Blatt Nr 11.02

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 11

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 23 0 2004110006	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.1: Entwickeln Sie eine Stammfunktion von $f(x) = 4 \cdot \cos(3\,x^2)$ in eine Taylorreihe um 0.

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1,\ \ x_2 > 1,\ \ x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $f(x) = x_1 \cdot \cos(x_2\,x^2)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \qquad x_2 = 3$.

Erklärung:

Die Funktion $\cos x^2$ ist (vermutlich) nicht elementar integrierbar. Deshalb ist es sinnvoll, zuerst mittels Substitution die Taylorreihenentwicklung von $\cos x^2$ zu bestimmen und diese dann zu integrieren.

Rechnung:

Die Taylorreihenentwicklung von $\cos x$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$.
Wir substituieren $3\,x^2 = w$ und erhalten:

$$\cos(3\,x^2) \quad = \quad \cos w \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot w^{2n}}{(2n)!} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3\,x^2)^{2n}}{(2n)!} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\int 4 \cdot \cos(3\,x^2) &= \int 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n \cdot 3^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!} && \text{Taylorreihenentwicklung} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int 4 \cdot \tfrac{(-1)^n \cdot 3^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!} && \text{Integration und Summation vertauscht (und mehr ..)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \tfrac{(-1)^n \cdot 3^{2n} \cdot (\frac{x^{4n+1}}{4n+1} + c)}{(2n)!} && \text{Integriert} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!} && c = 0 \text{ gewählt}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

[1] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$	[2] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	[3] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$
[4] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	[5] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	[6] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)(2n)!}$
[7] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$	[8] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{4n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	[9] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$
[10] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	[11] Es gibt keine	[X] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$

Fehlerinterpretation:

1	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$	DF: Falsch Integriert
2	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	RF: Fakultät falsch zusammengefasst
3	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
4	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	DF: Quadrat nicht beachtet
5	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
6	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)(2n)!}$	DF: Falsch Integriert
7	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$	DF: Quadrat nicht beachtet
8	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{4n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
9	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	RF: Quadrat auf 3 mitbezogen
10	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	RF: Quadrat auf 3 mitbezogen
11	Es gibt keine	DF: Doch
☒	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	richtig

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 44 0 2004110002	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.2: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 2(6x+1)^3$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1, \; x_2 > 1, \; x_3 > 0$.

Die Formel lautet: $x_1(x_2\,x + x_3)^3$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \qquad x_2 = 6 \qquad x_3 = 1$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lclcllcl} f'(x) & = & (2(6x+1)^3)' & = & 36(6x+1)^2 & \Rightarrow \; f'(0) & = & 36 \\ f''(x) & = & (36(6x+1)^2)' & = & 432(6x+1) & \Rightarrow \; f''(0) & = & 432 \\ f'''(x) & = & (432(6x+1))' & = & 2592 & & & \\ f''''(x) & \equiv & 0 & = & f^{(n)}(x) \;\; n \geq 4 & & & \end{array}$$

Die Taylorreihe bricht ab, die Funktion ist also ein Polynom. Damit ist

$$a_0 = f(0) = 2, \quad a_1 = f'(0) = 36, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{432}{2}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{2592}{6}.$$

Die Taylorreihe ist das Polynom: $2 + 36\,x + 216\,x^2 + 432\,x^3$.

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man die Funktion mit der binomischen Formel ausmultipliziert hätte:

$$2(6x+1)^3 = 2((6x)^3 + 3(6x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 6x \cdot 1^2 + 1^3)$$

Angebotene Lösungen:

1	$\frac{2592x^4+2}{1-x}$	2	$2+36x+432x^2+2592x^3$
3	$\sum_{i=0}^{3}(2(6x+1))^i$	4	$432+216x+36x^2+2x^3$
5	$2\sum_{i=0}^{\infty}(6x+1)^i$	6	$\frac{2(6x+1)^4}{1-6x}$
7	$2592+432x+36x^2+2x^3$	8	$\frac{2(6x+1)^4}{1-x}$
9	$2\sum_{i=0}^{3}(6x+1)^i$	10	$\frac{2592x^4+2}{1-6x}$
11	$\sum_{i=0}^{\infty}(2(6x+1))^i$	☒	$2+36x+216x^2+432x^3$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{2592x^4+2}{1-x}$	DF: Lösung geraten
2	$2+36x+432x^2+2592x^3$	RF: Nicht durch $i!$ geteilt
3	$\sum_{i=0}^{3}(2(6x+1))^i$	DF: Lösung geraten
4	$432+216x+36x^2+2x^3$	RF: Koeffizienten falsch verteilt
5	$2\sum_{i=0}^{\infty}(6x+1)^i$	DF: Lösung geraten
6	$\frac{2(6x+1)^4}{1-6x}$	DF: Lösung geraten
7	$2592+432x+36x^2+2x^3$	RF: Koeffizienten falsch verteilt
8	$\frac{2(6x+1)^4}{1-x}$	DF: Lösung geraten
9	$2\sum_{i=0}^{3}(6x+1)^i$	DF: Lösung geraten
10	$\frac{2592x^4+2}{1-6x}$	DF: Lösung geraten
11	$\sum_{i=0}^{\infty}(2(6x+1))^i$	DF: Lösung geraten
☒	$2+36x+216x^2+432x^3$	richtig

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 59 0 2004110001	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.3:

Entwickeln Sie die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x) = 5\sqrt{6x^2+4}+6$ in ein Taylorpolynom vom Grad 2 (um 0) .

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1, 2, 3, 4$.
x_2 darf keine Quadratzahl sein.

Die Formel lautet: $x_1\sqrt{x_2\,x^2 + \{x_3 \cdot x_3\}} + x_4$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 6 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = 6$.

Erklärung:

Taylorpolynome sind folgendermaßen definiert: $T_n(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$f'(x) = (5\sqrt{6x^2+4}+6)' = \frac{5\cdot 2\cdot 6x}{2\sqrt{6x^2+4}} = \frac{30x}{\sqrt{6x^2+4}} \Rightarrow f'(0) = 0$$

$f'(0) = 0$ war erwartet worden, weil f achsensymmetrisch zur y - Achse ist

$$f''(x) = \frac{30\cdot\sqrt{6x^2+4} - 30x\cdot\frac{2\cdot 6x}{2\sqrt{6x^2+4}}}{(\sqrt{6x^2+4})^2} = \frac{30(6x^2+4)-180x^2}{(6x^2+4)\sqrt{6x^2+4}} = \frac{120}{(6x^2+4)\sqrt{6x^2+4}} \Rightarrow f''(0) = \frac{120}{4\sqrt{4}} = 15.$$

$$\text{Damit ist} \quad a_0 = f(0) = 16, \quad a_1 = f'(0) = 0, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{15}{2}.$$

$$T_2(x) \quad := \quad \sum_{i=0}^{2} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\, x^i \quad = \quad \frac{f(0)}{0!}\, x^0 + \frac{f'(0)}{1!}\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 \quad = \quad 16 + \frac{15}{2}\, x^2$$

Angebotene Lösungen:

☒	$16 + \frac{15}{2}x^2$	2	Es gibt keine	3	$1 + x + x^2$	4	$8 + 15x$
5	$10 + 5\sqrt{6}x$	6	$1 + x + \frac{x^2}{2}$	7	$4 + 6x^2$	8	$16 + 15x^2$
9	$16 + \frac{15}{2}x$	10	$8 + 15x^2$	11	$4 + 6x$	12	$10 + 5\sqrt{6}x^2$

Fehlerinterpretation:

☒	$16 + \frac{15}{2}x^2$	richtig
2	Es gibt keine	DF: Doch
3	$1 + x + x^2$	DF: Lösung geraten
4	$8 + 15x$	RF: Durch 2! an der falschen Stelle dividiert
5	$10 + 5\sqrt{6}x$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
6	$1 + x + \frac{x^2}{2}$	DF: Lösung geraten
7	$4 + 6x^2$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
8	$16 + 15x^2$	RF: 2! im Nenner vergessen
9	$16 + \frac{15}{2}x$	RF: x^2 vergessen
10	$8 + 15x^2$	RF: Durch 2! an der falschen Stelle dividiert
11	$4 + 6x$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
12	$10 + 5\sqrt{6}x^2$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 67 0 2004110003	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.4: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 4 + 6x + e^{7x}$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 0$, $x_2 > 1$, $x_3 > 1$.

Die Formel lautet: $x_1 + x_2\, x + e^{x_3\, x}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4$ $\quad x_2 = 6$ $\quad x_3 = 7$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).
Das Polynom vor der $e-$ Funktion wird einfach zu den ersten Koeffizienten der Taylorreihe addiert.
Die Ableitung von e^{ax} ist $a \cdot e^{ax}$.

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lllll} f(x) & = & 4 + 6x + e^{7x} & & \Rightarrow\ f(0) = 4 + 1 = 5 \\ f'(x) & = & (4 + 6x + e^{7x})' & = 6 + 7 \cdot e^{7x} & \Rightarrow\ f'(0) = 13 \\ f''(x) & = & (6 + 7 \cdot e^{7x})' & = 49 \cdot e^{7x} & \Rightarrow\ f''(0) = 49 \\ f^{(n)}(x) & = & 7^n \cdot e^{7x} & \text{für } n \geq 2 & \Rightarrow \\ & & & & f^{(n)}(0) = 7^n \end{array}$$

Damit gilt für $n \geq 2$:

$$a_0 = f(0) = 5, \quad a_1 = f'(0) = 13, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{49}{2}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{7^n}{n!}.$$

$$\text{Die Taylorreihe ist} \qquad 5 + 13\, x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot x^n \; .$$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man $7x = w$ substituiert hätte:

$$4+6x+e^w = 4+6x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = 4+6x+1+w + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(7x)^n}{n!} = 5+13x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot x^n$$

Angebotene Lösungen:

[1] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$	[2] $\sum_{n=0}^{\infty}(4+6x) + \frac{7^n}{n!} \cdot x^n$	[3] $\sum_{n=0}^{\infty} 7 \cdot (4+6x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$
[4] $7 \cdot (4+6x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot x^n)$	[5] $\sum_{n=0}^{\infty}(4+6x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	[6] $7 \cdot (4+6x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n)$
[7] $5+13x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 7 \cdot x^n$	[8] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 7 \cdot x^n$	[9] Es gibt keine
[10] $4+6x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot x^n$	[11] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot x^n$	[X] $5+13x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot x^n$

Fehlerinterpretation:

[1] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Reihenentwicklung der $e-$ Funktion
[2] $\sum_{n=0}^{\infty}(4+6x) + \frac{7^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
[3] $\sum_{n=0}^{\infty} 7 \cdot (4+6x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
[4] $7 \cdot (4+6x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot x^n)$	DF: Lösung geraten
[5] $\sum_{n=0}^{\infty}(4+6x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
[6] $7 \cdot (4+6x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n)$	DF: Lösung geraten
[7] $5+13x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 7 \cdot x^n$	DF: Substitution falsch
[8] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 7 \cdot x^n$	RF: Polynom am Anfang vergessen
[9] Es gibt keine	DF: Doch
[10] $4+6x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Polynom nur abgeschrieben
[11] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot x^n$	RF: Polynom am Anfang vergessen
[X] $5+13x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot x^n$	richtig

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 103 0 2004110004	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.5: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 4x \cdot e^{-7x}$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1$, $x_2 > 1, x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $x_1\, x \cdot e^{-x_2\, x}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 7$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

$(x \cdot e^x)' = (x+1) \cdot e^x$.

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lllll}
f(x) &= 4x \cdot e^{-7x} & & \Rightarrow & f(0) = 0 \\
f'(x) &= 4e^{-7x} - 7 \cdot 4x \cdot e^{-7x} &= (4-28x) \cdot e^{-7x} & \Rightarrow & f'(0) = 4 \\
f''(x) &= -28e^{-7x} + 7 \cdot (28x-4) \cdot e^{-7x} &= (-56+196x) \cdot e^{-7x} & \Rightarrow & f''(0) = -28 \\
f'''(x) &= -7(-56+196x) \cdot e^{-7x} + 196 \cdot e^{-7x} &= (588-1372x) \cdot e^{-7x} & \Rightarrow & f'''(0) = 588 \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n (4 \cdot 7^n \cdot x - 4 \cdot n \cdot 7^{n-1}) \cdot e^{-7x} & \text{für } n \geq 1 & \Rightarrow & f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot 4 \cdot n \cdot 7^{n-1}
\end{array}$$

Damit gilt für $n \geq 1$:

$$a_0 = f(0) = 0, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-2)^{n-1} \cdot 4 \cdot n}{n!} = \frac{4 \cdot (-2)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$$\text{Die Taylorreihe ist} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-2)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man $-7x = w$ substituiert hätte:

$$\begin{aligned}
4x \cdot e^w &= 4x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} && \text{Taylorreihe von } e^w \\
&= 4x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-7x)^n}{n!} && \text{Rücksubstitution} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \frac{(-7)^n}{n!} \cdot x \cdot x^n && \text{Distributivgesetz} \\
&= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{4 \cdot (-7)^n}{n!} \cdot x^{n+1} && \text{Potenzgesetz} \\
&= \sum_{m-1=0}^{m-1=\infty} \frac{4 \cdot (-7)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot x^m && \text{Indexverschiebung } m = n+1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-7)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n && m \text{ wieder als } n \text{ geschrieben}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

☐ 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-7)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	☐ 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4+7)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	☐ 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4+7)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$
☐ 4 $4x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	☐ 5 Es gibt keine	☐ 6 $4x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-7)^n}{n!} \cdot x^n$
☒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-7)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	☐ 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	☐ 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-7)^n}{n!} \cdot x^{n-1}$
☐ 10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	☐ 11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-7)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	☐ 12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$

Fehlerinterpretation:

☐ 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-7)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	RF: Durch x geteilt
☐ 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4+7)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
☐ 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4+7)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
☐ 4 $4x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
☐ 5 Es gibt keine	DF: Doch
☐ 6 $4x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-7)^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
☒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-7)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	richtig
☐ 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Durch x geteilt
☐ 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-7)^n}{n!} \cdot x^{n-1}$	RF: Durch x geteilt
☐ 10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Durch x geteilt
☐ 11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-7)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
☐ 12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Bruchrechnen

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 106 0 2004110005	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.6: Entwickeln Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x} \cdot \sin(4x) & \text{für } x \neq 0 \\ 20 & \text{für } x = 0 \end{cases} \qquad \text{in eine Taylorreihe um 0.}$$

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $\frac{x_1}{x} \cdot \sin(x_2\, x)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \qquad x_2 = 4$.

Erklärung:

Durch die Quotientenregel werden die einzelnen Ableitungen sehr schnell sehr kompliziert. Deshalb ist es eventuell sinnvoller, auf die Reihenentwicklung des Sinus zurückzugreifen und mit Substitution und Regeln aus der Summen - Reihenrechnung die Taylorreihe zu finden.

Rechnung:

$$\lim_{x\to 0} a \cdot \frac{\sin bx}{x} \quad =^H \quad \lim_{x\to 0} a \cdot \frac{b \cdot \cos bx}{1} \quad = \quad a \cdot b$$

Damit ist $f(x)$ bei $x = 0$ stetig. Die Taylorreihenentwicklung von $\sin x$ ist $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
Wir substituieren $4x = w$ und erhalten:

$$\sin(4x) \quad = \quad \sin w \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot w^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (4x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \frac{5}{x} \cdot \sin(4x) &= \tfrac{5}{x} \cdot \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (4x)^{2n+1}}{(2n+1)!} && \text{Entwicklung von } \sin x \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{5}{x} \cdot \frac{(-1)^n \cdot (4x)^{2n+1}}{(2n+1)!} && \text{Distributivgesetz} \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{x \cdot (2n+1)!} && \text{Bruchmultiplikation} \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n+1} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} && x \text{ gekürzt} \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n} \end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

☐ 1 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	☐ 2 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n+1}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$	☒ $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$
☐ 4 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	☐ 5 ∞	☐ 6 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$
☐ 7 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	☐ 8 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 20}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	☐ 9 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$
☐ 10 Es gibt keine	☐ 11 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 20}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	☐ 12 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$

Fehlerinterpretation:

☐ 1 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
☐ 2 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n+1}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
☒ $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	richtig
☐ 4 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
☐ 5 ∞	DF: Lösung geraten
☐ 6 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
☐ 7 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
☐ 8 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 20}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
☐ 9 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	RF: Untere Grenze der Summe ist falsch
☐ 10 Es gibt keine	DF: Doch
☐ 11 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 20}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	DF: Falsch substituiert
☐ 12 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	RF: Untere Grenze der Summe ist falsch

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu