Blatt Nr 10.04

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 10

MV 04	Blatt 10	Kapitel 7.2	Produktregel
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 6 0 200410003	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 10.1.1:

Leiten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $f(x) = 7 \cdot e^{x+5} \cdot \ln(4x) + 3$ ab.

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1$, $x_2 > 2$, $x_3 > 1$, $x_4 > 0$

Die Formel lautet: $f(x) = x_1 \cdot e^{x+x_2} \cdot \ln(x_3\, x) + x_4$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7$ $x_2 = 5$ $x_3 = 4$ $x_4 = 3$.

Erklärung:

Der schwierige Teil der Funktion besteht aus dem Produkt einer $e-$ Funktion mit einer Logarithmusfunktion. Beide Funktionen können so als Produkt oder Summe geschrieben werden, dass die Kettenregel nicht unbedingt benötigt wird.

Die Produktregel lautet: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Rechnung:

Zuerst zerlegen wir die inneren Funktionen:

$$7 \cdot e^{x+5} \cdot \ln(4x) + 3 = 7 \cdot e^5 \cdot e^x \cdot (\ln 4 + \ln x)) + 3 = 7 \cdot e^5 \cdot e^x \cdot \ln x + 7 \cdot e^5 \cdot \ln 4 \cdot e^x + 3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(7 \cdot e^5 \cdot e^x \cdot \ln x + 7 \cdot e^5 \cdot \ln 4 \cdot e^x + 3\right)' \\ &= 7 \cdot e^5 \cdot e^x \cdot \tfrac{1}{x} + 7 \cdot e^5 \cdot e^x \cdot \ln x + 7 \cdot e^5 \cdot \ln 4 \cdot e^x \qquad \text{Produktregel} \\ &= 7 \cdot e^5 \cdot e^x \cdot \left(\tfrac{1}{x} + \ln x + \ln 4\right) \\ &= 7 \cdot e^{x+5} \cdot \left(\tfrac{1}{x} + \ln(4x)\right). \end{aligned}$$

Die Zerlegung ist nicht notwendig. Mit der Anwendung der Kettenregel hätte man ein äquivalentes Ergebnis erhalten. Bitte beachten Sie, dass $(\ln(ax))' = (\ln a + \ln x)' = \frac{1}{x}$ ist.

Angebotene Lösungen:

1 $7 \cdot (e^{x+5} + \frac{1}{x})$	2 $7 \cdot (e^{x+5} + \frac{1}{4x})$	3 $7 \cdot e^{x+5} \cdot \frac{4}{x}$	4 $7 \cdot e^{x+5} \cdot \frac{1}{x}$
☒ $7 \cdot e^{x+5} \cdot (\frac{1}{x} + \ln(4x))$	6 $7 \cdot e^{x+5} \cdot \ln(4x)$	7 $7 \cdot e^{x+4} \cdot (\frac{1}{x} + \ln(4x))$	8 $7 \cdot e^{x+4} \cdot (\frac{4}{x} + \ln(4x))$
9 $7 \cdot (e^{x+5} + \frac{4}{x})$	10 $7 \cdot e^{x+4} \cdot \frac{1}{4x}$	11 $7 \cdot e^{x+4} \cdot \frac{1}{x}$	12 $7 \cdot e^{x+4} \cdot \ln(4x)$

Fehlerinterpretation:

1 $7 \cdot (e^{x+5} + \frac{1}{x})$	DF: Produktregel nicht angewendet
2 $7 \cdot (e^{x+5} + \frac{1}{4x})$	DF: Produktregel nicht angewendet
3 $7 \cdot e^{x+5} \cdot \frac{4}{x}$	DF: Produktregel nicht angewendet
4 $7 \cdot e^{x+5} \cdot \frac{1}{x}$	DF: Produktregel nicht angewendet
☒ $7 \cdot e^{x+5} \cdot (\frac{1}{x} + \ln(4x))$	richtig
6 $7 \cdot e^{x+5} \cdot \ln(4x)$	DF: Funktion nicht differenziert
7 $7 \cdot e^{x+4} \cdot (\frac{1}{x} + \ln(4x))$	DF: $e-$ Fktn falsch differenziert
8 $7 \cdot e^{x+4} \cdot (\frac{4}{x} + \ln(4x))$	DF: Logarithmus und $e-$ Fktn falsch differenziert
9 $7 \cdot (e^{x+5} + \frac{4}{x})$	DF: Produktregel nicht angewendet
10 $7 \cdot e^{x+4} \cdot \frac{1}{4x}$	DF: Produktregel nicht angewendet
11 $7 \cdot e^{x+4} \cdot \frac{1}{x}$	DF: Produktregel nicht angewendet
12 $7 \cdot e^{x+4} \cdot \ln(4x)$	DF: $e-$ Fktn falsch differenziert

MV 04	Blatt 10	Kapitel 7.2	Kettenregel
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 24 0 200410002	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 10.1.2:

Leiten Sie die Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \quad f(x) \quad = \quad 7 \cdot e^{\sqrt[3]{6x+4}}$ ab. ($\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ maximal)

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1, \;\; x_2 > 2, \;\; x_3 > 1, \;\; x_4 > 0$

Die Formel lautet: $f(x) = x_1 \cdot e^{\sqrt[(x_2)]{x_3\, x + x_4}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7 \qquad x_2 = 3 \qquad x_3 = 6 \qquad x_4 = 4$.

Erklärung:

Zerlegen Sie zunächst die Funktion in Ihre einzelnen Verknüpfungen. Hier handelt es sich um eine mehrfach verkettete Funktion. Deshalb muss hier die Kettenregel mehrfach angewendet werden.

Die Formel der iterierten Verkettung lautet: $(f \circ g \circ h)'^{x}(x) = f'^{g}(g(h(x))) \cdot g'^{h}(h(x)) \cdot h'^{x}(x)$.

Wurzelfunktionen werden mit der Potenzregel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ abgeleitet:

$$(\sqrt[n]{x})' \quad = \quad (x^{\frac{1}{n}})' \quad = \quad \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \quad = \quad \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} \quad = \quad \frac{\sqrt[n]{x}}{n \cdot x}$$

Rechnung:

Wir zerlegen zunächst die Funktion in f, g und h.

$$f(g) \quad = \quad e^g \qquad g(h) \quad = \quad \sqrt[3]{h} \qquad h(x) \quad = \quad 6x + 4;$$

abgeleitet ergibt sich :

$$f'^{g}(g) \quad = \quad e^g \qquad g'^{h}(h) \quad = \quad \frac{\sqrt[3]{h}}{3 \cdot h} \qquad h'^{x}(x) \quad = \quad 6.$$

Damit gilt: $$f'^{x}(x) \quad = \quad f'^{g}(g) \cdot g'^{h}(h) \cdot h'^{x}(x) \quad = \quad e^g \cdot \frac{\sqrt[3]{h}}{3 \cdot h} \cdot 6 \quad = \quad 7 \cdot e^{\sqrt[3]{6x+4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{6x+4}}{3 \cdot (6x+4)} \cdot 6$$

$$= \quad \frac{7 \cdot 6 \cdot \sqrt[3]{6x+4} \cdot e^{\sqrt[3]{6x+4}}}{3 \cdot (6x+4)} \quad = \quad 14 \cdot \frac{\sqrt[3]{6x+4} \cdot e^{\sqrt[3]{6x+4}}}{6x+4}$$

Angebotene Lösungen:

[1] $14 \cdot \frac{e^x}{\sqrt[3]{6x+4}}$	[2] $14 \cdot e^{\frac{6x+4}{3}}$	[X] $14 \cdot \frac{\sqrt[3]{6x+4} \cdot e^{\sqrt[3]{6x+4}}}{6x+4}$
[4] $14 \cdot e^{\frac{6x+4}{3}-1}$	[5] $14 \cdot \frac{\sqrt[3]{6x+4} \cdot e^{\sqrt[3]{6x+4}-1}}{6x+4}$	[6] $14 \cdot \frac{e^{\sqrt[3]{6x+4}}}{\sqrt[3]{6x+4}}$
[7] $14 \cdot \frac{e^{x-1}}{\sqrt[3]{6x+4}}$	[8] $14 \cdot e^x \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$	[9] $14 \cdot \frac{e^{\sqrt[3]{6x+4}-1}}{\sqrt[3]{6x+4}}$
[10] $14 \cdot e^{x-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$	[11] $\frac{e^{\sqrt[3]{6x+4}}}{\sqrt[3]{6x+4}}$	[12] $7 \cdot (6x+4) \cdot \sqrt[3]{6x+4} \cdot e^{\sqrt[3]{6x+4}}$

Fehlerinterpretation:

1	$14 \cdot \frac{e^x}{\sqrt[3]{6x+4}}$	DF: Wurzel falsch abgeleitet
2	$14 \cdot e^{\frac{6x+4}{3}}$	DF: $e^{\sqrt{x}} \neq e^{\frac{x}{2}}$
☒	$14 \cdot \frac{\sqrt[3]{6x+4} \cdot e^{\sqrt[3]{6x+4}}}{6x+4}$	richtig
4	$14 \cdot e^{\frac{6x+4}{3}-1}$	DF: $e^{\sqrt{x}} \neq e^{\frac{x}{2}}$
5	$14 \cdot \frac{\sqrt[3]{6x+4} \cdot e^{\sqrt[3]{6x+4}-1}}{6x+4}$	DF: e^x falsch abgeleitet
6	$14 \cdot \frac{e^{\sqrt[3]{6x+4}}}{\sqrt[3]{6x+4}}$	DF: Wurzel falsch abgeleitet
7	$14 \cdot \frac{e^{x-1}}{\sqrt[3]{6x+4}}$	DF: Wurzel falsch abgeleitet
8	$14 \cdot e^x \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$	DF: nicht rücksubstituiert
9	$14 \cdot \frac{e^{\sqrt[3]{6x+4}-1}}{\sqrt[3]{6x+4}}$	DF: Wurzel falsch abgeleitet
10	$14 \cdot e^{x-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$	DF: nicht rücksubstituiert
11	$\frac{e^{\sqrt[3]{6x+4}}}{\sqrt[3]{6x+4}}$	DF: Wurzel falsch abgeleitet
12	$7 \cdot (6x+4) \cdot \sqrt[3]{6x+4} \cdot e^{\sqrt[3]{6x+4}}$	DF: es wurde nicht differenziert

MV 04	Blatt 10	Kapitel 7.2	Produktregel
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 42 0 200410006	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 10.1.3:

Leiten Sie die Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \tan(7x+2) \cdot \arctan_\pi(\sqrt{3x-5})$ ab ($\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ maximal) .

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_n > 1, \quad n = 1, 2, 3, 4.$

Die Formel lautet: $\tan(x_1\, x + x_2) \cdot \arctan_\pi(\sqrt{x_3\, x - x_4})$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = 5.$

Erklärung:

Die Funktion ist ein Produkt mit inneren Verkettungen. Deshalb müssen Produktregel und Kettenregel angewandt werden:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \qquad \text{und} \qquad (f \circ g)'(x) = f'^{g}(g(x)) \cdot g'^{x}(x).$$

Beachten Sie auch, dass $\tan x \cdot \arctan x \neq x$ ist.

Rechnung:

Wir bilden zuerst die Ableitung von $\tan x$.

$$(\tan(x))' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x \cdot \sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\text{Weiter gilt:} \quad (\arctan_\pi(x))' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{und} \quad (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Sei $g_1(x) = 7x + 2$, dann gilt

$$(\tan(7x+2))'^{x} = (\tan(g_1))'^{g_1} \cdot (7x+2)'^{x} = \frac{1}{\cos^2(g_1)} \cdot 7 = \frac{7}{\cos^2(7x+2)}.$$

Sei $g_2(h_2) = \sqrt{h_2}$ und $h_2(x) = 3x - 5$, dann gilt

$$\begin{aligned}(\arctan_\pi(\sqrt{3x-5}))'^{x} &= (\arctan_\pi g_2)'^{g_2} \cdot (\sqrt{h_2})'^{h_2} \cdot (3x-5)'^{x} &&= \tfrac{1}{1+g_2^2} \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{h_2}} \cdot 3 \\ &= \tfrac{3}{1+(\sqrt{h_2})^2} \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{3x-5}} &&= \tfrac{3}{1+3x-5} \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{3x-5}}.\end{aligned}$$

Mit der Produktregel ergibt sich:

$$\begin{aligned}(\tan(7x+2)\cdot \arctan_\pi(\sqrt{3x-5}))' &= \tfrac{7}{\cos^2(7x+2)}\cdot \arctan_\pi(\sqrt{3x-5}) &+& \tan(7x+2)\cdot \tfrac{3}{1+3x-5}\cdot \tfrac{1}{2\sqrt{3x-5}}\\ &= \tfrac{7\arctan_\pi(\sqrt{3x-5})}{\cos^2(7x+2)} &+& \tfrac{3\tan(7x+2)}{(6x-8)\sqrt{3x-5}}.\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

☒	$\frac{7\arctan_\pi(\sqrt{3x-5})}{\cos^2(7x+2)}+\frac{3\tan(7x+2)}{(6x-8)\sqrt{3x-5}}$	2	f ist nicht differenzierbar
3	$7\sqrt{3x-5}+\frac{\frac{21}{2}x+3}{\sqrt{3x-5}}$	4	$\frac{7}{\cos^2(7x+2)}\cdot\frac{-3}{2\sin^2(\sqrt{3x-5})\cdot\sqrt{3x-5}}$
5	$7\arctan(7x+2)\cdot\frac{\tan(\sqrt{3x-5})}{6\sqrt{3x-5}}$	6	$\frac{7\arctan_\pi(\sqrt{3x-5})}{\cos^2(7x+2)}+\frac{-3\tan(7x+2)}{2\sin^2(\sqrt{3x-5})\cdot\sqrt{3x-5}}$
7	$\frac{7}{2\cos^2(7x+2)}\cdot\frac{3}{2(3x-5)^2}$	8	$7\arctan(7x+2)\cdot\arctan_\pi(\sqrt{3x-5})+\frac{\tan(7x+2)\cdot\tan(\sqrt{3x-5})}{6\sqrt{3x-5}}$
9	$\frac{7}{2\sqrt{3x-5}}$	10	$\frac{7}{\cos^2(7x+2)}\cdot\frac{3}{(6x-8)\sqrt{3x-5}}$
11	$(7x+2)\cdot(\sqrt{3x-5})$	12	$\frac{7\arctan_\pi(3x-5)}{2\cos^2(7x+2)}+\frac{3\tan(7x+2)}{2(3x-5)^2}$

Fehlerinterpretation:

☒	$\frac{7\arctan_\pi(\sqrt{3x-5})}{\cos^2(7x+2)}+\frac{3\tan(7x+2)}{(6x-8)\sqrt{3x-5}}$	richtig
2	f ist nicht differenzierbar	DF: Lösung geraten
3	$7\sqrt{3x-5}+\frac{\frac{21}{2}x+3}{\sqrt{3x-5}}$	DF: $\tan x\cdot\arctan x\neq x$
4	$\frac{7}{\cos^2(7x+2)}\cdot\frac{-3}{2\sin^2(\sqrt{3x-5})\cdot\sqrt{3x-5}}$	DF: $\arctan x\neq\frac{1}{\tan x}$
5	$7\arctan(7x+2)\cdot\frac{\tan(\sqrt{3x-5})}{6\sqrt{3x-5}}$	DF: $(\arctan x)'\neq\tan x$
6	$\frac{7\arctan_\pi(\sqrt{3x-5})}{\cos^2(7x+2)}+\frac{-3\tan(7x+2)}{2\sin^2(\sqrt{3x-5})\cdot\sqrt{3x-5}}$	DF: $\arctan x\neq\frac{1}{\tan x}$
7	$\frac{7}{2\cos^2(7x+2)}\cdot\frac{3}{2(3x-5)^2}$	DF: $\arctan\sqrt{x}\neq\frac{1}{2}\arctan x$
8	$7\arctan(7x+2)\cdot\arctan_\pi(\sqrt{3x-5})+\frac{\tan(7x+2)\cdot\tan(\sqrt{3x-5})}{6\sqrt{3x-5}}$	DF: $(\arctan x)'\neq\tan x$
9	$\frac{7}{2\sqrt{3x-5}}$	DF: $\tan x\cdot\arctan x\neq x$
10	$\frac{7}{\cos^2(7x+2)}\cdot\frac{3}{(6x-8)\sqrt{3x-5}}$	DF: Produktregel falsch
11	$(7x+2)\cdot(\sqrt{3x-5})$	DF: tan und arctan weggelassen
12	$\frac{7\arctan_\pi(3x-5)}{2\cos^2(7x+2)}+\frac{3\tan(7x+2)}{2(3x-5)^2}$	DF: $\arctan\sqrt{x}\neq\frac{1}{2}\arctan x$

MV 04	Blatt 10	Kapitel 7.2	Produktregel
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 49 0 200410005	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 10.1.4:

Leiten Sie die Funktion $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\quad f(x) = \frac{4x+4}{\sqrt{2x}}$ ab.

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_n>1,\ \ n=1,2,3.$

Die Formel lautet: $f(x)=\frac{x_1\,x+x_2}{\sqrt{x_3\,x}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=4 \quad x_2=4 \quad x_3=2.$

Erklärung:

Die Funktion ist ein Quotient. Damit muss die Quotientenregel angewendet werden.

$$(\frac{f}{g})'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Rechnung:

$$g'(x) = (\sqrt{2x})' = (\sqrt{2}\cdot\sqrt{x})' = \sqrt{2}\cdot(x^{\frac{1}{2}})' = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4x}}.$$

Damit gilt:

$$\left(\frac{4x+4}{\sqrt{2x}}\right)' = \frac{4\cdot\sqrt{2x}-(4x+4)\cdot\sqrt{\frac{2}{4x}}}{(\sqrt{2x})^2} = \frac{4\cdot\sqrt{2}\cdot x-\frac{1}{2}(4x+4)\cdot\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}} = \frac{\frac{4}{2}\sqrt{2}x-\frac{4}{2}\cdot\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}$$

Angebotene Lösungen:

☒ $\frac{2\sqrt{2}x-2\cdot\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}$	2 $\pm\frac{6\sqrt{2}x+2\cdot\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}$	3 $\pm\frac{6x+2}{2x}$	4 $\frac{6x+2}{2x}$
5 $\pm\frac{2\sqrt{2}x-2\cdot\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}$	6 $\pm\frac{2x-2}{2x}$	7 $\frac{6x+2}{2x\sqrt{2x}}$	8 $\frac{6\sqrt{2}x+2\cdot\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}$
9 $\frac{2x-2}{2x\sqrt{2x}}$	10 $\pm\frac{6x+2}{2x\sqrt{2x}}$	11 $\frac{2x-2}{2x}$	12 $\pm\frac{2x-2}{2x\sqrt{2x}}$

Fehlerinterpretation:

☒	$\frac{2\sqrt{2}x-2\cdot\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}$	richtig
2	$\pm\frac{6\sqrt{2}x+2\cdot\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}$	DF: $\pm$ gehört hier nicht hin
3	$\pm\frac{6x+2}{2x}$	DF: $\pm$ gehört hier nicht hin
4	$\frac{6x+2}{2x}$	RF: Nenner nicht quadriert
5	$\pm\frac{2\sqrt{2}x-2\cdot\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}$	DF: $\pm$ gehört hier nicht hin
6	$\pm\frac{2x-2}{2x}$	DF: $\pm$ gehört hier nicht hin
7	$\frac{6x+2}{2x\sqrt{2x}}$	RF: Konstanter Faktor der Wurzel falsch behandelt
8	$\frac{6\sqrt{2}x+2\cdot\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}$	RF: Im Zähler nicht subtrahiert
9	$\frac{2x-2}{2x\sqrt{2x}}$	RF: Konstanter Faktor der Wurzel falsch behandelt
10	$\pm\frac{6x+2}{2x\sqrt{2x}}$	DF: $\pm$ gehört hier nicht hin
11	$\frac{2x-2}{2x}$	RF: Nenner nicht quadriert
12	$\pm\frac{2x-2}{2x\sqrt{2x}}$	DF: $\pm$ gehört hier nicht hin

MV 04	Blatt 10	Kapitel 7.2	Produktregel
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 61 0 200410004	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 10.1.5:

Leiten Sie die Funktion $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ $f(x) = 4 \cdot \arccos x \cdot (4x^2-4) \cdot \cos x$ für $x\in(-1,1)$ ab.

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1, 2$.

Die Formel lautet: $f(x) = x_1 \cdot \arccos x \cdot (x_2\, x^2 - x_2) \cdot \cos x$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4$ $x_2 = 4$.

Erklärung:

Die Funktion ist ein Produkt bestehend aus drei Faktoren. Deshalb muss hier die Produktregel iteriert angewandt werden.

Die iterierte Produktregel lautet: $(f\cdot g\cdot h)'(x) = f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)$.

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir die einzelnen Faktoren (f_i):

$$f_1' := (\arccos x)' = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} \qquad f_2' := (4x^2-4)' = 8x \qquad f_3' := (\cos x)' = -\sin x.$$

Damit gilt für die Ableiung von $f(x)$:

$$\begin{aligned} f_1\cdot f_2\cdot f_3 &= f_1'\cdot f_2\cdot f_3 &&+ f_1\cdot f_2'\cdot f_3 &&+ f_1\cdot f_2\cdot f_3' \\ &= \tfrac{1}{-\sqrt{1-x^2}}\cdot(4x^2-4)\cdot\cos x &&+ \arccos x\cdot(8x)\cdot\cos x &&+ \arccos x\cdot(4x^2-4)\cdot(-\sin x). \end{aligned}$$

$$\text{Damit gilt} \quad f'(x) \quad = \quad 4(4\sqrt{1-x^2}\cos x + (8x\cdot\cos x - (4x^2-4)\cdot\sin x)\cdot \arccos x).$$

Angebotene Lösungen:

- [1] $32x+4$
- [2] $\frac{4}{\sqrt{1-x^2}} + 32x + 4\sin x$
- [3] $-\arcsin x \cdot (16x^2-16)\cdot\cos x + (32x\cdot\cos x + (16x^2-16)\cdot\sin x)\cdot\arccos x$
- [4] $\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\cdot 8x\cdot\sin x$
- [5] $-\arcsin x\cdot 32x\cdot\sin x$
- [6] $-16\cot x + (32x\cdot\cos x + (16x^2-16)\cdot\sin x)\cdot\arccos x$
- [7] $-4\arcsin x + 32x + 4\sin x$
- [X] $16\sqrt{1-x^2}\cos x + (32x\cdot\cos x - (16x^2-16)\cdot\sin x)\cdot\arccos x$
- [9] $\frac{-4}{\sqrt{1-x^2}}\cdot 8x\cdot\cos x - 16\sqrt{1-x^2}\cdot\sin x - \arccos x\cdot 32x\cdot\sin x$
- [10] $-\arcsin x\cdot 32x\cdot\cos x + \arcsin x\cdot(16x^2-16)\cdot\sin x - \arccos x\cdot 32x\cdot\sin x$
- [11] $48x^2+8x$
- [12] f ist auf $(-1,1)$ nicht differenzierbar

Fehlerinterpretation:

[1]	$32x+4$	DF: $\arccos x\cdot\cos x \neq x$
[2]	$\frac{4}{\sqrt{1-x^2}} + 32x + 4\sin x$	DF: PR falsch
[3]	$-\arcsin x \cdot (16x^2-16)\cdot\cos x + (32x\cdot\cos x + (16x^2-16)\cdot\sin x)\cdot\arccos x$	DF: $(\arccos x)' \neq \arcsin x$
[4]	$\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\cdot 8x\cdot\sin x$	DF: PR falsch
[5]	$-\arcsin x\cdot 32x\cdot\sin x$	DF: PR falsch
[6]	$-16\cot x + (32x\cdot\cos x + (16x^2-16)\cdot\sin x)\cdot\arccos x$	DF: $(\arccos x)' \neq \frac{-1}{\sin x}$
[7]	$-4\arcsin x + 32x + 4\sin x$	DF: PR falsch
[X]	$16\sqrt{1-x^2}\cos x + (32x\cdot\cos x - (16x^2-16)\cdot\sin x)\cdot\arccos x$	richtig
[9]	$\frac{-4}{\sqrt{1-x^2}}\cdot 8x\cdot\cos x - 16\sqrt{1-x^2}\cdot\sin x - \arccos x\cdot 32x\cdot\sin x$	DF: PR falsch
[10]	$-\arcsin x\cdot 32x\cdot\cos x + \arcsin x\cdot(16x^2-16)\cdot\sin x - \arccos x\cdot 32x\cdot\sin x$	DF: PR falsch
[11]	$48x^2+8x$	DF: $\arccos x\cdot\cos x \neq x$
[12]	f ist auf $(-1,1)$ nicht differenzierbar	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 10	Kapitel 7.2	Kettenregel
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 82 0 200510009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 10.1.6:

$$\text{Leiten Sie die Funktion} \quad f:\mathbb{D}\to\mathbb{R} \quad f(x) \quad = \quad 5\,\text{arccot}\,(3x) \text{ ab. } \mathbb{D}\subset\mathbb{R} \text{ maximal.}$$

$\text{arccot}\,x$ ist die Umkehrfunktion von $\cot x \;=\; \frac{\cos x}{\sin x}$ wobei der Definitionsbereich $(0,\pi)$ ist.

Parameter:

x_n = Faktoren in der Funktion, $x_n > 1$

Die Funktion lautet: $f(x) \;=\; x_1\,\text{arccot}\,(x_2\,x)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5, \quad x_2 = 3$.

Erklärung:

Verwenden Sie die Formel der Ableitung über die Umkehrfunktion:
Sei f bei x_0 differenzierbar und in einem offenen Intervall um x_0 auch umkehrbar ($\Rightarrow f'(x_0)\neq 0$), dann gilt $f^{-1}(x)$ ist bei $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und $f'(x_0) \;=\; \frac{1}{(f^{-1}(y_0))'\,y}$.

Rechnung:

$(\cot x)' \;=\; (\frac{\cos x}{\sin x})' \;=\; \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \;=\; -1-\cot^2 x$

$$\begin{array}{rcll} f'(x) & = & \frac{1}{(f^{-1}(y))'\,y} & \text{Formel der Ableitung über die Umkehrfunktion} \\ & = & \frac{1}{-1-\cot^2 y} & \text{mit oben} \\ & = & \frac{1}{-1-\cot^2 \operatorname{arccot}\, x} & y = \operatorname{arccot}\, x \\ & = & \frac{-1}{1+x^2} & y = \cot(\operatorname{arccot}\, x) \;=\; x \end{array}$$

Damit ist $(5\operatorname{arccot}\,(3x))' \;=\; \frac{-15}{1+(3\,x)^2}$.

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{-15}{\sqrt{1+(3\,x)^2}}$	2 es gibt keine	3 $\frac{5}{\sqrt{3+(3\,x)^2}}$	4 $15\cot(3\,x)$
5 $15\arctan(3\,x)$	6 $\frac{-5}{3+(3\,x)^2}$	7 $\frac{15}{\sqrt{1+(3\,x)^2}}$	8 $-15\cot(3\,x)$
9 $\frac{-5}{\sqrt{3+(3\,x)^2}}$	10 $\frac{5}{3+(3\,x)^2}$	☒ $\frac{-15}{1+(3\,x)^2}$	12 $-15\arctan(3\,x)$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{-15}{\sqrt{1+(3\,x)^2}}$	DF: Lösung geraten
2	es gibt keine	DF: Lösung geraten
3	$\frac{5}{\sqrt{3+(3\,x)^2}}$	DF: Lösung geraten
4	$15\cot(3\,x)$	DF: Lösung geraten
5	$15\arctan(3\,x)$	DF: Lösung geraten
6	$\frac{-5}{3+(3\,x)^2}$	DF: Lösung geraten
7	$\frac{15}{\sqrt{1+(3\,x)^2}}$	DF: Lösung geraten
8	$-15\cot(3\,x)$	DF: Lösung geraten
9	$\frac{-5}{\sqrt{3+(3\,x)^2}}$	DF: Lösung geraten
10	$\frac{5}{3+(3\,x)^2}$	DF: Lösung geraten
☒	$\frac{-15}{1+(3\,x)^2}$	richtig
12	$-15\arctan(3\,x)$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 10	Kapitel 7.2	Produktregel
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 96 0 200410007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 10.1.7:

Leiten Sie die Funktion $\quad f:(0,1)\to\mathbb{R} \quad f(x) \;=\; \ln(5x{+}3)\cdot\arcsin\,(\sin(2x{-}4))$ ab.

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_n > 1$, $\;n = 1,2,3,4$.

Die Formel lautet: $\ln(x_1\,x + x_2)\cdot\arcsin\,(\sin(x_3\,x - x_4))$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = 4$.

Erklärung:

Zuerst können Sie sin und arcsin zusammenfassen.
Zum Berechnen der Ableitung verwenden Sie die Produktregel und die Kettenregel:

$$(f\cdot g)'(x) \;=\; f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \qquad \text{und} \qquad (f\circ g)'(x) \;=\; f'^{\,g}(g(x))\cdot g'^{\,x}(x).$$

Rechnung:

$\arcsin\,(\sin x) = x$. Damit gilt $f(x) = \ln(5x+3)\cdot(2x-4)$. Mit $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ gilt $(\ln(5x+3))' = \frac{5}{5x+3}$.

$$\text{Damit ist} \qquad f'(x) \;=\; \frac{5}{5x+3}\cdot(2x-4) + 2\ln(5x+3) \;=\; \frac{10x-20}{5x+3} + 2\ln(5x+3).$$

Angebotene Lösungen:

1 $10\sqrt{\frac{2x-4}{5x+3}}$	2 $\frac{5x+3}{\sqrt{2x-5}} + 5\ln(5x+3)$	3 $\ln\frac{2x-4}{5x+3}$	4 $\frac{5x+3}{2x-4}\cdot\ln(5x+3)$
5 $\sin(\frac{5x+3}{2x-4}) + \ln(5x+3)$	6 $\frac{10}{5x+3}$	7 $10\sin\frac{2x-4}{5x+3}$	☒ $\frac{10x-20}{5x+3} + 2\ln(5x+3)$
9 $\sin\frac{2x-4}{5x+3}$	10 $\sin(\ln(\frac{5x+3}{2x-4}))$	11 $\sqrt{\frac{2x-4}{5x+3}}$	12 $10\ln\frac{2x-4}{5x+3}$

Fehlerinterpretation:

1 $10\sqrt{\frac{2x-4}{5x+3}}$	DF: Geratene Lösung
2 $\frac{5x+3}{\sqrt{2x-5}} + 5\ln(5x+3)$	DF: Geratene Lösung
3 $\ln\frac{2x-4}{5x+3}$	DF: Geratene Lösung
4 $\frac{5x+3}{2x-4}\cdot\ln(5x+3)$	DF: Geratene Lösung
5 $\sin(\frac{5x+3}{2x-4}) + \ln(5x+3)$	DF: Geratene Lösung
6 $\frac{10}{5x+3}$	DF: Produktregel falsch
7 $10\sin\frac{2x-4}{5x+3}$	DF: Geratene Lösung
☒ $\frac{10x-20}{5x+3} + 2\ln(5x+3)$	richtig
9 $\sin\frac{2x-4}{5x+3}$	DF: Geratene Lösung
10 $\sin(\ln(\frac{5x+3}{2x-4}))$	DF: Geratene Lösung
11 $\sqrt{\frac{2x-4}{5x+3}}$	DF: Geratene Lösung
12 $10\ln\frac{2x-4}{5x+3}$	DF: Geratene Lösung

MV 04	Blatt 10	Kapitel 7.2	Kettenregel
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 97 0 200510008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 10.1.8:

$$\text{Leiten Sie die Funktion} \qquad f:(0,\frac{1}{5})\to\mathbb{R} \qquad f(x) \;=\; \cos(3\,\ln(4\,\arccos\,(5\,x)))\ \text{ab.}$$

Beim arccos x soll der Wertebereich $(0,\frac{\pi}{2})$ sein.

Parameter:

x_n = Faktoren in der Funktion, $x_n > 1$

Die Funktion lautet: $f(x) \;=\; \cos(x_1\,\ln(x_2\arccos\,(x_3\,x)))$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$.

Erklärung:

Die Funktion ist dreifach verkettet. Leiten Sie die einzelnen Funktionen ab und multiplizieren Sie die Ergebnisse nach der Kettenregel.

Rechnung:

$$\begin{array}{llll} \text{Sei} & h(x) = \arccos\,(5x), & g(h) = \ln(4h) \quad \text{und} & f(g) = \cos(3g), \qquad \text{dann gilt:} \\ & h'(x) = \frac{-5}{\sqrt{1-(5x)^2}}, & g'(h) = \frac{4}{4h} \quad \text{und} & f'(g) = -3\sin(3g). \end{array}$$

Ableitungen sind hier die Ableitungen nach den einzelnen Variablen. Nach der Kettenregel multipliziert ergibt sich:

$$\begin{array}{rcllll} f'(x) & = & h'(x) & \cdot\ g'(h) & \cdot & f'(g) \\ & = & \frac{-5}{\sqrt{1-(5x)^2}} & \cdot\ \frac{4}{4h} & \cdot & -3\sin(3g) \\ & = & \frac{-5}{\sqrt{1-(5x)^2}} & \cdot\ \frac{1}{\arccos\,(5x)} & \cdot & -3\sin(3\ln(4h)) \\ & = & \multicolumn{2}{l}{\frac{-5}{\sqrt{1-(5x)^2}\cdot\arccos\,(5x)}} & \cdot & -3\sin(3\ln(4\,\arccos\,(5\,x))) \\ & = & \multicolumn{4}{l}{\frac{15\sin(3\ln(4\,\arccos\,(5\,x)))}{\sqrt{1-(5x)^2}\cdot\arccos\,(5\,x)}} \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

$\boxed{1}$ $\frac{60\sin(3\ln(4\arccos(5x)))}{\sqrt{1-(5x)^2}\cdot\arccos(5x)}$	$\boxed{2}$ $\arccos(5x)\cdot\ln(4x)\cdot\cos(3x)$	$\boxed{3}$ es gibt keine
$\boxed{4}$ $\frac{180\sin(\ln(\arccos(x)))}{\sqrt{1-(5x)^2}\cdot\arccos(x)}$	$\boxed{5}$ $60\arccos x\cdot\ln x\cdot\cos x$	$\boxed{6}$ $\frac{900\sin(\ln(\arccos(x)))}{\sqrt{1-(5x)^2}\cdot\arccos(5x)}$
$\boxed{7}$ $\frac{36\sin(\ln(\arccos(x)))}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos(x)}$	$\boxed{8}$ $\frac{15\sin(3\ln(4x))}{\sqrt{1-(5x)^2}}$	$\boxed{9}$ $\frac{60}{x}$
$\boxtimes$ $\frac{15\sin(3\ln(4\arccos(5x)))}{\sqrt{1-(5x)^2}\cdot\arccos(5x)}$	$\boxed{11}$ $\frac{15}{x}$	$\boxed{12}$ $\frac{15}{4x}$

Fehlerinterpretation:

$\boxed{1}$ $\frac{60\sin(3\ln(4\arccos(5x)))}{\sqrt{1-(5x)^2}\cdot\arccos(5x)}$	DF: Faktor 4 zuviel
$\boxed{2}$ $\arccos(5x)\cdot\ln(4x)\cdot\cos(3x)$	DF: Lösung geraten
$\boxed{3}$ es gibt keine	DF: Lösung geraten
$\boxed{4}$ $\frac{180\sin(\ln(\arccos(x)))}{\sqrt{1-(5x)^2}\cdot\arccos(x)}$	DF: Funktionen sind nicht linear
$\boxed{5}$ $60\arccos x\cdot\ln x\cdot\cos x$	DF: Lösung geraten
$\boxed{6}$ $\frac{900\sin(\ln(\arccos(x)))}{\sqrt{1-(5x)^2}\cdot\arccos(5x)}$	DF: Funktionen sind nicht linear
$\boxed{7}$ $\frac{36\sin(\ln(\arccos(x)))}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos(x)}$	DF: Funktionen sind nicht linear
$\boxed{8}$ $\frac{15\sin(3\ln(4x))}{\sqrt{1-(5x)^2}}$	DF: Funktionen sind nicht linear
$\boxed{9}$ $\frac{60}{x}$	DF: $\cos(\ln(\arccos x))\neq\ln x$
$\boxtimes$ $\frac{15\sin(3\ln(4\arccos(5x)))}{\sqrt{1-(5x)^2}\cdot\arccos(5x)}$	richtig
$\boxed{11}$ $\frac{15}{x}$	DF: $\cos(\ln(\arccos x))\neq\ln x$
$\boxed{12}$ $\frac{15}{4x}$	DF: $\cos(\ln(\arccos x))\neq\ln x$

MV 04	Blatt 10	Kapitel 7.2	Kettenregel
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 108 0 200410001	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 10.1.9: Leiten Sie die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=4\sin(6x+2)+3$ ab.

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_n>1$ $n=1..4$

Die Formel lautet: $f(x)=x_1\sin(x_2x+x_3)+x_4$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=4$ $x_2=6$ $x_3=2$ $x_4=3$.

Erklärung:

Zerlegen Sie zunächst die Funktion in Ihre einzelnen Verknüpfungen. Dabei stellt nur die Sinusfunktion ein Problem dar, weil sie eine innere Funktion besitzt.

$$\text{Wenden Sie dabei die Kettenregel} \quad (f\circ g)'^x(x_0)=f'^g(g(x_0))\cdot g'^x(x_0) \quad \text{an .}$$

Rechnung:

Wir zerlegen zunächst die Sinusfunktion. Dabei definieren wir $f_1(x)=\sin(6x+2)$ und $g(x)=6x+2$. Damit ist $f_1(g)=\sin g$. Nach der Kettenregel gilt

$$(f_1(x))'^x = (\sin(6x+2))'^x = (\sin g)'^g\cdot(6x+2)'^x = \cos g\cdot 6 = 6\cdot\cos(6x+2)$$

Nach den Regeln der Ableitung konstanter Summanden und Faktoren gilt also
$(4\sin(6x+2)+3)'^x = 4\cdot 6\cdot\cos(6x+2) = 24\cdot\cos(6x+2)$.

Angebotene Lösungen:

$\boxed{1}$ $4\cdot\sin 6$	$\boxtimes$ $24\cdot\cos(6x+2)$	$\boxed{3}$ $4\cdot(6x+2)\cdot\sin(6x+2)$
$\boxed{4}$ $\cos(6x+2)$	$\boxed{5}$ $4\cdot\sin(6)+3$	$\boxed{6}$ $4\cdot\cos(6x+2)+3$
$\boxed{7}$ $\sin(6x+2)$	$\boxed{8}$ $\cos 6$	$\boxed{9}$ $4\cdot\cos(6x+2)$
$\boxed{10}$ $4\cdot(6x+2)\cdot\cos(6x+2)$	$\boxed{11}$ $4\cdot\cos 6$	$\boxed{12}$ $24\cdot\cos(6x+2)+3$

Fehlerinterpretation:

1	$4 \cdot \sin 6$	DF: Innere Funktion abgeleitet
☒	$24 \cdot \cos(6x + 2)$	richtig
3	$4 \cdot (6x + 2) \cdot \sin(6x + 2)$	DF: Innere Ableitung vergessen
4	$\cos(6x + 2)$	DF: Innere Ableitung vergessen
5	$4 \cdot \sin(6) + 3$	DF: Innere Funktion abgeleitet
6	$4 \cdot \cos(6x + 2) + 3$	DF: Innere Ableitung vergessen
7	$\sin(6x + 2)$	DF: Innere Funktion abgeleitet
8	$\cos 6$	DF: Innere Funktion abgeleitet
9	$4 \cdot \cos(6x + 2)$	DF: Innere Ableitung vergessen
10	$4 \cdot (6x + 2) \cdot \cos(6x + 2)$	DF: Innere Ableitung vergessen
11	$4 \cdot \cos 6$	DF: Innere Funktion abgeleitet
12	$24 \cdot \cos(6x + 2) + 3$	RF: Konstanter Summand nicht abgeleitet

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu