Blatt Nr 11.01

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 11

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 4 0 2004110004	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.1: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 5x \cdot e^{-4x}$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1$, $x_2 > 1, x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $x_1\, x \cdot e^{-x_2\, x}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 4$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

$(x \cdot e^x)' = (x+1) \cdot e^x$.

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lclclclcl}
f(x) & = & 5x \cdot e^{-4x} & & & \Rightarrow & f(0) & = & 0 \\
f'(x) & = & 5e^{-4x} - 4 \cdot 5x \cdot e^{-4x} & = & (5-20x) \cdot e^{-4x} & \Rightarrow & f'(0) & = & 5 \\
f''(x) & = & -20e^{-4x} + 4 \cdot (20x-5) \cdot e^{-4x} & = & (-40+80x) \cdot e^{-4x} & \Rightarrow & f''(0) & = & -20 \\
f'''(x) & = & -4(-40+80x) \cdot e^{-4x} + 80 \cdot e^{-4x} & = & (240-320x) \cdot e^{-4x} & \Rightarrow & f'''(0) & = & 240 \\
f^{(n)}(x) & = & (-1)^n(5 \cdot 4^n \cdot x - 5 \cdot n \cdot 4^{n-1}) \cdot e^{-4x} \text{ für } n \geq 1 & & & \Rightarrow & f^{(n)}(0) & = & (-1)^{n-1} \cdot 5 \cdot n \cdot 4^{n-1}
\end{array}$$

Damit gilt für $n \geq 1$:

$$a_0 = f(0) = 0, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-2)^{n-1} \cdot 5 \cdot n}{n!} = \frac{5 \cdot (-2)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$$\text{Die Taylorreihe ist} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-2)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man $-4x = w$ substituiert hätte:

$$\begin{array}{rcll}
5x \cdot e^w & = & 5x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} & \text{Taylorreihe von } e^w \\
& = & 5x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4x)^n}{n!} & \text{Rücksubstitution} \\
& = & \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \frac{(-4)^n}{n!} \cdot x \cdot x^n & \text{Distributivgesetz} \\
& = & \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{5 \cdot (-4)^n}{n!} \cdot x^{n+1} & \text{Potenzgesetz} \\
& = & \sum_{m-1=0}^{m-1=\infty} \frac{5 \cdot (-4)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot x^m & \text{Indexverschiebung } m = n+1 \\
& = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-4)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n & m \text{ wieder als } n \text{ geschrieben}
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

[1] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 4^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	[2] $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n!} \cdot x^n$	[3] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+4)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$
[4] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-4)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	[X] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-4)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	[6] Es gibt keine
[7] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 4^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	[8] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+4)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	[9] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-4)^n}{n!} \cdot x^{n-1}$
[10] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 4^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	[11] $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	[12] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-4)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$

Fehlerinterpretation:

1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 4^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Durch x geteilt
2	$5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+4)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-4)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	RF: Durch x geteilt
X	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-4)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	richtig
6	Es gibt keine	DF: Doch
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 4^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Durch x geteilt
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+4)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-4)^n}{n!} \cdot x^{n-1}$	RF: Durch x geteilt
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 4^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Bruchrechnen
11	$5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-4)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 18 0 2004110001	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.2:

Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 4\sqrt{5x^2 + 4}+4$ in ein Taylorpolynom vom Grad 2 (um 0) .

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_n > 1, \quad n = 1, 2, 3, 4.$
x_2 darf keine Quadratzahl sein.

Die Formel lautet: $x_1\sqrt{x_2\, x^2 + \{x_3 \cdot x_3\}} + x_4$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = 4.$

Erklärung:

$$\text{Taylorpolynome sind folgendermaßen definiert:} \quad T_n(x) \quad := \quad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{mit} \quad a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$$

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$f'(x) = (4\sqrt{5x^2+4}+4)' = \frac{4\cdot 2\cdot 5x}{2\sqrt{5x^2+4}} = \frac{20x}{\sqrt{5x^2+4}} \Rightarrow f'(0) = 0$$

$f'(0) = 0$ war erwartet worden, weil f achsensymmetrisch zur y - Achse ist

$$f''(x) = \frac{20\cdot\sqrt{5x^2+4} - 20x\cdot\frac{2\cdot 5x}{2\sqrt{5x^2+4}}}{(\sqrt{5x^2+4})^2} = \frac{20(5x^2+4)-100x^2}{(5x^2+4)\sqrt{5x^2+4}} = \frac{80}{(5x^2+4)\sqrt{5x^2+4}} \Rightarrow f''(0) = \frac{80}{4\sqrt{4}} = 10.$$

$$\text{Damit ist} \quad a_0 = f(0) = 12, \quad a_1 = f'(0) = 0, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = 5.$$

$$T_2(x) := \sum_{i=0}^{2} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\, x^i = \frac{f(0)}{0!}\, x^0 + \frac{f'(0)}{1!}\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 = 12 + 5\, x^2$$

Angebotene Lösungen:

1	$1+x+\frac{x^2}{2}$	2	$1+x+x^2$	3	$4+5x^2$	4	$8+4\sqrt{5}x^2$
☒	$12+5x^2$	6	$12+5x$	7	Es gibt keine	8	$6+10x^2$
9	$12+10x$	10	$8+4\sqrt{5}x$	11	$6+10x$	12	$4+5x$

Fehlerinterpretation:

1	$1+x+\frac{x^2}{2}$	DF: Lösung geraten
2	$1+x+x^2$	DF: Lösung geraten
3	$4+5x^2$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
4	$8+4\sqrt{5}x^2$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
☒	$12+5x^2$	richtig
6	$12+5x$	RF: x^2 vergessen
7	Es gibt keine	DF: Doch
8	$6+10x^2$	RF: Durch 2! an der falschen Stelle dividiert
9	$12+10x$	RF: 2! im Nenner vergessen
10	$8+4\sqrt{5}x$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
11	$6+10x$	RF: Durch 2! an der falschen Stelle dividiert
12	$4+5x$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 23 0 2004110002	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.3: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 3(5x+5)^3$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1,\ \ x_2 > 1,\ \ x_3 > 0$.

Die Formel lautet: $x_1(x_2\,x + x_3)^3$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \qquad x_2 = 5 \qquad x_3 = 5$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lclcllcl}
f'(x) & = & (3(5x+5)^3)' & = & 45(5x+5)^2 & \Rightarrow\ f'(0) & = & 1125 \\
f''(x) & = & (45(5x+5)^2)' & = & 450(5x+5) & \Rightarrow\ f''(0) & = & 2250 \\
f'''(x) & = & (450(5x+5))' & = & 2250 & & & \\
f''''(x) & \equiv & 0 & = & f^{(n)}(x)\ \ n \geq 4 & & &
\end{array}$$

Die Taylorreihe bricht ab, die Funktion ist also ein Polynom. Damit ist

$$a_0 \;=\; f(0) \;=\; 375, \quad a_1 \;=\; f'(0) \;=\; 1125, \quad a_2 \;=\; \frac{f''(0)}{2} \;=\; \frac{2250}{2}, \quad a_3 \;=\; \frac{f'''(0)}{3!} \;=\; \frac{2250}{6}.$$

Die Taylorreihe ist das Polynom: $\quad 375 \;+\; 1125\,x \;+\; 1125\,x^2 \;+\; 375\,x^3$.

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man die Funktion mit der binomischen Formel ausmultipliziert hätte:

$$3(5x+5)^3 \quad = \quad 3((5x)^3 + 3(5x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 5x \cdot 5^2 + 5^3)$$

Angebotene Lösungen:

1	Es gibt keine	2	$3\sum_{i=0}^{\infty}(5x+5)^i$
3	$3\sum_{i=0}^{3}(5x+5)^i$	4	$\sum_{i=0}^{3}(3(5x+5))^i$
5	$\frac{1875x^4+1875}{1-x}$	6	$\frac{3(5x+5)^4}{5-5x}$
7	$375+1125x+2250x^2+2250x^3$	8	$\frac{3(5x+5)^4}{1-x}$
☒	$375+1125x+1125x^2+375x^3$	10	$\frac{1875x^4+1875}{5-5x}$
11	$\sum_{i=0}^{\infty}(3(5x+5))^i$	12	162

Fehlerinterpretation:

1	Es gibt keine	DF: Doch	
2	$3\sum_{i=0}^{\infty}(5x+5)^i$	DF: Lösung geraten	
3	$3\sum_{i=0}^{3}(5x+5)^i$	DF: Lösung geraten	
4	$\sum_{i=0}^{3}(3(5x+5))^i$	DF: Lösung geraten	
5	$\frac{1875x^4+1875}{1-x}$	DF: Lösung geraten	
6	$\frac{3(5x+5)^4}{5-5x}$	DF: Lösung geraten	
7	$375+1125x+2250x^2+2250x^3$	RF: Nicht durch $i!$ geteilt	
8	$\frac{3(5x+5)^4}{1-x}$	DF: Lösung geraten	
☒	$375+1125x+1125x^2+375x^3$	richtig	
10	$\frac{1875x^4+1875}{5-5x}$	DF: Lösung geraten	
11	$\sum_{i=0}^{\infty}(3(5x+5))^i$	DF: Lösung geraten	
12	162	GL:	geratene Lösung

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 53 0 2004110005	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.4: Entwickeln Sie die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: \qquad f(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{2}{x}\cdot\sin(3x) & \text{für } x\neq 0 \\ 6 & \text{für } x=0 \end{cases} \qquad \text{in eine Taylorreihe um 0.}$$

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1>1,\ \ x_2>1,\ \ x_1\neq x_2$.

Die Formel lautet: $\frac{x_1}{x}\cdot\sin(x_2\,x)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=2 \qquad x_2=3$.

Erklärung:

Durch die Quotientenregel werden die einzelnen Ableitungen sehr schnell sehr kompliziert. Deshalb ist es eventuell sinnvoller, auf die Reihenentwicklung des Sinus zurückzugreifen und mit Substitution und Regeln aus der Summen - Reihenrechnung die Taylorreihe zu finden.

Rechnung:

$$\lim_{x\to 0} a\cdot\frac{\sin bx}{x} \quad =^H \quad \lim_{x\to 0} a\cdot\frac{b\cdot\cos bx}{1} \quad = \quad a\cdot b$$

Damit ist $f(x)$ bei $x=0$ stetig. Die Taylorreihenentwicklung von $\sin x$ ist $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
Wir substituieren $3x=w$ und erhalten:

$$\sin(3x) \quad = \quad \sin w \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot w^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{x}\cdot\sin(3x) &= \tfrac{2}{x}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n\cdot(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} && \text{Entwicklung von } \sin x\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{2}{x}\cdot\tfrac{(-1)^n\cdot(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} && \text{Distributivgesetz}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3^{2n+1}\cdot x^{2n+1}}{x\cdot(2n+1)!} && \text{Bruchmultiplikation}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3^{2n+1}\cdot x^{2n}}{(2n+1)!} && x \text{ gekürzt}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}
\end{aligned}
$$

Angebotene Lösungen:

1 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3^{2n}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	2 Es gibt keine	3 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3^{2n+1}}{(2n)!}\cdot x^{2n+1}$
4 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 6}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$	5 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3^{2n}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	6 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$
7 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$	8 $\sum_{i=1}^{\infty}\infty\cdot x^{2n+1}$	☒ $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$
10 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 6}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	11 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 6}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	12 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$

Fehlerinterpretation:

1 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3^{2n}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
2 Es gibt keine	DF: Doch
3 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3^{2n+1}}{(2n)!}\cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
4 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 6}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$	DF: Falsch substituiert
5 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3^{2n}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
6 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
7 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$	RF: Untere Grenze der Summe ist falsch
8 $\sum_{i=1}^{\infty}\infty\cdot x^{2n+1}$	DF: Lösung geraten
☒ $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$	richtig
10 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 6}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
11 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 6}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
12 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 70 0 2004110003	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.5: Entwickeln Sie die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=2+6x+e^{3x}$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1>0,\ \ x_2>1,\ \ x_3>1$.

Die Formel lautet: $x_1+x_2\,x+e^{x_3\,x}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=2 \quad x_2=6 \quad x_3=3$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ mit $a_i=\frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

Das Polynom vor der $e-$ Funktion wird einfach zu den ersten Koeffizienten der Taylorreihe addiert.
Die Ableitung von e^{ax} ist $a\cdot e^{ax}$.

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lclclcl}
f(x) & = & 2+6x+e^{3x} & & & \Rightarrow & f(0) = 2+1=3 \\
f'(x) & = & (2+6x+e^{3x})' & = & 6+3\cdot e^{3x} & \Rightarrow & f'(0) = 9 \\
f''(x) & = & (6+3\cdot e^{3x})' & = & 9\cdot e^{3x} & \Rightarrow & f''(0) = 9 \\
f^{(n)}(x) & = & 3^n\cdot e^{3x} & & \text{für } n\geq 2 & \Rightarrow & \\
 & & & & & & f^{(n)}(0)=3^n
\end{array}$$

Damit gilt für $n \geq 2$:

$$a_0 = f(0) = 3, \quad a_1 = f'(0) = 9, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{9}{2}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{3^n}{n!}.$$

$$\text{Die Taylorreihe ist} \qquad 3 + 9\,x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n!}\cdot x^n \;.$$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man $3x = w$ substituiert hätte:

$$2+6x+e^w = 2+6x + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!} = 2+6x+1+w + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!} = 3+9x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\cdot x^n$$

Angebotene Lösungen:

$\boxed{1}$ $2+6x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\cdot x^n$	$\boxed{2}$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}3\cdot x^n$	$\boxed{3}$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\cdot x^n$
$\boxtimes$ $3+9x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\cdot x^n$	$\boxed{5}$ $3+9x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot 3\cdot x^n$	$\boxed{6}$ $3\cdot(2+6x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot x^n)$
$\boxed{7}$ $3\cdot(2+6x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\cdot x^n)$	$\boxed{8}$ $\sum_{n=0}^{\infty}(2+6x)+\frac{1}{n!}\cdot x^n$	$\boxed{9}$ Es gibt keine
$\boxed{10}$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot x^n$	$\boxed{11}$ $\sum_{n=0}^{\infty}3\cdot(2+6x)+\frac{1}{n!}\cdot x^n$	$\boxed{12}$ $\sum_{n=0}^{\infty}(2+6x)+\frac{3^n}{n!}\cdot x^n$

Fehlerinterpretation:

$\boxed{1}$ $2+6x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\cdot x^n$	DF: Polynom nur abgeschrieben
$\boxed{2}$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}3\cdot x^n$	RF: Polynom am Anfang vergessen
$\boxed{3}$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\cdot x^n$	RF: Polynom am Anfang vergessen
$\boxtimes$ $3+9x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\cdot x^n$	richtig
$\boxed{5}$ $3+9x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot 3\cdot x^n$	DF: Substitution falsch
$\boxed{6}$ $3\cdot(2+6x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot x^n)$	DF: Lösung geraten
$\boxed{7}$ $3\cdot(2+6x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\cdot x^n)$	DF: Lösung geraten
$\boxed{8}$ $\sum_{n=0}^{\infty}(2+6x)+\frac{1}{n!}\cdot x^n$	DF: Lösung geraten
$\boxed{9}$ Es gibt keine	DF: Doch
$\boxed{10}$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot x^n$	DF: Reihenentwicklung der $e-$ Funktion
$\boxed{11}$ $\sum_{n=0}^{\infty}3\cdot(2+6x)+\frac{1}{n!}\cdot x^n$	DF: Lösung geraten
$\boxed{12}$ $\sum_{n=0}^{\infty}(2+6x)+\frac{3^n}{n!}\cdot x^n$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 74 0 2004110006	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.6: Entwickeln Sie eine Stammfunktion von $f(x) = 2\cdot\cos(6\,x^2)$ in eine Taylorreihe um 0.

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $f(x) = x_1\cdot\cos(x_2\,x^2)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 6$.

Erklärung:

Die Funktion $\cos x^2$ ist (vermutlich) nicht elementar integrierbar. Deshalb ist es sinnvoll, zuerst mittels Substitution die Taylorreihenentwicklung von $\cos x^2$ zu bestimmen und diese dann zu integrieren.

Rechnung:

Die Taylorreihenentwicklung von $\cos x$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$.
Wir substituieren $6\,x^2 = w$ und erhalten:

$$\cos(6\,x^2) = \cos w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot w^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (6\,x^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!}$$

Damit gilt:

$\int 2 \cdot \cos(6\,x^2)$	$=$	$\int 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!}$	Taylorreihenentwicklung
	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \int 2 \cdot \frac{(-1)^n \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!}$	Integration und Summation vertauscht (und mehr ..)
	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{(-1)^n \cdot 6^{2n} \cdot (\frac{x^{4n+1}}{4n+1} + c)}{(2n)!}$	Integriert
	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	$c = 0$ gewählt

Angebotene Lösungen:

1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)(2n)!}$
4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$	5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$
7 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	8 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$	☒ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$
10 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	11 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	12 Es gibt keine

Fehlerinterpretation:

1	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	RF: Quadrat auf 6 mitbezogen
2	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
3	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)(2n)!}$	DF: Falsch Integriert
4	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
5	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	RF: Fakultät falsch zusammengefasst
6	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$	DF: Falsch Integriert
7	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
8	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$	DF: Quadrat nicht beachtet
☒	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	richtig
10	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	RF: Quadrat auf 6 mitbezogen
11	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	DF: Quadrat nicht beachtet
12	Es gibt keine	DF: Doch

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu