Blatt Nr 11.00

**Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 11**

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 11 | Kapitel 7.4 | Taylorreihen |
| keine | Differenzialrechnung | Nummer: 7 0 2004110002 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 11.1.1:** Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 5(7x+6)^3$ in eine Taylorreihe (um 0).

**Parameter:**

$x_n$ = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1, \;\; x_2 > 1, \;\; x_3 > 0.$

Die Formel lautet: $x_1(x_2\, x + x_3)^3$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \qquad x_2 = 7 \qquad x_3 = 6.$

**Erklärung:**

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

**Rechnung:**

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lclclcl}
f'(x) & = & (5(7x+6)^3)' & = & 105(7x+6)^2 & \Rightarrow & f'(0) = 3780 \\
f''(x) & = & (105(7x+6)^2)' & = & 1470(7x+6) & \Rightarrow & f''(0) = 8820 \\
f'''(x) & = & (1470(7x+6))' & = & 10290 & & \\
f''''(x) & \equiv & 0 & = & f^{(n)}(x) \;\; n \geq 4 & &
\end{array}$$

Die Taylorreihe bricht ab, die Funktion ist also ein Polynom. Damit ist

$$a_0 = f(0) = 1080, \quad a_1 = f'(0) = 3780, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{8820}{2}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{10290}{6}.$$

Die Taylorreihe ist das Polynom: $1080 + 3780\,x + 4410\,x^2 + 1715\,x^3$.

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man die Funktion mit der binomischen Formel ausmultipliziert hätte:

$$5(7x+6)^3 = 5((7x)^3 + 3(7x)^2 \cdot 6 + 3 \cdot 7x \cdot 6^2 + 6^3)$$

**Angebotene Lösungen:**

- [ ] 1 $\frac{5(7x+6)^4}{1-x}$
- [ ] 2 $\sum_{i=0}^{\infty}(5(7x+6))^i$
- [ ] 3 $10290 + 8820x + 3780x^2 + 1080x^3$
- [ ] 4 Es gibt keine
- [x] 5 $1080 + 3780x + 4410x^2 + 1715x^3$
- [ ] 6 $\frac{12005x^4+6480}{6-7x}$
- [ ] 7 $5\sum_{i=0}^{3}(7x+6)^i$
- [ ] 8 $1715 + 4410x + 3780x^2 + 1080x^3$
- [ ] 9 $\sum_{i=0}^{3}(5(7x+6))^i$
- [ ] 10 $\frac{12005x^4+6480}{1-x}$
- [ ] 11 $5\sum_{i=0}^{\infty}(7x+6)^i$
- [ ] 12 $\frac{5(7x+6)^4}{6-7x}$

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{5(7x+6)^4}{1-x}$ | DF: Lösung geraten |
| 2 | $\sum_{i=0}^{\infty}(5(7x+6))^i$ | DF: Lösung geraten |
| 3 | $10290 + 8820x + 3780x^2 + 1080x^3$ | RF: Koeffizienten falsch verteilt |
| 4 | Es gibt keine | DF: Doch |
| ☒ | $1080 + 3780x + 4410x^2 + 1715x^3$ | richtig |
| 6 | $\frac{12005x^4+6480}{6-7x}$ | DF: Lösung geraten |
| 7 | $5\sum_{i=0}^{3}(7x+6)^i$ | DF: Lösung geraten |
| 8 | $1715 + 4410x + 3780x^2 + 1080x^3$ | RF: Koeffizienten falsch verteilt |
| 9 | $\sum_{i=0}^{3}(5(7x+6))^i$ | DF: Lösung geraten |
| 10 | $\frac{12005x^4+6480}{1-x}$ | DF: Lösung geraten |
| 11 | $5\sum_{i=0}^{\infty}(7x+6)^i$ | DF: Lösung geraten |
| 12 | $\frac{5(7x+6)^4}{6-7x}$ | DF: Lösung geraten |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 11 | Kapitel 7.4 | Taylorreihen |
| keine | Differenzialrechnung | Nummer: 20 0 2004110003 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 11.1.2:** Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 2 + 5x + e^{6x}$ in eine Taylorreihe (um 0).

**Parameter:**

$x_n$ = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 0, \;\; x_2 > 1, \;\; x_3 > 1$.

Die Formel lautet: $x_1 + x_2\,x + e^{x_3\,x}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \qquad x_2 = 5 \qquad x_3 = 6$.

**Erklärung:**

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).
Das Polynom vor der $e-$ Funktion wird einfach zu den ersten Koeffizienten der Taylorreihe addiert.
Die Ableitung von $e^{ax}$ ist $a \cdot e^{ax}$.

**Rechnung:**

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lclclcl}
f(x) & = & 2+5x+e^{6x} & & & \Rightarrow & f(0) = 2+1=3 \\
f'(x) & = & (2+5x+e^{6x})' & = & 5+6\cdot e^{6x} & \Rightarrow & f'(0) = 11 \\
f''(x) & = & (5+6\cdot e^{6x})' & = & 36\cdot e^{6x} & \Rightarrow & f''(0) = 36 \\
f^{(n)}(x) & = & 6^n \cdot e^{6x} & & \text{für } n \geq 2 & \Rightarrow & \\
 & & & & & & f^{(n)}(0) = 6^n
\end{array}$$

Damit gilt für $n \geq 2$:

$$a_0 = f(0) = 3, \quad a_1 = f'(0) = 11, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{36}{2}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{6^n}{n!}.$$

$$\text{Die Taylorreihe ist} \qquad 3 + 11\,x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n}{n!} \cdot x^n \;.$$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man $6x = w$ substituiert hätte:

$$2+5x+e^w = 2+5x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = 2+5x+1+w + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(6x)^n}{n!} = 3+11x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n}{n!} \cdot x^n$$

**Angebotene Lösungen:**

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{1}$ $\sum_{n=0}^{\infty} 6\cdot(2+5x)+\frac{1}{n!}\cdot x^n$ | $\boxed{2}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\cdot x^n$ | $\boxed{3}$ $3+11x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\cdot 6\cdot x^n$ |
| $\boxed{4}$ $6\cdot(2+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n}{n!}\cdot x^n)$ | $\boxed{5}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{n!}\cdot x^n$ | $\boxtimes$ $3+11x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n}{n!}\cdot x^n$ |
| $\boxed{7}$ Es gibt keine | $\boxed{8}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}6\cdot x^n$ | $\boxed{9}$ $\sum_{n=0}^{\infty}(2+5x)+\frac{6^n}{n!}\cdot x^n$ |
| $\boxed{10}$ $\sum_{n=0}^{\infty}(2+5x)+\frac{1}{n!}\cdot x^n$ | $\boxed{11}$ $6\cdot(2+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\cdot x^n)$ | $\boxed{12}$ $2+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n}{n!}\cdot x^n$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | |
|---|---|
| $\boxed{1}$ $\sum_{n=0}^{\infty} 6\cdot(2+5x)+\frac{1}{n!}\cdot x^n$ | DF: Lösung geraten |
| $\boxed{2}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\cdot x^n$ | DF: Reihenentwicklung der $e-$ Funktion |
| $\boxed{3}$ $3+11x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\cdot 6\cdot x^n$ | DF: Substitution falsch |
| $\boxed{4}$ $6\cdot(2+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n}{n!}\cdot x^n)$ | DF: Lösung geraten |
| $\boxed{5}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{n!}\cdot x^n$ | RF: Polynom am Anfang vergessen |
| $\boxtimes$ $3+11x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n}{n!}\cdot x^n$ | richtig |
| $\boxed{7}$ Es gibt keine | DF: Doch |
| $\boxed{8}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}6\cdot x^n$ | RF: Polynom am Anfang vergessen |
| $\boxed{9}$ $\sum_{n=0}^{\infty}(2+5x)+\frac{6^n}{n!}\cdot x^n$ | DF: Lösung geraten |
| $\boxed{10}$ $\sum_{n=0}^{\infty}(2+5x)+\frac{1}{n!}\cdot x^n$ | DF: Lösung geraten |
| $\boxed{11}$ $6\cdot(2+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\cdot x^n)$ | DF: Lösung geraten |
| $\boxed{12}$ $2+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n}{n!}\cdot x^n$ | DF: Polynom nur abgeschrieben |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 11 | Kapitel 7.4 | Taylorreihen |
| keine | Differenzialrechnung | Nummer: 69 0 2004110004 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 11.1.3:** Entwickeln Sie die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=5x\cdot e^{-7x}$ in eine Taylorreihe (um 0).

**Parameter:**

$x_n$ = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1>1,\;\; x_2>1, x_1\neq x_2$.

Die Formel lautet: $x_1\,x\cdot e^{-x_2\,x}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=5 \qquad x_2=7$.

**Erklärung:**

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i=\dfrac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

$(x\cdot e^x)'=(x+1)\cdot e^x$.

**Rechnung:**

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lclclcl}
f(x) & = & 5x\cdot e^{-7x} & & & \Rightarrow & f(0) = 0\\
f'(x) & = & 5e^{-7x}-7\cdot 5x\cdot e^{-7x} & = & (5-35x)\cdot e^{-7x} & \Rightarrow & f'(0) = 5\\
f''(x) & = & -35e^{-7x}+7\cdot(35x-5)\cdot e^{-7x} & = & (-70+245x)\cdot e^{-7x} & \Rightarrow & f''(0) = -35\\
f'''(x) & = & -7(-70+245x)\cdot e^{-7x}+245\cdot e^{-7x} & = & (735-1715x)\cdot e^{-7x} & \Rightarrow & f'''(0) = 735\\
f^{(n)}(x) & = & (-1)^n(5\cdot 7^n\cdot x-5\cdot n\cdot 7^{n-1})\cdot e^{-7x} & \text{für} & n\geq 1 & \Rightarrow & f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\cdot 5\cdot n\cdot 7^{n-1}
\end{array}$$

Damit gilt für $n\geq 1$:

$$a_0 = f(0) = 0, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-2)^{n-1}\cdot 5\cdot n}{n!} = \frac{5\cdot(-2)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Die Taylorreihe ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot(-2)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot x^n$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man $-7x = w$ substituiert hätte:

| | | |
|---|---|---|
| $5x \cdot e^w$ | $= 5x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$ | Taylorreihe von $e^w$ |
| | $= 5x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-7x)^n}{n!}$ | Rücksubstitution |
| | $= \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \frac{(-7)^n}{n!} \cdot x \cdot x^n$ | Distributivgesetz |
| | $= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{5\cdot(-7)^n}{n!} \cdot x^{n+1}$ | Potenzgesetz |
| | $= \sum_{m-1=0}^{m-1=\infty} \frac{5\cdot(-7)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot x^m$ | Indexverschiebung $m = n+1$ |
| | $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-7)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$ | $m$ wieder als $n$ geschrieben |

**Angebotene Lösungen:**

| | | |
|---|---|---|
| ☐ 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 7^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$ | ☐ 2 Es gibt keine | ☐ 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+7)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$ |
| ☐ 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 7^{n}}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$ | ☐ 5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-7)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$ | ☐ 6 $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$ |
| ☒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-7)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$ | ☐ 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-7)^{n}}{n!} \cdot x^{n-1}$ | ☐ 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-7)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$ |
| ☐ 10 $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-7)^n}{n!} \cdot x^n$ | ☐ 11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 7^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$ | ☐ 12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-7)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | |
|---|---|
| ☐ 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 7^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$ | RF: Bruchrechnen |
| ☐ 2 Es gibt keine | DF: Doch |
| ☐ 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+7)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$ | DF: Lösung geraten |
| ☐ 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 7^{n}}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$ | RF: Durch $x$ geteilt |
| ☐ 5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-7)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$ | DF: Lösung geraten |
| ☐ 6 $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$ | DF: Lösung geraten |
| ☒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-7)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$ | richtig |
| ☐ 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-7)^{n}}{n!} \cdot x^{n-1}$ | RF: Durch $x$ geteilt |
| ☐ 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-7)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$ | DF: Lösung geraten |
| ☐ 10 $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-7)^n}{n!} \cdot x^n$ | DF: Lösung geraten |
| ☐ 11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 7^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$ | RF: Durch $x$ geteilt |
| ☐ 12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-7)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$ | RF: Durch $x$ geteilt |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 11 | Kapitel 7.4 | Taylorreihen |
| keine | Differenzialrechnung | Nummer: 93 0 2004110001 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 11.1.4:**

Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 7\sqrt{6x^2+9}+6$ in ein Taylorpolynom vom Grad 2 (um 0) .

**Parameter:**

$x_n$ = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1, 2, 3, 4$.
$x_2$ darf keine Quadratzahl sein.

Die Formel lautet: $x_1\sqrt{x_2\,x^2 + \{x_3 \cdot x_3\}} + x_4$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7$ $x_2 = 6$ $x_3 = 3$ $x_4 = 6$.

**Erklärung:**

Taylorpolynome sind folgendermaßen definiert: $T_n(x) \quad := \quad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{mit} \quad a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$

**Rechnung:**

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$f'(x) \quad = \quad (7\sqrt{6x^2+9}+6)' \quad = \quad \frac{7 \cdot 2 \cdot 6x}{2\sqrt{6x^2+9}} \quad = \quad \frac{42x}{\sqrt{6x^2+9}} \quad \Rightarrow \quad f'(0) \quad = \quad 0$$

$f'(0) \quad = \quad 0$ war erwartet worden, weil $f$ achsensymmetrisch zur $y$ - Achse ist

$$f''(x) \quad = \quad \frac{42 \cdot \sqrt{6x^2+9} - 42x \cdot \frac{2 \cdot 6x}{2\sqrt{6x^2+9}}}{(\sqrt{6x^2+9})^2} \quad = \quad \frac{42(6x^2+9)-252x^2}{(6x^2+9)\sqrt{6x^2+9}} \quad = \quad \frac{378}{(6x^2+9)\sqrt{6x^2+9}} \quad \Rightarrow \quad f''(0) \quad = \quad \frac{378}{9\sqrt{9}} = 14.$$

Damit ist $\quad a_0 \quad = \quad f(0) \quad = \quad 27, \quad a_1 \quad = \quad f'(0) \quad = \quad 0, \quad a_2 \quad = \quad \frac{f''(0)}{2} \quad = \quad 7.$

$$T_2(x) \quad := \quad \sum_{i=0}^{2} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\, x^i \quad = \quad \frac{f(0)}{0!}\, x^0 + \frac{f'(0)}{1!}\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 \quad = \quad 27 + 7\, x^2$$

**Angebotene Lösungen:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 $\frac{27}{2} + 14x^2$ | 2 $27 + 14x$ | 3 $9 + 6x^2$ | 4 $15 + 7\sqrt{6}x^2$ |
| 5 $15 + 7\sqrt{6}x$ | 6 $9 + 6x$ | 7 $27 + 7x$ | 8 $\frac{27}{2} + 14x$ |
| 9 $1 + x + \frac{x^2}{2}$ | 10 $27 + 14x^2$ | 11 Es gibt keine | ☒ $27 + 7x^2$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{27}{2} + 14x^2$ | RF: Durch 2! an der falschen Stelle dividiert |
| 2 | $27 + 14x$ | RF: 2! im Nenner vergessen |
| 3 | $9 + 6x^2$ | DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben |
| 4 | $15 + 7\sqrt{6}x^2$ | DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben |
| 5 | $15 + 7\sqrt{6}x$ | DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben |
| 6 | $9 + 6x$ | DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben |
| 7 | $27 + 7x$ | RF: $x^2$ vergessen |
| 8 | $\frac{27}{2} + 14x$ | RF: Durch 2! an der falschen Stelle dividiert |
| 9 | $1 + x + \frac{x^2}{2}$ | DF: Lösung geraten |
| 10 | $27 + 14x^2$ | RF: 2! im Nenner vergessen |
| 11 | Es gibt keine | DF: Doch |
| ☒ | $27 + 7x^2$ | richtig |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 11 | Kapitel 7.4 | Taylorreihen |
| keine | Differenzialrechnung | Nummer: 105 0 2004110005 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 11.1.5:** Entwickeln Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \qquad f(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{3}{x} \cdot \sin(2x) & \text{für } x \neq 0 \\ 6 & \text{für } x = 0 \end{cases} \qquad \text{in eine Taylorreihe um 0.}$$

**Parameter:**

$x_n$ = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1, \ x_2 > 1, \ x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $\frac{x_1}{x} \cdot \sin(x_2\, x)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \qquad x_2 = 2$.

**Erklärung:**

Durch die Quotientenregel werden die einzelnen Ableitungen sehr schnell sehr kompliziert. Deshalb ist es eventuell sinnvoller, auf die Reihenentwicklung des Sinus zurückzugreifen und mit Substitution und Regeln aus der Summen - Reihenrechnung die Taylorreihe zu finden.

**Rechnung:**

$$\lim_{x\to 0} a \cdot \frac{\sin bx}{x} \quad =^H \quad \lim_{x\to 0} a \cdot \frac{b \cdot \cos bx}{1} \quad = \quad a \cdot b$$

Damit ist $f(x)$ bei $x = 0$ stetig. Die Taylorreihenentwicklung von $\sin x$ ist $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
Wir substituieren $2x = w$ und erhalten:

$$\sin(2x) \quad = \quad \sin w \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot w^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x} \cdot \sin(2x) &= \tfrac{3}{x} \cdot \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} && \text{Entwicklung von } \sin x \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{3}{x} \cdot \frac{(-1)^n \cdot (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} && \text{Distributivgesetz} \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 2^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{x \cdot (2n+1)!} && \text{Bruchmultiplikation} \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 2^{2n+1} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} && x \text{ gekürzt} \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}
\end{aligned}$$

**Angebotene Lösungen:**

| | | |
|---|---|---|
| ☒ $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$ | 2 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$ | 3 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 2^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$ |
| 4 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$ | 5 Es gibt keine | 6 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$ |
| 7 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$ | 8 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$ | 9 $\sum_{i=1}^{\infty} \infty \cdot x^{2n+1}$ |
| 10 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 2^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$ | 11 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 2^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n}$ | 12 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | |
|---|---|
| ☒ $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$ | richtig |
| 2 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$ | DF: $\frac{1}{x}$ vergessen |
| 3 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 2^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$ | DF: $\frac{1}{x}$ vergessen |
| 4 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$ | RF: Untere Grenze der Summe ist falsch |
| 5 Es gibt keine | DF: Doch |
| 6 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$ | DF: Falsch substituiert |
| 7 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$ | DF: $\frac{1}{x}$ vergessen |
| 8 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$ | DF: $\frac{1}{x}$ vergessen |
| 9 $\sum_{i=1}^{\infty} \infty \cdot x^{2n+1}$ | DF: Lösung geraten |
| 10 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 2^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$ | DF: $\frac{1}{x}$ vergessen |
| 11 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 2^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n}$ | RF: Untere Grenze der Summe ist falsch |
| 12 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$ | DF: Falsch substituiert |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 04 | Blatt 11 | Kapitel 7.4 | Taylorreihen |
| keine | Differenzialrechnung | Nummer: 108 0 2004110006 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 11.1.6:** Entwickeln Sie eine Stammfunktion von $f(x) = 5 \cdot \cos(4\,x^2)$ in eine Taylorreihe um 0.

**Parameter:**

$x_n$ = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1, \; x_2 > 1, \; x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $f(x) = x_1 \cdot \cos(x_2\, x^2)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \qquad x_2 = 4$.

**Erklärung:**

Die Funktion $\cos x^2$ ist (vermutlich) nicht elementar integrierbar. Deshalb ist es sinnvoll, zuerst mittels Substitution die Taylorreihenentwicklung von $\cos x^2$ zu bestimmen und diese dann zu integrieren.

**Rechnung:**

Die Taylorreihenentwicklung von $\cos x$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$.
Wir substituieren $4\,x^2 = w$ und erhalten:

$$\cos(4\,x^2) \quad = \quad \cos w \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot w^{2n}}{(2n)!} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (4\,x^2)^{2n}}{(2n)!} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\int 5 \cdot \cos(4\,x^2) &= \int 5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!} && \text{Taylorreihenentwicklung} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int 5 \cdot \frac{(-1)^n \cdot 4^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!} && \text{Integration und Summation vertauscht (und mehr .. )} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \frac{(-1)^n \cdot 4^{2n} \cdot (\frac{x^{4n+1}}{4n+1} + c)}{(2n)!} && \text{Integriert} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!} && c = 0 \text{ gewählt}
\end{aligned}$$

**Angebotene Lösungen:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$ | 2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ | 3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$ |
| 4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{4n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$ | 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$ | 6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)(2n)!}$ |
| ☒ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$ | 8 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$ | 9 Es gibt keine |
| 10 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$ | 11 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$ | 12 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$ | DF: Falsch Integriert |
| 2 | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ | DF: Quadrat nicht beachtet |
| 3 | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$ | RF: Quadrat auf 4 mitbezogen |
| 4 | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{4n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$ | DF: Falsch Integriert |
| 5 | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$ | DF: Falsch Integriert |
| 6 | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)(2n)!}$ | DF: Falsch Integriert |
| ☒ | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$ | richtig |
| 8 | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$ | RF: Quadrat auf 4 mitbezogen |
| 9 | Es gibt keine | DF: Doch |
| 10 | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$ | DF: Quadrat nicht beachtet |
| 11 | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$ | DF: Falsch Integriert |
| 12 | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$ | RF: Fakultät falsch zusammengefasst |

**Allgemeine Hinweise:**
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de ).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu