $\boxed{4}$ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{16}$ |
| $\boxed{5}$ $\frac{24}{x^2} + \frac{24}{8x} + \frac{24}{16}$ | $\boxed{6}$ $\frac{1}{4(x-4)} + \frac{1}{20(x-4)^2}$ | $\boxed{7}$ $\frac{24}{x} + \frac{20}{16}$ | $\boxed{\times}$ $\frac{4}{x-4} + \frac{36}{(x-4)^2}$ |
| $\boxed{9}$ $\frac{4}{x-4} + \frac{20}{(x-4)^2}$ | $\boxed{10}$ $\frac{4}{x^2} + \frac{20}{8x} + \frac{1}{16}$ | $\boxed{11}$ $\left(\frac{4(x+5)}{(x-4)}\right)^2$ | $\boxed{12}$ $\frac{1}{x-4} + \frac{1}{(x-4)^2}$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | |
|---|---|
| $\boxed{1}$ $\frac{4x}{x-4} + \frac{20}{(x-4)^2}$ | DF: Partialbruchzerlegung nicht verstanden |
| $\boxed{2}$ $\frac{1}{4(x-4)} + \frac{1}{36(x-4)^2}$ | DF: Vermutlich Koeffizienten falsch berechnet |
| $\boxed{3}$ $\frac{4(x+5)}{(x-4)^2}$ | DF: Partialbruchzerlegung nicht durchgeführt |
| $\boxed{4}$ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{16}$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| $\boxed{5}$ $\frac{24}{x^2} + \frac{24}{8x} + \frac{24}{16}$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| $\boxed{6}$ $\frac{1}{4(x-4)} + \frac{1}{20(x-4)^2}$ | DF: Vermutlich Koeffizienten falsch berechnet |
| $\boxed{7}$ $\frac{24}{x} + \frac{20}{16}$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| $\boxed{\times}$ $\frac{4}{x-4} + \frac{36}{(x-4)^2}$ | richtig |
| $\boxed{9}$ $\frac{4}{x-4} + \frac{20}{(x-4)^2}$ | DF: Partialbruchzerlegung falsch durchgeführt |
| $\boxed{10}$ $\frac{4}{x^2} + \frac{20}{8x} + \frac{1}{16}$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| $\boxed{11}$ $\left(\frac{4(x+5)}{(x-4)}\right)^2$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| $\boxed{12}$ $\frac{1}{x-4} + \frac{1}{(x-4)^2}$ | DF: Partialbruchzerlegung falsch durchgeführt |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 09 | Kapitel 6.4 | trigonometrische |
| keine | ElementareFktn | Nummer: 49 0 200409006 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 9.1.2:** Berechnen Sie die Umkehrfunktion von $f : \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}\ f(x) = \cosh(6x)$ elementar.

**Parameter:**

$x_1$ = Faktor $x_1 > 1$.

Die Formel lautet: $\cosh(x_1\, x)$.

In dieser Aufgabe ist $x_1 = 6$.

**Erklärung:**

Wenden Sie die Definition von $y = \cosh x$ an und lösen Sie die Gleichung mittels Substitution und Mitternachtsformel nach $y$ auf.

**Rechnung:**

$$\begin{array}{rlll} \cosh(6x) = \frac{e^{6x}+e^{-6x}}{2} = y & \Leftrightarrow & e^{6x} - 2y + e^{-6x} = 0 & \text{Multiplikation mit 2} \\ & \Leftrightarrow & e^{2\cdot 6x} - 2y \cdot e^{6x} + 1 = 0 & \text{Multiplikation mit } e^{6x} \\ & \Leftrightarrow & u^2 - 2y \cdot u + 1 = 0 & \text{Substitution } e^{6x} = u \\ & \Leftrightarrow & u_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2-4}}{2} & \text{Mitternachtsformel} \\ & \Leftrightarrow & x_{1,2} = \frac{\ln(y \pm \sqrt{y^2-1})}{6} & \text{Rücksubstitution} \end{array}$$

Damit ist die Umkehrfunktion $y = \frac{\ln(x - \sqrt{x^2-1})}{6}$ mit $\mathbb{D} = [1, \infty)$ (was dem Wertebereich von $\cosh(6x)$ entspricht).

**Angebotene Lösungen:**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $6\cos x$ | 2 | $\ln(6x - \sqrt{(6x)^2 - 1})$ | 3 | $\ln(6x + \sqrt{(6x)^2 + 1})$ | 4 | $\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{6}$ |
| 5 | $6\sin x$ | 6 | $\cosh(6x)$ | ☒ | $\frac{\ln(x-\sqrt{x^2-1})}{6}$ | 8 | $\sinh(6x)$ |
| 9 | $\ln(6x + \sqrt{(6x)^2 - 1})$ | 10 | $\frac{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{6}$ | 11 | $\cos(6x)$ | 12 | $6\sinh x$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $6\cos x$ | DF: Lösung geraten |
| 2 | $\ln(6x - \sqrt{(6x)^2 - 1})$ | RF: falsch substituiert |
| 3 | $\ln(6x + \sqrt{(6x)^2 + 1})$ | RF: falsch substituiert |
| 4 | $\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{6}$ | RF: $\sinh 6x$ invertiert |
| 5 | $6\sin x$ | DF: Lösung geraten |
| 6 | $\cosh(6x)$ | DF: Lösung geraten |
| ☒ | $\frac{\ln(x-\sqrt{x^2-1})}{6}$ | richtig |
| 8 | $\sinh(6x)$ | DF: Lösung geraten |
| 9 | $\ln(6x + \sqrt{(6x)^2 - 1})$ | RF: falsch substituiert |
| 10 | $\frac{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{6}$ | RF: Falscher Zweig der Umkehrfunktion gewählt |
| 11 | $\cos(6x)$ | DF: Lösung geraten |
| 12 | $6\sinh x$ | DF: Lösung geraten |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 09 | Kapitel 6.3 | Partialbruchzerlegung |
| Grenzwertmethode | ElementareFktn | Nummer: 53 0 200409001 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 9.1.3:** Zerlegen Sie den Bruch $\frac{3}{6x^2-42x+60}$ in Partialbrüche.

**Parameter:**

$x_n$ = Faktoren und Summanden im Bruch, $x_n > 1$ $(x_3 \geq 1)$, $x_1$ ist Teiler von $x_2$, $x_3 < x_4$ $\quad n = 1..4$

Die Formel lautet: $\frac{x_1}{x_2x^2 - \{x_2\cdot(x_3+x_4)\}x + \{x_2\cdot x_3\cdot x_4\}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 6 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = 5$.

**Erklärung:**

Suchen Sie zuerst die Nennernullstellen $x_1$ und $x_2$ von $f(x)$ . Weil der Zählergrad < Nennergrad ist, kann auf eine Polynomdivision mit Rest verzichtet werden. Stellen Sie $f(x)$ als $\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$ dar.

**Rechnung:**

$$f(x) = \frac{3}{6x^2-42x+60} = \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{x^2-7x+10} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-2)\cdot(x-5)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-5}\right)$$

$$\text{Damit gilt:}\quad \frac{1}{x^2-7x+10} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-5} \Rightarrow 1 = A\cdot(x-5)+B\cdot(x-2) \qquad (*)$$

Wir wenden die Grenzwertmethode an.
Dazu setzen wir in die Gleichung $(*)$ die (Grenz -) Werte $x=2$ und $x=5$ ein:

$$\begin{array}{lclcl} x=2 & : & 1 = A\cdot(2-5)+B\cdot(2-2) & \Rightarrow & A = \frac{-1}{3} \\ x=5 & : & 1 = A\cdot(5-5)+B\cdot(5-2) & \Rightarrow & B = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\text{Damit ist}\quad f(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\frac{1}{3}}{x-2}+\frac{\frac{1}{3}}{x-5}\right) = \frac{\frac{1}{6}}{x-5}-\frac{\frac{1}{6}}{x-2}$$

**Angebotene Lösungen:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| [1] $\frac{3}{6x^2}-\frac{3}{42x}+\frac{3}{60}$ | [2] $\frac{\frac{1}{6}}{x+5}-\frac{\frac{1}{6}}{x+2}$ | [3] $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{7x}+\frac{1}{10}$ | [4] $\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+2}$ |
| [5] $\frac{\frac{1}{2}}{x^2}+\frac{\frac{1}{2}}{7x}+\frac{\frac{1}{2}}{10}$ | [6] $\frac{\frac{1}{2}}{x^2+7x+10}$ | [7] $\frac{\frac{1}{2}}{x^2}-\frac{\frac{1}{2}}{7x}+\frac{\frac{1}{2}}{10}$ | [X] $\frac{\frac{1}{6}}{x-5}-\frac{\frac{1}{6}}{x-2}$ |
| [9] $\frac{\frac{3}{2}}{x+5}-\frac{\frac{3}{2}}{x+2}$ | [10] $\frac{\frac{3}{2}}{x-5}-\frac{\frac{3}{2}}{x-2}$ | [11] $\frac{\frac{1}{2}}{x^2-7x+10}$ | [12] $\frac{1}{x^2-7x+10}$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| [1] | $\frac{3}{6x^2}-\frac{3}{42x}+\frac{3}{60}$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| [2] | $\frac{\frac{1}{6}}{x+5}-\frac{\frac{1}{6}}{x+2}$ | RF: falsches Vorzeichen im Nenner |
| [3] | $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{7x}+\frac{1}{10}$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| [4] | $\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+2}$ | DF: Lösung geraten |
| [5] | $\frac{\frac{1}{2}}{x^2}+\frac{\frac{1}{2}}{7x}+\frac{\frac{1}{2}}{10}$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| [6] | $\frac{\frac{1}{2}}{x^2+7x+10}$ | DF: Partialbruchzerlegung nicht verstanden |
| [7] | $\frac{\frac{1}{2}}{x^2}-\frac{\frac{1}{2}}{7x}+\frac{\frac{1}{2}}{10}$ | DF: Partialbruchzerlegung gar nicht verstanden |
| [X] | $\frac{\frac{1}{6}}{x-5}-\frac{\frac{1}{6}}{x-2}$ | richtig |
| [9] | $\frac{\frac{3}{2}}{x+5}-\frac{\frac{3}{2}}{x+2}$ | RF: falsches Vorzeichen im Nenner |
| [10] | $\frac{\frac{3}{2}}{x-5}-\frac{\frac{3}{2}}{x-2}$ | RF: Brüche falsch aufgelöst |
| [11] | $\frac{\frac{1}{2}}{x^2-7x+10}$ | DF: Partialbruchzerlegung nicht verstanden |
| [12] | $\frac{1}{x^2-7x+10}$ | DF: Partialbruchzerlegung nicht verstanden |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 09 | Kapitel 6.4 | trigonometrische |
| keine | ElementareFktn | Nummer: 59 0 200409005 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 9.1.4:** Bestimmen Sie cos(arcsin $(5x)$) für $x \in [0, \frac{1}{5}]$ (- der Wertebereich von arcsin $x$ sei $[0, \frac{\pi}{2}]$).

**Parameter:**

$x_1$ = Faktor $x_1 > 1$.

Die Formel lautet: cos(arcsin $(x_1\, x)$).

In dieser Aufgabe ist $x_1 = 5$.

**Erklärung:**

Substituieren Sie $y = \arcsin(5x)$ und wenden Sie die Formel $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ an. Durch die Einschränkung des Bild und Definitionsbereiches fällt das $\pm$ beim Auflösen der Gleichung weg.

**Rechnung:**

Sei $y = \arcsin(5x)$, dann gilt:

$$\begin{array}{llll} \cos y & = \sqrt{1-\sin^2 y} & y \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \Rightarrow \quad \cos y \geq 0 \\ & = \sqrt{1-(\sin(\arcsin(5x)))^2} & y \; = \; \arcsin(5x) \\ & = \sqrt{1-(5x)^2} & \sin(\arcsin 5x) = 5x \end{array}$$

Damit ist $\cos(\arcsin(5x)) = \sqrt{1-(5x)^2}$.

**Angebotene Lösungen:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 $\frac{1}{\sqrt{1-5x^2}}$ | 2 $\sqrt{1-5x^2}$ | ☒ $\sqrt{1-(5x)^2}$ | 4 $\sqrt{5-x^2}$ |
| 5 $\frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}$ | 6 $5x$ | 7 $\sqrt{25-x^2}$ | 8 $5\cos x$ |
| 9 $\cos(5x)$ | 10 $5\sin x$ | 11 $\frac{5}{\sqrt{5-x^2}}$ | 12 $\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{\sqrt{1-5x^2}}$ | DF: Lösung geraten |
| 2 | $\sqrt{1-5x^2}$ | RF: falsch substituiert |
| ☒ | $\sqrt{1-(5x)^2}$ | richtig |
| 4 | $\sqrt{5-x^2}$ | DF: falsch substituiert |
| 5 | $\frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}$ | DF: Lösung geraten |
| 6 | $5x$ | DF: Lösung geraten |
| 7 | $\sqrt{25-x^2}$ | DF: falsch substituiert |
| 8 | $5\cos x$ | DF: Lösung geraten |
| 9 | $\cos(5x)$ | DF: Lösung geraten |
| 10 | $5\sin x$ | DF: Lösung geraten |
| 11 | $\frac{5}{\sqrt{5-x^2}}$ | DF: Lösung geraten |
| 12 | $\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ | DF: Lösung geraten |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 09 | Kapitel 6.3 | Partialbruchzerlegung |
| Reihen | ElementareFktn | Nummer: 90 0 200409003 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 9.1.5:**

Gegen welchen Wert (gerundet auf zwei Stellen) strebt die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(k+3)\cdot(k+7)}$ ?

**Parameter:**

$x_n$ = Koeffizienten im Bruch, $x_n > 0 \;\; n = 1..3, \;\; (x_2 > x_1)$

Die Summe lautet: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{(x_2 - x_1)\cdot x_3\}}{(k+x_1)\cdot(k+x_2)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \qquad x_2 = 7 \qquad x_3 = 2$.

**Erklärung:**

Die Reihe wird zuerst als Limes einer (endlichen) Summe interpretiert. Durch Partialbruchzerlegung kann die Summe aufgespalten und als Teleskopsumme interpretiert werden.
Stellen Sie die Summenglieder als $\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$ dar.

**Rechnung:**

$$\frac{8}{(k+3)\cdot(k+7)} \quad := \quad \frac{A}{k+3} + \frac{B}{k+7} \qquad \Rightarrow \qquad 8 \quad = \quad A\cdot(k+7) + B\cdot(k+3)$$

Mit $k \to -3$ gilt $\quad 8 = A \cdot (-3+7) + B \cdot (-3+3) \quad \Rightarrow \quad A = 2,$
mit $k \to -7$ gilt $\quad 8 = A \cdot (-7+7) + B \cdot (-7+3) \quad \Rightarrow \quad B = -2.$

$$\text{Damit ist} \quad \frac{8}{(k+3)\cdot(k+7)} = \frac{2}{k+3} - \frac{2}{k+7}$$

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{8}{(k+3)\cdot(k+7)} &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{k+3} - \frac{2}{k+7} && \text{Partialbruchzerlegung} \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{k+3} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{k+7} && \text{Distributivgesetz u.ä.} \\
&= \textstyle\sum_{k=3}^{n+3} \frac{2}{k} - \sum_{k=7}^{n+7} \frac{2}{k} && \text{Indexverschiebung} \\
&= \textstyle\sum_{k=3}^{7-1} \frac{2}{k} + \sum_{k=7}^{n+3} \frac{2}{k} - \sum_{k=7}^{n+3} \frac{2}{k} - \sum_{k=n+3+1}^{n+7} \frac{2}{k} && \\
&= \textstyle\sum_{k=3}^{6} \frac{2}{k} - \sum_{k=n+4}^{n+7} \frac{2}{k} && \text{Teleskopsumme}
\end{aligned}$$

Für die Reihe gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(k+3)\cdot(k+7)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{8}{(k+3)\cdot(k+7)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=3}^{6} \frac{2}{k} - \sum_{k=n+4}^{n+7} \frac{2}{k} = \sum_{k=3}^{6} \frac{2}{k} - 0$$

$$\sum_{k=3}^{6} \frac{2}{k} = \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \approx 1.9$$

**Angebotene Lösungen:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| [1] 3.67 | [2] 2.9 | [3] 1 | [X] 1.9 |
| [5] 2.19 | [6] $\infty$ | [7] 1.23 | [8] 0.25 |
| [9] 0 | [10] 4.17 | [11] 1.57 | [12] 4.67 |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| [1] | 3.67 | DF: Falsche Summe gerechnet |
| [2] | 2.9 | RF: Ein Summenglied zuviel addiert |
| [3] | 1 | DF: Lösung geraten |
| [X] | 1.9 | richtig |
| [5] | 2.19 | RF: Ein Summenglied zuviel addiert |
| [6] | $\infty$ | DF: Lösung geraten |
| [7] | 1.23 | RF: Erstes Summenglied vergessen |
| [8] | 0.25 | DF: Erster Summand angegeben |
| [9] | 0 | DF: Limes der Folge |
| [10] | 4.17 | DF: Falsche Summe gerechnet |
| [11] | 1.57 | RF: Letztes Summenglied vergessen |
| [12] | 4.67 | DF: Falsche Summe gerechnet |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 09 | Kapitel 6.3 | Partialbruchzerlegung |
| Grenzwertmethode | ElementareFktn | Nummer: 109 0 200409004 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 9.1.6:** Zerlegen Sie den Bruch $\frac{12}{(x-3)\cdot(x^2+3)}$ in (reelle) Partialbrüche.

**Parameter:**

$x_n$ = Faktoren und Summanden im Bruch, $x_n > 1$ , $n = 1..2$

Die Formel lautet: $\frac{\{x_1^2+x_2\}}{(x-x_1)\cdot(x^2+x_2)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 3$.

**Erklärung:**

Der Nenner hat die komplexen Nullstellen $\pm i\sqrt{3}$. Die reelle Partialbruchzerlegung ist von der Form $\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$.

**Rechnung:**

$$f(x) \quad = \quad \frac{12}{(x-3)\cdot(x^2+3)} \quad = \quad \frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+3} \quad \Rightarrow \quad 12 \quad = \quad A\cdot(x^2+3)+(Bx+C)\cdot(x-3) \qquad (*)$$

Wir wenden zuerst die Grenzwertmethode zur Berechnung von $A$ an.
Dazu setzen wir in die Gleichung $(*)$ den (Grenz -) Wert $x = 3$ ein:

$$x=3 \quad : \quad 12 \quad = \quad A\cdot(3^2+3)+(Bx+C)\cdot(3-3) \quad = \quad 12\cdot A \qquad \Rightarrow \quad A=1$$

Jetzt setzen wir in die Gleichung $(*)$ den speziellen Wert $x = 0$ (und $A = 1$) ein:

$$x=0 \quad : \quad 12 \quad = \quad 1\cdot(0^2+3)+(B\cdot 0+C)\cdot(0-3) \quad = \quad 3-3\cdot C \qquad \Rightarrow \quad C=-3$$

Um $C$ zu bestimmen, verwenden wir einen Koeffizientenvergleich. Dazu formen wir $(*)$ um:

$$0\cdot x^2+0\cdot x+12 \quad = \quad (A+B)\cdot x^2+(C-3B)\cdot x+(3A-3C) \quad = \quad (1+B)\cdot x^2+(-3-3B)\cdot x+3+9$$

Koeffizientenvergleich ergibt das Gleichungssystem

$$0 \;=\; 1+B \qquad 0=-3-3B \qquad 12 \;=\; 3+9 \qquad \Rightarrow \quad B=-1.$$

Damit ist $\quad f(x) \quad = \quad \frac{1}{x-3}+\frac{-x-3}{x^2+3}.$

**Angebotene Lösungen:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 $\frac{3}{x^3}+\frac{3}{3x^2}+\frac{3}{3x}+\frac{3}{9}$ | 2 $\frac{3}{(x-3)\cdot(x^2+3)}$ | 3 es gibt keine | 4 $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{9}$ |
| 5 $\frac{1}{x-3}+\frac{x+3}{x^2+3}$ | 6 $\frac{3}{x^3}-\frac{3}{3x^2}+\frac{3}{3x}-\frac{3}{9}$ | 7 $\frac{x-3}{x-3}-\frac{x+3}{x^2+3}$ | 8 $\frac{3}{x-3}-\frac{3}{x^2+3}$ |
| 9 $\frac{-3}{(x-3)\cdot(x^2+3)}$ | 10 $\frac{3}{x-3}+\frac{3}{x^2+3}$ | 11 $\frac{1}{x^3}-\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{3x}-\frac{1}{9}$ | ☒ $\frac{1}{x-3}-\frac{x+3}{x^2+3}$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{3}{x^3}+\frac{3}{3x^2}+\frac{3}{3x}+\frac{3}{9}$ | DF: Lösung geraten |
| 2 | $\frac{3}{(x-3)\cdot(x^2+3)}$ | DF: Lösung geraten |
| 3 | es gibt keine | DF: Doch |
| 4 | $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{9}$ | DF: Lösung geraten |
| 5 | $\frac{1}{x-3}+\frac{x+3}{x^2+3}$ | RF: Falsches Vorzeichen |
| 6 | $\frac{3}{x^3}-\frac{3}{3x^2}+\frac{3}{3x}-\frac{3}{9}$ | DF: Lösung geraten |
| 7 | $\frac{x-3}{x-3}-\frac{x+3}{x^2+3}$ | DF: Lösung geraten |
| 8 | $\frac{3}{x-3}-\frac{3}{x^2+3}$ | DF: Lösung geraten |
| 9 | $\frac{-3}{(x-3)\cdot(x^2+3)}$ | DF: Lösung geraten |
| 10 | $\frac{3}{x-3}+\frac{3}{x^2+3}$ | DF: Lösung geraten |
| 11 | $\frac{1}{x^3}-\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{3x}-\frac{1}{9}$ | DF: Lösung geraten |
| ☒ | $\frac{1}{x-3}-\frac{x+3}{x^2+3}$ | richtig |

**Allgemeine Hinweise:**

Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de ).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu