

**Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 10**

MV 04	Blatt 10	Kapitel 7.2	Produktregel
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 19 0 200410004	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

**Aufgabe 10.1.1:**

Leiten Sie die Funktion  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$   $f(x) = 7 \cdot \arccos x \cdot (4x^2 - 4) \cdot \cos x$  für  $x \in (-1, 1)$  ab.

**Parameter:**

$x_n$  = Faktoren und Summanden in der Funktion,  $x_n > 1$ ,  $n = 1, 2$ .

Die Formel lautet:  $f(x) = x_1 \cdot \arccos x \cdot (x_2 x^2 - x_2) \cdot \cos x$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 7$   $x_2 = 4$ .

**Erklärung:**

Die Funktion ist ein Produkt bestehend aus drei Faktoren. Deshalb muss hier die Produktregel iteriert angewandt werden.

Die iterierte Produktregel lautet:  $(f \cdot g \cdot h)'(x) = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$ .

**Rechnung:**

Zuerst differenzieren wir die einzelnen Faktoren ( $f_i$ ):

$$f_1' := (\arccos x)' = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} \quad f_2' := (4x^2 - 4)' = 8x \quad f_3' := (\cos x)' = -\sin x.$$

Damit gilt für die Ableitung von  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 &= f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3' \\ &= \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} \cdot (4x^2 - 4) \cdot \cos x + \arccos x \cdot (8x) \cdot \cos x + \arccos x \cdot (4x^2 - 4) \cdot (-\sin x). \end{aligned}$$

$$\text{Damit gilt } f'(x) = 7(4\sqrt{1-x^2} \cos x + (8x \cdot \cos x - (4x^2 - 4) \cdot \sin x) \cdot \arccos x).$$

**Angebotene Lösungen:**

- 1  $-\arcsin x \cdot 56x \cdot \sin x$
- 2  $28\sqrt{1-x^2} \cos x + (56x \cdot \cos x - (28x^2 - 28) \cdot \sin x) \cdot \arccos x$
- 3  $-\arcsin x \cdot 56x \cdot \cos x + \arcsin x \cdot (28x^2 - 28) \cdot \sin x - \arccos x \cdot 56x \cdot \sin x$
- 4  $f$  ist auf  $(-1, 1)$  nicht differenzierbar
- 5  $-28 \cot x + (56x \cdot \cos x + (28x^2 - 28) \cdot \sin x) \cdot \arccos x$
- 6  $\frac{7}{\sqrt{1-x^2}} + 56x + 7 \sin x$
- 7  $84x^2 + 14x$
- 8  $\frac{-7}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 8x \cdot \cos x - 28\sqrt{1-x^2} \cdot \sin x - \arccos x \cdot 56x \cdot \sin x$
- 9  $-7\arcsin x + 56x + 7 \sin x$
- 10  $-\cot x \cdot 56x + (28x^2 - 28) - \arccos x \cdot 56x \cdot \sin x$
- 11  $56x + 7$
- 12  $-\arcsin x \cdot (28x^2 - 28) \cdot \cos x + (56x \cdot \cos x + (28x^2 - 28) \cdot \sin x) \cdot \arccos x$

**Fehlerinterpretation:**

<input type="checkbox"/>	$-\arcsin x \cdot 56x \cdot \sin x$	DF: PR falsch
<input checked="" type="checkbox"/>	$28\sqrt{1-x^2} \cos x + (56x \cdot \cos x - (28x^2 - 28) \cdot \sin x) \cdot \arccos x$	richtig
<input type="checkbox"/>	$-\arcsin x \cdot 56x \cdot \cos x + \arcsin x \cdot (28x^2 - 28) \cdot \sin x - \arccos x \cdot 56x \cdot \sin x$	DF: PR falsch
<input type="checkbox"/>	$f$ ist auf $(-1, 1)$ nicht differenzierbar	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/>	$-28 \cot x + (56x \cdot \cos x + (28x^2 - 28) \cdot \sin x) \cdot \arccos x$	DF: $(\arccos x)' \neq \frac{-1}{\sin x}$
<input type="checkbox"/>	$\frac{7}{\sqrt{1-x^2}} + 56x + 7 \sin x$	DF: PR falsch
<input type="checkbox"/>	$84x^2 + 14x$	DF: $\arccos x \cdot \cos x \neq x$
<input type="checkbox"/>	$\frac{-7}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 8x \cdot \cos x - 28\sqrt{1-x^2} \cdot \sin x - \arccos x \cdot 56x \cdot \sin x$	DF: PR falsch
<input type="checkbox"/>	$-7\arcsin x + 56x + 7 \sin x$	DF: PR falsch
<input type="checkbox"/>	$-\cot x \cdot 56x + (28x^2 - 28) - \arccos x \cdot 56x \cdot \sin x$	DF: PR falsch
<input type="checkbox"/>	$56x + 7$	DF: $\arccos x \cdot \cos x \neq x$
<input type="checkbox"/>	$-\arcsin x \cdot (28x^2 - 28) \cdot \cos x + (56x \cdot \cos x + (28x^2 - 28) \cdot \sin x) \cdot \arccos x$	DF: $(\arccos x)' \neq \arcsin x$

MV 04                      Blatt 10                      Kapitel 7.2                      Kettenregel  
keine                      Differenzialrechnung      Nummer: 43 0 200410001      Kl: 14G  
Grad: 20 Zeit: 30      Quelle: keine                      W

**Aufgabe 10.1.2:** Leiten Sie die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = 4 \sin(6x + 3) + 1$  ab.

**Parameter:**

$x_n =$  Faktoren und Summanden in der Funktion,  $x_n > 1 \quad n = 1..4$

Die Formel lautet:  $f(x) = x_1 \sin(x_2 x + x_3) + x_4$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 4 \quad x_2 = 6 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = 1$ .

**Erklärung:**

Zerlegen Sie zunächst die Funktion in Ihre einzelnen Verknüpfungen. Dabei stellt nur die Sinusfunktion ein Problem dar, weil sie eine innere Funktion besitzt.

Wenden Sie dabei die Kettenregel  $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$  an .

**Rechnung:**

Wir zerlegen zunächst die Sinusfunktion. Dabei definieren wir  $f_1(x) = \sin(6x + 3)$  und  $g(x) = 6x + 3$ . Damit ist  $f_1(g) = \sin g$ . Nach der Kettenregel gilt

$$(f_1(x))'x = (\sin(6x + 3))'x = (\sin g)'g \cdot (6x + 3)'x = \cos g \cdot 6 = 6 \cdot \cos(6x + 3)$$

Nach den Regeln der Ableitung konstanter Summanden und Faktoren gilt also

$$(4 \sin(6x + 3) + 1)'x = 4 \cdot 6 \cdot \cos(6x + 3) = 24 \cdot \cos(6x + 3).$$

**Angebotene Lösungen:**

<input type="checkbox"/>	$4 \cdot \sin(6) + 1$	<input type="checkbox"/>	$24 \cdot \cos(6x + 3) + 1$	<input checked="" type="checkbox"/>	$24 \cdot \cos(6x + 3)$
<input type="checkbox"/>	$\cos 6$	<input type="checkbox"/>	$\sin(6x + 3)$	<input type="checkbox"/>	$6 \cdot \cos(6x + 3) + 1$
<input type="checkbox"/>	$4 \cdot \sin 6$	<input type="checkbox"/>	$4 \cdot \cos(6x + 3) + 1$	<input type="checkbox"/>	$4 \cdot (6x + 3) \cdot \sin(6x + 3)$
<input type="checkbox"/>	$4 \cdot \cos(6x + 3)$	<input type="checkbox"/>	$\cos(6x + 3)$	<input type="checkbox"/>	$4 \cdot (6x + 3) \cdot \cos(6x + 3)$

**Fehlerinterpretation:**

<input type="checkbox"/>	$4 \cdot \sin(6) + 1$	DF: Innere Funktion abgeleitet
<input type="checkbox"/>	$24 \cdot \cos(6x + 3) + 1$	RF: Konstanter Summand nicht abgeleitet
<input checked="" type="checkbox"/>	$24 \cdot \cos(6x + 3)$	richtig
<input type="checkbox"/>	$\cos 6$	DF: Innere Funktion abgeleitet
<input type="checkbox"/>	$\sin(6x + 3)$	DF: Innere Funktion abgeleitet
<input type="checkbox"/>	$6 \cdot \cos(6x + 3) + 1$	RF: Konstanter Summand nicht abgeleitet
<input type="checkbox"/>	$4 \cdot \sin 6$	DF: Innere Funktion abgeleitet
<input type="checkbox"/>	$4 \cdot \cos(6x + 3) + 1$	DF: Innere Ableitung vergessen
<input type="checkbox"/>	$4 \cdot (6x + 3) \cdot \sin(6x + 3)$	DF: Innere Ableitung vergessen
<input type="checkbox"/>	$4 \cdot \cos(6x + 3)$	DF: Innere Ableitung vergessen
<input type="checkbox"/>	$\cos(6x + 3)$	DF: Innere Ableitung vergessen
<input type="checkbox"/>	$4 \cdot (6x + 3) \cdot \cos(6x + 3)$	DF: Innere Ableitung vergessen

MV 04                      Blatt 10                      Kapitel 7.2                      Kettenregel  
keine                      Differenzialrechnung                      Nummer: 48 0 200410002                      Kl: 14G  
Grad: 20 Zeit: 30                      Quelle: keine                      W

### Aufgabe 10.1.3:

Leiten Sie die Funktion  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = 5 \cdot e^{\sqrt[3]{4x+5}}$  ab. ( $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$  maximal)

#### Parameter:

$x_n =$  Faktoren und Summanden in der Funktion,  $x_1 > 1$ ,  $x_2 > 2$ ,  $x_3 > 1$ ,  $x_4 > 0$

Die Formel lautet:  $f(x) = x_1 \cdot e^{(x_2 \sqrt{x_3 x + x_4})}$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 5$      $x_2 = 3$      $x_3 = 4$      $x_4 = 5$ .

#### Erklärung:

Zerlegen Sie zunächst die Funktion in Ihre einzelnen Verknüpfungen. Hier handelt es sich um eine mehrfach verkettete Funktion. Deshalb muss hier die Kettenregel mehrfach angewendet werden.

Die Formel der iterierten Verkettung lautet:  $(f \circ g \circ h)'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$ .

Wurzelfunktionen werden mit der Potenzregel  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$  abgeleitet:

$$(\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{n \cdot x}$$

#### Rechnung:

Wir zerlegen zunächst die Funktion in  $f, g$  und  $h$ .

$$f(g) = e^g \quad g(h) = \sqrt[3]{h} \quad h(x) = 4x + 5;$$

abgeleitet ergibt sich:

$$f'(g) = e^g \quad g'(h) = \frac{\sqrt[3]{h}}{3 \cdot h} \quad h'(x) = 4.$$

$$\begin{aligned} \text{Damit gilt: } f'(x) &= f'(g) \cdot g'(h) \cdot h'(x) = e^g \cdot \frac{\sqrt[3]{h}}{3 \cdot h} \cdot 4 = 5 \cdot e^{\sqrt[3]{4x+5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4x+5}}{3 \cdot (4x+5)} \cdot 4 \\ &= \frac{5 \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{4x+5} \cdot e^{\sqrt[3]{4x+5}}}{3 \cdot (4x+5)} = \frac{20}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{4x+5} \cdot e^{\sqrt[3]{4x+5}}}{4x+5} \end{aligned}$$

#### Angebotene Lösungen:

- |                             |                                                                |                             |                                                                  |                                       |                                                                             |
|-----------------------------|----------------------------------------------------------------|-----------------------------|------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1  | $\frac{20}{3} \cdot e^{x-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$       | <input type="checkbox"/> 2  | $\frac{20}{3} \cdot \frac{e^{\sqrt[3]{4x+5}-1}}{\sqrt[3]{4x+5}}$ | <input type="checkbox"/> 3            | $\frac{e^{\sqrt[3]{4x+5}}}{\sqrt[3]{4x+5}}$                                 |
| <input type="checkbox"/> 4  | $\frac{20}{3} \cdot \frac{e^x}{\sqrt[3]{4x+5}}$                | <input type="checkbox"/> 5  | $\frac{20}{3} \cdot e^{\frac{4x+5}{3}-1}$                        | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | $\frac{20}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{4x+5} \cdot e^{\sqrt[3]{4x+5}}}{4x+5}$   |
| <input type="checkbox"/> 7  | $\frac{20}{3} \cdot \frac{e^{\sqrt[3]{4x+5}}}{\sqrt[3]{4x+5}}$ | <input type="checkbox"/> 8  | $\frac{20}{3} \cdot e^x \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$             | <input type="checkbox"/> 9            | $\frac{20}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{4x+5} \cdot e^{\sqrt[3]{4x+5}-1}}{4x+5}$ |
| <input type="checkbox"/> 10 | $\frac{20}{3} \cdot e^{\frac{4x+5}{3}}$                        | <input type="checkbox"/> 11 | $\frac{20}{3} \cdot \frac{e^{x-1}}{\sqrt[3]{4x+5}}$              | <input type="checkbox"/> 12           | $5 \cdot (4x+5) \cdot \sqrt[3]{4x+5} \cdot e^{\sqrt[3]{4x+5}}$              |

### Fehlerinterpretation:

- |                                       |                                                                             |                                         |
|---------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1            | $\frac{20}{3} \cdot e^{x-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$                    | DF: nicht rücks substituiert            |
| <input type="checkbox"/> 2            | $\frac{20}{3} \cdot \frac{e^{\sqrt[3]{4x+5}-1}}{\sqrt[3]{4x+5}}$            | DF: Wurzel falsch abgeleitet            |
| <input type="checkbox"/> 3            | $\frac{e^{\sqrt[3]{4x+5}}}{\sqrt[3]{4x+5}}$                                 | DF: Wurzel falsch abgeleitet            |
| <input type="checkbox"/> 4            | $\frac{20}{3} \cdot \frac{e^x}{\sqrt[3]{4x+5}}$                             | DF: Wurzel falsch abgeleitet            |
| <input type="checkbox"/> 5            | $\frac{20}{3} \cdot e^{\frac{4x+5}{3}-1}$                                   | DF: $e^{\sqrt{x}} \neq e^{\frac{x}{2}}$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 6 | $\frac{20}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{4x+5} \cdot e^{\sqrt[3]{4x+5}}}{4x+5}$   | richtig                                 |
| <input type="checkbox"/> 7            | $\frac{20}{3} \cdot \frac{e^{\sqrt[3]{4x+5}}}{\sqrt[3]{4x+5}}$              | DF: Wurzel falsch abgeleitet            |
| <input type="checkbox"/> 8            | $\frac{20}{3} \cdot e^x \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$                        | DF: nicht rücks substituiert            |
| <input type="checkbox"/> 9            | $\frac{20}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{4x+5} \cdot e^{\sqrt[3]{4x+5}-1}}{4x+5}$ | DF: $e^x$ falsch abgeleitet             |
| <input type="checkbox"/> 10           | $\frac{20}{3} \cdot e^{\frac{4x+5}{3}}$                                     | DF: $e^{\sqrt{x}} \neq e^{\frac{x}{2}}$ |
| <input type="checkbox"/> 11           | $\frac{20}{3} \cdot \frac{e^{x-1}}{\sqrt[3]{4x+5}}$                         | DF: Wurzel falsch abgeleitet            |
| <input type="checkbox"/> 12           | $5 \cdot (4x+5) \cdot \sqrt[3]{4x+5} \cdot e^{\sqrt[3]{4x+5}}$              | DF: es wurde nicht differenziert        |

MV 04                      Blatt 10                      Kapitel 7.2                      Produktregel  
keine                      Differenzialrechnung                      Nummer: 51 0 200410007                      Kl: 14G  
Grad: 20 Zeit: 30                      Quelle: keine                      W

### Aufgabe 10.1.4:

Leiten Sie die Funktion  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \ln(5x+5) \cdot \arcsin(\sin(3x-3))$  ab.

#### Parameter:

$x_n =$  Faktoren und Summanden in der Funktion,  $x_n > 1$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ .

Die Formel lautet:  $\ln(x_1 x + x_2) \cdot \arcsin(\sin(x_3 x - x_4))$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 5 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = 3$ .

#### Erklärung:

Zuerst können Sie  $\sin$  und  $\arcsin$  zusammenfassen.

Zum Berechnen der Ableitung verwenden Sie die Produktregel und die Kettenregel:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \text{und} \quad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

#### Rechnung:

$\arcsin(\sin x) = x$ . Damit gilt  $f(x) = \ln(5x+5) \cdot (3x-3)$ . Mit  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  gilt  $(\ln(5x+5))' = \frac{5}{5x+5}$ .

$$\text{Damit ist} \quad f'(x) = \frac{5}{5x+5} \cdot (3x-3) + 3 \ln(5x+5) = \frac{15x-15}{5x+5} + 3 \ln(5x+5).$$

#### Angebotene Lösungen:

- |                            |                                                  |                             |                                                      |                                        |                                     |                             |                                          |
|----------------------------|--------------------------------------------------|-----------------------------|------------------------------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\sin\left(\frac{5x+5}{3x-3}\right) + \ln(5x+5)$ | <input type="checkbox"/> 2  | $\sin\left(\frac{3x-3}{5x+5}\right)$                 | <input type="checkbox"/> 3             | $\ln\left(\frac{3x-3}{5x+5}\right)$ | <input type="checkbox"/> 4  | $15 \sin\left(\frac{3x-3}{5x+5}\right)$  |
| <input type="checkbox"/> 5 | $15 \ln\left(\frac{3x-3}{5x+5}\right)$           | <input type="checkbox"/> 6  | $\sin\left(\ln\left(\frac{5x+5}{3x-3}\right)\right)$ | <input type="checkbox"/> 7             | $\frac{15}{5x+5}$                   | <input type="checkbox"/> 8  | $15 \sqrt{\frac{3x-3}{5x+5}}$            |
| <input type="checkbox"/> 9 | $\sqrt{\frac{3x-3}{5x+5}}$                       | <input type="checkbox"/> 10 | $\frac{5x+5}{3x-3} \cdot \ln(5x+5)$                  | <input checked="" type="checkbox"/> 11 | $\frac{15x-15}{5x+5} + 3 \ln(5x+5)$ | <input type="checkbox"/> 12 | $\frac{5x+5}{\sqrt{3x-4}} + 5 \ln(5x+5)$ |

**Fehlerinterpretation:**

<input type="checkbox"/> 1	$\sin\left(\frac{5x+5}{3x-3}\right) + \ln(5x+5)$	DF: Geratene Lösung
<input type="checkbox"/> 2	$\sin\frac{3x-3}{5x+5}$	DF: Geratene Lösung
<input type="checkbox"/> 3	$\ln\frac{3x-3}{5x+5}$	DF: Geratene Lösung
<input type="checkbox"/> 4	$15 \sin\frac{3x-3}{5x+5}$	DF: Geratene Lösung
<input type="checkbox"/> 5	$15 \ln\frac{3x-3}{5x+5}$	DF: Geratene Lösung
<input type="checkbox"/> 6	$\sin(\ln(\frac{5x+5}{3x-3}))$	DF: Geratene Lösung
<input type="checkbox"/> 7	$\frac{15}{5x+5}$	DF: Produktregel falsch
<input type="checkbox"/> 8	$15 \sqrt{\frac{3x-3}{5x+5}}$	DF: Geratene Lösung
<input type="checkbox"/> 9	$\sqrt{\frac{3x-3}{5x+5}}$	DF: Geratene Lösung
<input type="checkbox"/> 10	$\frac{5x+5}{3x-3} \cdot \ln(5x+5)$	DF: Geratene Lösung
<input checked="" type="checkbox"/> 11	$\frac{15x-15}{5x+5} + 3 \ln(5x+5)$	richtig
<input type="checkbox"/> 12	$\frac{5x+5}{\sqrt{3x-4}} + 5 \ln(5x+5)$	DF: Geratene Lösung

MV 04                      Blatt 10                      Kapitel 7.2                      Produktregel  
keine                      Differenzialrechnung      Nummer: 55 0 200410006      Kl: 14G  
Grad: 20 Zeit: 30      Quelle: keine                      W

**Aufgabe 10.1.5:**

Leiten Sie die Funktion  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \tan(4x+2) \cdot \arctan_{\pi}(\sqrt{7x-7})$  ab ( $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$  maximal).

**Parameter:**

$x_n =$  Faktoren und Summanden in der Funktion,  $x_n > 1, n = 1, 2, 3, 4$ .

Die Formel lautet:  $\tan(x_1 x + x_2) \cdot \arctan_{\pi}(\sqrt{x_3 x - x_4})$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 4 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 7 \quad x_4 = 7$ .

**Erklärung:**

Die Funktion ist ein Produkt mit inneren Verkettungen. Deshalb müssen Produktregel und Kettenregel angewandt werden:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \text{und} \quad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Beachten Sie auch, dass  $\tan x \cdot \arctan x \neq x$  ist.

**Rechnung:**

Wir bilden zuerst die Ableitung von  $\tan x$ .

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x \cdot \sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\text{Weiter gilt: } (\arctan_{\pi}(x))' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{und} \quad (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Sei  $g_1(x) = 4x + 2$ , dann gilt

$$(\tan(4x+2))' = (\tan(g_1))'_{g_1} \cdot (4x+2)' = \frac{1}{\cos^2(g_1)} \cdot 4 = \frac{4}{\cos^2(4x+2)}.$$

Sei  $g_2(h_2) = \sqrt{h_2}$  und  $h_2(x) = 7x - 7$ , dann gilt

$$\begin{aligned} (\arctan_{\pi}(\sqrt{7x-7}))' &= (\arctan_{\pi} g_2)'_{g_2} \cdot (\sqrt{h_2})'_{h_2} \cdot (7x-7)' = \frac{1}{1+g_2^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{h_2}} \cdot 7 \\ &= \frac{7}{1+(\sqrt{h_2})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{7x-7}} = \frac{7}{1+7x-7} \cdot \frac{1}{2\sqrt{7x-7}}. \end{aligned}$$

Mit der Produktregel ergibt sich:

$$\begin{aligned} (\tan(4x+2) \cdot \arctan_{\pi}(\sqrt{7x-7}))' &= \frac{4}{\cos^2(4x+2)} \cdot \arctan_{\pi}(\sqrt{7x-7}) + \tan(4x+2) \cdot \frac{7}{1+7x-7} \cdot \frac{1}{2\sqrt{7x-7}} \\ &= \frac{4 \arctan_{\pi}(\sqrt{7x-7})}{\cos^2(4x+2)} + \frac{7 \tan(4x+2)}{(14x-12)\sqrt{7x-7}}. \end{aligned}$$

**Angebotene Lösungen:**

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><input type="checkbox"/> <math>\frac{4}{2\sqrt{7x-7}}</math></p> <p><input type="checkbox"/> <math>\frac{4 \arctan_{\pi}(7x-7)}{2 \cos^2(4x+2)} + \frac{7 \tan(4x+2)}{2(7x-7)^2}</math></p> <p><input type="checkbox"/> <math>4\sqrt{7x-7} + \frac{14x+7}{\sqrt{7x-7}}</math></p> <p><input type="checkbox"/> <math>\frac{4}{\cos^2(4x+2)} \cdot \frac{-7}{2 \sin^2(\sqrt{7x-7}) \cdot \sqrt{7x-7}}</math></p> <p><input type="checkbox"/> <math>4 \arctan(4x+2) \cdot \arctan_{\pi}(\sqrt{7x-7}) + \frac{\tan(4x+2) \cdot \tan(\sqrt{7x-7})}{14\sqrt{7x-7}}</math></p> <p><input type="checkbox"/> <math>\frac{4}{2 \cos^2(4x+2)} \cdot \frac{7}{2(7x-7)^2}</math></p> | <p><input type="checkbox"/> <math>(4x+2) \cdot (\sqrt{7x-7})</math></p> <p><input type="checkbox"/> <math>4 \arctan(4x+2) \cdot \frac{\tan(\sqrt{7x-7})}{14\sqrt{7x-7}}</math></p> <p><input type="checkbox"/> <math>\tan(4x+2) \cdot \arctan_{\pi}(\sqrt{7x-7})</math></p> <p><input checked="" type="checkbox"/> <math>\frac{4 \arctan_{\pi}(\sqrt{7x-7})}{\cos^2(4x+2)} + \frac{7 \tan(4x+2)}{(14x-12)\sqrt{7x-7}}</math></p> <p><input type="checkbox"/> <math>\frac{4 \arctan_{\pi}(\sqrt{7x-7})}{\cos^2(4x+2)} + \frac{-7 \tan(4x+2)}{2 \sin^2(\sqrt{7x-7}) \cdot \sqrt{7x-7}}</math></p> <p><input type="checkbox"/> <math>\frac{4}{\cos^2(4x+2)} \cdot \frac{7}{(14x-12)\sqrt{7x-7}}</math></p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Fehlerinterpretation:**

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><input type="checkbox"/> <math>\frac{4}{2\sqrt{7x-7}}</math></p> <p><input type="checkbox"/> <math>(4x+2) \cdot (\sqrt{7x-7})</math></p> <p><input type="checkbox"/> <math>\frac{4 \arctan_{\pi}(7x-7)}{2 \cos^2(4x+2)} + \frac{7 \tan(4x+2)}{2(7x-7)^2}</math></p> <p><input type="checkbox"/> <math>4 \arctan(4x+2) \cdot \frac{\tan(\sqrt{7x-7})}{14\sqrt{7x-7}}</math></p> <p><input type="checkbox"/> <math>4\sqrt{7x-7} + \frac{14x+7}{\sqrt{7x-7}}</math></p> <p><input type="checkbox"/> <math>\tan(4x+2) \cdot \arctan_{\pi}(\sqrt{7x-7})</math></p> <p><input type="checkbox"/> <math>\frac{4}{\cos^2(4x+2)} \cdot \frac{-7}{2 \sin^2(\sqrt{7x-7}) \cdot \sqrt{7x-7}}</math></p> <p><input checked="" type="checkbox"/> <math>\frac{4 \arctan_{\pi}(\sqrt{7x-7})}{\cos^2(4x+2)} + \frac{7 \tan(4x+2)}{(14x-12)\sqrt{7x-7}}</math></p> <p><input type="checkbox"/> <math>4 \arctan(4x+2) \cdot \arctan_{\pi}(\sqrt{7x-7}) + \frac{\tan(4x+2) \cdot \tan(\sqrt{7x-7})}{14\sqrt{7x-7}}</math></p> <p><input type="checkbox"/> <math>\frac{4 \arctan_{\pi}(\sqrt{7x-7})}{\cos^2(4x+2)} + \frac{-7 \tan(4x+2)}{2 \sin^2(\sqrt{7x-7}) \cdot \sqrt{7x-7}}</math></p> <p><input type="checkbox"/> <math>\frac{4}{2 \cos^2(4x+2)} \cdot \frac{7}{2(7x-7)^2}</math></p> <p><input type="checkbox"/> <math>\frac{4}{\cos^2(4x+2)} \cdot \frac{7}{(14x-12)\sqrt{7x-7}}</math></p> | <p>DF: <math>\tan x \cdot \arctan x \neq x</math></p> <p>DF: <math>\tan</math> und <math>\arctan</math> weggelassen</p> <p>DF: <math>\arctan \sqrt{x} \neq \frac{1}{2} \arctan x</math></p> <p>DF: <math>(\arctan x)' \neq \tan x</math></p> <p>DF: <math>\tan x \cdot \arctan x \neq x</math></p> <p>DF: Hier steht nur <math>f(x)</math></p> <p>DF: <math>\arctan x \neq \frac{1}{\tan x}</math></p> <p>richtig</p> <p>DF: <math>(\arctan x)' \neq \tan x</math></p> <p>DF: <math>\arctan x \neq \frac{1}{\tan x}</math></p> <p>DF: <math>\arctan \sqrt{x} \neq \frac{1}{2} \arctan x</math></p> <p>DF: Produktregel falsch</p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

MV 04                      Blatt 10                      Kapitel 7.2                      Produktregel  
keine                      Differenzialrechnung                      Nummer: 87 0 200410003                      Kl: 14G  
Grad: 20 Zeit: 30                      Quelle: keine                      W

**Aufgabe 10.1.6:**

Leiten Sie die Funktion  $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = 7 \cdot e^{x+5} \cdot \ln(7x) + 2$  ab.

**Parameter:**

$x_n =$  Faktoren und Summanden in der Funktion,  $x_1 > 1, x_2 > 2, x_3 > 1, x_4 > 0$

Die Formel lautet:  $f(x) = x_1 \cdot e^{x+x_2} \cdot \ln(x_3 x) + x_4$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 7 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 7 \quad x_4 = 2$ .

**Erklärung:**

Der schwierige Teil der Funktion besteht aus dem Produkt einer  $e$ - Funktion mit einer Logarithmusfunktion. Beide Funktionen können so als Produkt oder Summe geschrieben werden, dass die Kettenregel nicht unbedingt benötigt wird.

Die Produktregel lautet:  $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ .

**Rechnung:**

Zuerst zerlegen wir die inneren Funktionen:

$$7 \cdot e^{x+5} \cdot \ln(7x) + 2 = 7 \cdot e^5 \cdot e^x \cdot (\ln 7 + \ln x) + 2 = 7 \cdot e^5 \cdot e^x \cdot \ln x + 7 \cdot e^5 \cdot \ln 7 \cdot e^x + 2$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (7 \cdot e^5 \cdot e^x \cdot \ln x + 7 \cdot e^5 \cdot \ln 7 \cdot e^x + 2)' \\
&= 7 \cdot e^5 \cdot e^x \cdot \frac{1}{x} + 7 \cdot e^5 \cdot e^x \cdot \ln x + 7 \cdot e^5 \cdot \ln 7 \cdot e^x && \text{Produktregel} \\
&= 7 \cdot e^5 \cdot e^x \cdot \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) + \ln 7 \\
&= 7 \cdot e^{x+5} \cdot \left(\frac{1}{x} + \ln(7x)\right).
\end{aligned}$$

Die Zerlegung ist nicht notwendig. Mit der Anwendung der Kettenregel hätte man ein äquivalentes Ergebnis erhalten. Bitte beachten Sie, dass  $(\ln(ax))' = (\ln a + \ln x)' = \frac{1}{x}$  ist.

**Angeborene Lösungen:**

- |                            |                                               |                                       |                                                            |                             |                                                             |                             |                                                            |
|----------------------------|-----------------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------------------------------|-----------------------------|-------------------------------------------------------------|-----------------------------|------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $7 \cdot e^{x+5} \cdot \ln(7x)$               | <input type="checkbox"/> 2            | $7 \cdot e^{x+5} \cdot \frac{1}{x}$                        | <input type="checkbox"/> 3  | $7 \cdot e^{x+5} \cdot \frac{7}{x}$                         | <input type="checkbox"/> 4  | $7 \cdot e^{x+4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \ln(7x)\right)$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $7 \cdot \left(e^{x+5} + \frac{1}{7x}\right)$ | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | $7 \cdot e^{x+5} \cdot \left(\frac{1}{x} + \ln(7x)\right)$ | <input type="checkbox"/> 7  | $7 \cdot e^{x+5} \cdot \left(\frac{1}{7x} + \ln(7x)\right)$ | <input type="checkbox"/> 8  | $7 \cdot e^{x+4} \cdot \ln(7x)$                            |
| <input type="checkbox"/> 9 | $7 \cdot \left(e^{x+5} + \frac{1}{x}\right)$  | <input type="checkbox"/> 10           | $7 \cdot e^{x+4} \cdot \frac{1}{x}$                        | <input type="checkbox"/> 11 | $7 \cdot e^{x+4} \cdot \frac{1}{7x}$                        | <input type="checkbox"/> 12 | $7 \cdot e^{x+4} \cdot \left(\frac{7}{x} + \ln(7x)\right)$ |

**Fehlerinterpretation:**

- |                                       |                                                             |                                                     |
|---------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1            | $7 \cdot e^{x+5} \cdot \ln(7x)$                             | DF: Funktion nicht differenziert                    |
| <input type="checkbox"/> 2            | $7 \cdot e^{x+5} \cdot \frac{1}{x}$                         | DF: Produktregel nicht angewendet                   |
| <input type="checkbox"/> 3            | $7 \cdot e^{x+5} \cdot \frac{7}{x}$                         | DF: Produktregel nicht angewendet                   |
| <input type="checkbox"/> 4            | $7 \cdot e^{x+4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \ln(7x)\right)$  | DF: $e$ - Fktn falsch differenziert                 |
| <input type="checkbox"/> 5            | $7 \cdot \left(e^{x+5} + \frac{1}{7x}\right)$               | DF: Produktregel nicht angewendet                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> 6 | $7 \cdot e^{x+5} \cdot \left(\frac{1}{x} + \ln(7x)\right)$  | richtig                                             |
| <input type="checkbox"/> 7            | $7 \cdot e^{x+5} \cdot \left(\frac{1}{7x} + \ln(7x)\right)$ | DF: Logarithmus falsch differenziert                |
| <input type="checkbox"/> 8            | $7 \cdot e^{x+4} \cdot \ln(7x)$                             | DF: $e$ - Fktn falsch differenziert                 |
| <input type="checkbox"/> 9            | $7 \cdot \left(e^{x+5} + \frac{1}{x}\right)$                | DF: Produktregel nicht angewendet                   |
| <input type="checkbox"/> 10           | $7 \cdot e^{x+4} \cdot \frac{1}{x}$                         | DF: Produktregel nicht angewendet                   |
| <input type="checkbox"/> 11           | $7 \cdot e^{x+4} \cdot \frac{1}{7x}$                        | DF: Produktregel nicht angewendet                   |
| <input type="checkbox"/> 12           | $7 \cdot e^{x+4} \cdot \left(\frac{7}{x} + \ln(7x)\right)$  | DF: Logarithmus und $e$ - Fktn falsch differenziert |

MV 04                      Blatt 10                      Kapitel 7.2                      Kettenregel  
keine                      Differenzialrechnung      Nummer: 93 0 200510008      Kl: 14G  
Grad: 20 Zeit: 30      Quelle: keine                      W

**Aufgabe 10.1.7:**

Leiten Sie die Funktion  $f : \left(0, \frac{1}{6}\right) \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = \cos(5 \ln(2 \arccos(6x)))$  ab.

Beim  $\arccos x$  soll der Wertebereich  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  sein.

**Parameter:**

$x_n$  = Faktoren in der Funktion,  $x_n > 1$

Die Funktion lautet:  $f(x) = \cos(x_1 \ln(x_2 \arccos(x_3 x)))$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 6$ .

**Erklärung:**

Die Funktion ist dreifach verkettet. Leiten Sie die einzelnen Funktionen ab und multiplizieren Sie die Ergebnisse nach der Kettenregel.

**Rechnung:**

Sei  $h(x) = \arccos(6x)$ ,  $g(h) = \ln(2h)$  und  $f(g) = \cos(5g)$ , dann gilt:  
 $h'(x) = \frac{-6}{\sqrt{1-(6x)^2}}$ ,  $g'(h) = \frac{2}{2h}$  und  $f'(g) = -5 \sin(5g)$ .

Ableitungen sind hier die Ableitungen nach den einzelnen Variablen. Nach der Kettenregel multipliziert ergibt

sich:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= h'(x) \cdot g'(h) \cdot f'(g) \\
 &= \frac{-6}{\sqrt{1-(6x)^2}} \cdot \frac{2}{2h} \cdot -5 \sin(5g) \\
 &= \frac{-6}{\sqrt{1-(6x)^2}} \cdot \frac{1}{\arccos(6x)} \cdot -5 \sin(5 \ln(2h)) \\
 &= \frac{-6}{\sqrt{1-(6x)^2} \cdot \arccos(6x)} \cdot -5 \sin(5 \ln(2 \arccos(6x))) \\
 &= \frac{30 \sin(5 \ln(2 \arccos(6x)))}{\sqrt{1-(6x)^2} \cdot \arccos(6x)}
 \end{aligned}$$

**Angebotene Lösungen:**

- |                                       |                                                                           |                             |                                                                    |                             |                                                                      |
|---------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1            | $\frac{30 \sin(5 \ln(2 \arccos(6x)))}{\sin(6x) \cdot \arccos(6x)}$        | <input type="checkbox"/> 2  | $\frac{30}{x}$                                                     | <input type="checkbox"/> 3  | $\frac{60}{x}$                                                       |
| <input checked="" type="checkbox"/> 4 | $\frac{30 \sin(5 \ln(2 \arccos(6x)))}{\sqrt{1-(6x)^2} \cdot \arccos(6x)}$ | <input type="checkbox"/> 5  | $\frac{30 \sin(5 \ln(2x))}{\sqrt{1-(6x)^2}}$                       | <input type="checkbox"/> 6  | $\frac{50 \sin(\ln(\arccos(x)))}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arccos(x)}$     |
| <input type="checkbox"/> 7            | $\frac{1800 \sin(\ln(\arccos(x)))}{\sqrt{1-(6x)^2} \cdot \arccos(6x)}$    | <input type="checkbox"/> 8  | $\frac{60 \sin(5 \ln(2 \arccos(6x)))}{\sin(6x) \cdot \arccos(6x)}$ | <input type="checkbox"/> 9  | $\frac{300 \sin(\ln(\arccos(x)))}{\sqrt{1-(6x)^2} \cdot \arccos(x)}$ |
| <input type="checkbox"/> 10           | $\arccos(6x) \cdot \ln(2x) \cdot \cos(5x)$                                | <input type="checkbox"/> 11 | es gibt keine                                                      | <input type="checkbox"/> 12 | $60 \arccos x \cdot \ln x \cdot \cos x$                              |

**Fehlerinterpretation:**

- |                                       |                                                                           |                                        |
|---------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1            | $\frac{30 \sin(5 \ln(2 \arccos(6x)))}{\sin(6x) \cdot \arccos(6x)}$        | DF: $\arcsin' x \neq \sin x$           |
| <input type="checkbox"/> 2            | $\frac{30}{x}$                                                            | DF: $\cos(\ln(\arccos(x))) \neq \ln x$ |
| <input type="checkbox"/> 3            | $\frac{60}{x}$                                                            | DF: $\cos(\ln(\arccos(x))) \neq \ln x$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 4 | $\frac{30 \sin(5 \ln(2 \arccos(6x)))}{\sqrt{1-(6x)^2} \cdot \arccos(6x)}$ | richtig                                |
| <input type="checkbox"/> 5            | $\frac{30 \sin(5 \ln(2x))}{\sqrt{1-(6x)^2}}$                              | DF: Funktionen sind nicht linear       |
| <input type="checkbox"/> 6            | $\frac{50 \sin(\ln(\arccos(x)))}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arccos(x)}$          | DF: Funktionen sind nicht linear       |
| <input type="checkbox"/> 7            | $\frac{1800 \sin(\ln(\arccos(x)))}{\sqrt{1-(6x)^2} \cdot \arccos(6x)}$    | DF: Funktionen sind nicht linear       |
| <input type="checkbox"/> 8            | $\frac{60 \sin(5 \ln(2 \arccos(6x)))}{\sin(6x) \cdot \arccos(6x)}$        | DF: $\arcsin' x \neq \sin x$           |
| <input type="checkbox"/> 9            | $\frac{300 \sin(\ln(\arccos(x)))}{\sqrt{1-(6x)^2} \cdot \arccos(x)}$      | DF: Funktionen sind nicht linear       |
| <input type="checkbox"/> 10           | $\arccos(6x) \cdot \ln(2x) \cdot \cos(5x)$                                | DF: Lösung geraten                     |
| <input type="checkbox"/> 11           | es gibt keine                                                             | DF: Lösung geraten                     |
| <input type="checkbox"/> 12           | $60 \arccos x \cdot \ln x \cdot \cos x$                                   | DF: Lösung geraten                     |

MV 04                      Blatt 10                      Kapitel 7.2                      Produktregel  
keine                      Differenzialrechnung      Nummer: 102 0 200410005      Kl: 14G  
Grad: 20 Zeit: 30      Quelle: keine                      W

**Aufgabe 10.1.8:**

Leiten Sie die Funktion  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{7x+2}{\sqrt{7x}}$  ab.

**Parameter:**

$x_n =$  Faktoren und Summanden in der Funktion,  $x_n > 1, n = 1, 2, 3$ .

Die Formel lautet:  $f(x) = \frac{x_1 x + x_2}{\sqrt{x_3 x}}$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 7 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 7$ .

**Erklärung:**

Die Funktion ist ein Quotient. Damit muss die Quotientenregel angewendet werden.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

**Rechnung:**

$$g'(x) = (\sqrt{7x})' = (\sqrt{7} \cdot \sqrt{x})' = \sqrt{7} \cdot (x^{\frac{1}{2}})' = \sqrt{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{7}{4x}}$$

Damit gilt:

$$\left(\frac{7x+2}{\sqrt{7x}}\right)' = \frac{7 \cdot \sqrt{7x} - (7x+2) \cdot \sqrt{\frac{7}{4x}}}{(\sqrt{7x})^2} = \frac{7 \cdot \sqrt{7} \cdot x - \frac{1}{2}(7x+2) \cdot \sqrt{7}}{7x\sqrt{x}} = \frac{\frac{7}{2}\sqrt{7x} - \frac{2}{2} \cdot \sqrt{7}}{7x\sqrt{x}}$$

Angebote Lösungen:

- |                            |                                                               |                             |                                                              |                             |                                  |                                       |                                                          |
|----------------------------|---------------------------------------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------------------------------|-----------------------------|----------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\pm \frac{\frac{21}{2}\sqrt{7x+1}\cdot\sqrt{7}}{7x\sqrt{x}}$ | <input type="checkbox"/> 2  | $\pm \frac{\frac{7}{2}x-1}{7x}$                              | <input type="checkbox"/> 3  | $\frac{\frac{7}{2}x-1}{7x}$      | <input checked="" type="checkbox"/> X | $\frac{\frac{7}{2}\sqrt{7x-1}\cdot\sqrt{7}}{7x\sqrt{x}}$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\frac{\frac{21}{2}x+1}{7x\sqrt{7x}}$                         | <input type="checkbox"/> 6  | $\pm \frac{\frac{7}{2}\sqrt{7x-1}\cdot\sqrt{7}}{7x\sqrt{x}}$ | <input type="checkbox"/> 7  | $\frac{\frac{21}{2}x+1}{7x}$     | <input type="checkbox"/> 8            | $\pm \frac{\frac{21}{2}x+1}{7x\sqrt{7x}}$                |
| <input type="checkbox"/> 9 | $\pm \frac{\frac{7}{2}x-1}{7x\sqrt{7x}}$                      | <input type="checkbox"/> 10 | $\frac{\frac{21}{2}\sqrt{7x+1}\cdot\sqrt{7}}{7x\sqrt{x}}$    | <input type="checkbox"/> 11 | $\pm \frac{\frac{21}{2}x+1}{7x}$ | <input type="checkbox"/> 12           | $\frac{\frac{7}{2}x-1}{7x\sqrt{7x}}$                     |

Fehlerinterpretation:

- |                                       |                                                               |                                                   |
|---------------------------------------|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1            | $\pm \frac{\frac{21}{2}\sqrt{7x+1}\cdot\sqrt{7}}{7x\sqrt{x}}$ | DF: $\pm$ gehört hier nicht hin                   |
| <input type="checkbox"/> 2            | $\pm \frac{\frac{7}{2}x-1}{7x}$                               | DF: $\pm$ gehört hier nicht hin                   |
| <input type="checkbox"/> 3            | $\frac{\frac{7}{2}x-1}{7x}$                                   | RF: Nenner nicht quadriert                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> X | $\frac{\frac{7}{2}\sqrt{7x-1}\cdot\sqrt{7}}{7x\sqrt{x}}$      | richtig                                           |
| <input type="checkbox"/> 5            | $\frac{\frac{21}{2}x+1}{7x\sqrt{7x}}$                         | RF: Konstanter Faktor der Wurzel falsch behandelt |
| <input type="checkbox"/> 6            | $\pm \frac{\frac{7}{2}\sqrt{7x-1}\cdot\sqrt{7}}{7x\sqrt{x}}$  | DF: $\pm$ gehört hier nicht hin                   |
| <input type="checkbox"/> 7            | $\frac{\frac{21}{2}x+1}{7x}$                                  | RF: Nenner nicht quadriert                        |
| <input type="checkbox"/> 8            | $\pm \frac{\frac{21}{2}x+1}{7x\sqrt{7x}}$                     | DF: $\pm$ gehört hier nicht hin                   |
| <input type="checkbox"/> 9            | $\pm \frac{\frac{7}{2}x-1}{7x\sqrt{7x}}$                      | DF: $\pm$ gehört hier nicht hin                   |
| <input type="checkbox"/> 10           | $\frac{\frac{21}{2}\sqrt{7x+1}\cdot\sqrt{7}}{7x\sqrt{x}}$     | RF: Im Zähler nicht subtrahiert                   |
| <input type="checkbox"/> 11           | $\pm \frac{\frac{21}{2}x+1}{7x}$                              | DF: $\pm$ gehört hier nicht hin                   |
| <input type="checkbox"/> 12           | $\frac{\frac{7}{2}x-1}{7x\sqrt{7x}}$                          | RF: Konstanter Faktor der Wurzel falsch behandelt |

MV 04                      Blatt 10                      Kapitel 7.2                      Kettenregel  
keine                      Differenzialrechnung      Nummer: 108 0 200510009      Kl: 14G  
Grad: 20 Zeit: 30      Quelle: keine                      W

**Aufgabe 10.1.9:**

Leiten Sie die Funktion  $f: \mathbb{ID} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = 3 \operatorname{arccot}(4x)$  ab.  $\mathbb{ID} \subset \mathbb{R}$  maximal.

$\operatorname{arccot} x$  ist die Umkehrfunktion von  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$  wobei der Definitionsbereich  $(0, \pi)$  ist.

**Parameter:**

$x_n$  = Faktoren in der Funktion,  $x_n > 1$

Die Funktion lautet:  $f(x) = x_1 \operatorname{arccot}(x_2 x)$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 4$ .

**Erklärung:**

Verwenden Sie die Formel der Ableitung über die Umkehrfunktion:

Sei  $f$  bei  $x_0$  differenzierbar und in einem offenen Intervall um  $x_0$  auch umkehrbar ( $\Rightarrow f'(x_0) \neq 0$ ), dann gilt  $f^{-1}(x)$  ist bei  $y_0 := f(x_0)$  differenzierbar und  $f'(x_0) = \frac{1}{(f^{-1}(y_0))'}$ .

**Rechnung:**

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(f^{-1}(y))' \cdot y} && \text{Formel der Ableitung über die Umkehrfunktion} \\ &= \frac{1}{-1 - \cot^2 y} && \text{mit oben} \\ &= \frac{1}{-1 - \cot^2 \operatorname{arccot} x} && y = \operatorname{arccot} x \\ &= \frac{-1}{1+x^2} && y = \cot(\operatorname{arccot} x) = x \end{aligned}$$

Damit ist  $(3 \operatorname{arccot}(4x))' = \frac{-12}{1+(4x)^2}$ .

**Angeborene Lösungen:**

- |                                       |                        |                             |                                 |                             |                               |                             |                                |
|---------------------------------------|------------------------|-----------------------------|---------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-----------------------------|--------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1            | es gibt keine          | <input type="checkbox"/> 2  | $\frac{-3}{\sqrt{4+(4x)^2}}$    | <input type="checkbox"/> 3  | $\frac{-12}{\sqrt{1+(4x)^2}}$ | <input type="checkbox"/> 4  | $\frac{3}{\sqrt{4+(4x)^2}}$    |
| <input checked="" type="checkbox"/> 5 | $\frac{-12}{1+(4x)^2}$ | <input type="checkbox"/> 6  | $\frac{12}{\sqrt{1+(4x)^2}}$    | <input type="checkbox"/> 7  | $\frac{3}{4+(4x)^2}$          | <input type="checkbox"/> 8  | $12 \operatorname{arctan}(4x)$ |
| <input type="checkbox"/> 9            | $12 \cot(4x)$          | <input type="checkbox"/> 10 | $-12 \operatorname{arctan}(4x)$ | <input type="checkbox"/> 11 | $\frac{-3}{4+(4x)^2}$         | <input type="checkbox"/> 12 | $-12 \cot(4x)$                 |

**Fehlerinterpretation:**

- |                                       |                                 |                    |
|---------------------------------------|---------------------------------|--------------------|
| <input type="checkbox"/> 1            | es gibt keine                   | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 2            | $\frac{-3}{\sqrt{4+(4x)^2}}$    | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 3            | $\frac{-12}{\sqrt{1+(4x)^2}}$   | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 4            | $\frac{3}{\sqrt{4+(4x)^2}}$     | DF: Lösung geraten |
| <input checked="" type="checkbox"/> 5 | $\frac{-12}{1+(4x)^2}$          | richtig            |
| <input type="checkbox"/> 6            | $\frac{12}{\sqrt{1+(4x)^2}}$    | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 7            | $\frac{3}{4+(4x)^2}$            | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 8            | $12 \operatorname{arctan}(4x)$  | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 9            | $12 \cot(4x)$                   | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 10           | $-12 \operatorname{arctan}(4x)$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 11           | $\frac{-3}{4+(4x)^2}$           | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 12           | $-12 \cot(4x)$                  | DF: Lösung geraten |

**Allgemeine Hinweise:**

Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware@yahoo.de).

Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: <http://www.vorkurs.de.vu>