Blatt Nr 11.03

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 11

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 16 0 2004110002	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.1: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 2(6x+5)^3$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $x_3 > 0$.

Die Formel lautet: $x_1(x_2\,x + x_3)^3$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 6 \quad x_3 = 5$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lclcllcl}
f'(x) & = & (2(6x+5)^3)' & = & 36(6x+5)^2 & \Rightarrow f'(0) & = & 900 \\
f''(x) & = & (36(6x+5)^2)' & = & 432(6x+5) & \Rightarrow f''(0) & = & 2160 \\
f'''(x) & = & (432(6x+5))' & = & 2592 & & & \\
f''''(x) & \equiv & 0 & = & f^{(n)}(x) \;\; n \geq 4 & & &
\end{array}$$

Die Taylorreihe bricht ab, die Funktion ist also ein Polynom. Damit ist

$$a_0 = f(0) = 250, \quad a_1 = f'(0) = 900, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{2160}{2}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{2592}{6}.$$

Die Taylorreihe ist das Polynom: $250 + 900\,x + 1080\,x^2 + 432\,x^3$.

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man die Funktion mit der binomischen Formel ausmultipliziert hätte:

$$2(6x+5)^3 = 2((6x)^3 + 3(6x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 6x \cdot 5^2 + 5^3)$$

Angebotene Lösungen:

1	$\frac{2592x^4+1250}{1-x}$	2	$\frac{2592x^4+1250}{5-6x}$
3	$\sum_{i=0}^{3}(2(6x+5))^i$	4	$432 + 1080x + 900x^2 + 250x^3$
5	$2\sum_{i=0}^{3}(6x+5)^i$	6	$2592 + 2160x + 900x^2 + 250x^3$
☒	$250 + 900x + 1080x^2 + 432x^3$	8	$\frac{2(6x+5)^4}{1-x}$
9	Es gibt keine	10	$2\sum_{i=0}^{\infty}(6x+5)^i$
11	$250 + 900x + 2160x^2 + 2592x^3$	12	$\frac{2(6x+5)^4}{5-6x}$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{2592x^4+1250}{1-x}$	DF: Lösung geraten
2	$\frac{2592x^4+1250}{5-6x}$	DF: Lösung geraten
3	$\sum_{i=0}^{3}(2(6x+5))^i$	DF: Lösung geraten
4	$432+1080x+900x^2+250x^3$	RF: Koeffizienten falsch verteilt
5	$2\sum_{i=0}^{3}(6x+5)^i$	DF: Lösung geraten
6	$2592+2160x+900x^2+250x^3$	RF: Koeffizienten falsch verteilt
☒	$250+900x+1080x^2+432x^3$	richtig
8	$\frac{2(6x+5)^4}{1-x}$	DF: Lösung geraten
9	Es gibt keine	DF: Doch
10	$2\sum_{i=0}^{\infty}(6x+5)^i$	DF: Lösung geraten
11	$250+900x+2160x^2+2592x^3$	RF: Nicht durch $i!$ geteilt
12	$\frac{2(6x+5)^4}{5-6x}$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 31 0 2004110004	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.2: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 5x \cdot e^{-4x}$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1, \;\; x_2 > 1, x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $x_1\, x \cdot e^{-x_2\, x}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \qquad x_2 = 4$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

$(x \cdot e^x)' = (x+1) \cdot e^x$.

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lclcll}
f(x) & = & 5x \cdot e^{-4x} & & & \Rightarrow\; f(0) = 0 \\
f'(x) & = & 5e^{-4x} - 4 \cdot 5x \cdot e^{-4x} & = & (5-20x) \cdot e^{-4x} & \Rightarrow\; f'(0) = 5 \\
f''(x) & = & -20e^{-4x} + 4 \cdot (20x-5) \cdot e^{-4x} & = & (-40+80x) \cdot e^{-4x} & \Rightarrow\; f''(0) = -20 \\
f'''(x) & = & -4(-40+80x) \cdot e^{-4x} + 80 \cdot e^{-4x} & = & (240-320x) \cdot e^{-4x} & \Rightarrow\; f'''(0) = 240 \\
f^{(n)}(x) & = & (-1)^n(5 \cdot 4^n \cdot x - 5 \cdot n \cdot 4^{n-1}) \cdot e^{-4x} \;\text{ für }\; n \geq 1 & & & \Rightarrow\; f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot 5 \cdot n \cdot 4^{n-1}
\end{array}$$

Damit gilt für $n \geq 1$:

$$a_0 = f(0) = 0, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-2)^{n-1} \cdot 5 \cdot n}{n!} = \frac{5 \cdot (-2)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Die Taylorreihe ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-2)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man $-4x = w$ substituiert hätte:

$$
\begin{aligned}
5x \cdot e^w &= 5x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} && \text{Taylorreihe von } e^w \\
&= 5x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4x)^n}{n!} && \text{Rücksubstitution} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \frac{(-4)^n}{n!} \cdot x \cdot x^n && \text{Distributivgesetz} \\
&= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{5 \cdot (-4)^n}{n!} \cdot x^{n+1} && \text{Potenzgesetz} \\
&= \sum_{m-1=0}^{m-1=\infty} \frac{5 \cdot (-4)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot x^m && \text{Indexverschiebung } m = n+1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-4)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n && m \text{ wieder als } n \text{ geschrieben}
\end{aligned}
$$

Angebotene Lösungen:

☐ 1 $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	☐ 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+4)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	☐ 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-4)^n}{n!} \cdot x^{n-1}$
☐ 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-4)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	☐ 5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-4)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	☐ 6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 4^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$
☐ 7 Es gibt keine	☐ 8 $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n!} \cdot x^n$	☐ 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-4)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$
☐ 10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 4^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	☒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-4)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	☐ 12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 4^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$

Fehlerinterpretation:

☐ 1 $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
☐ 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+4)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
☐ 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-4)^n}{n!} \cdot x^{n-1}$	RF: Durch x geteilt
☐ 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-4)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
☐ 5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-4)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	RF: Durch x geteilt
☐ 6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 4^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Bruchrechnen
☐ 7 Es gibt keine	DF: Doch
☐ 8 $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
☐ 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-4)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
☐ 10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 4^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Durch x geteilt
☒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-4)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	richtig
☐ 12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 4^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Durch x geteilt

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 39 0 2004110006	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.3: Entwickeln Sie eine Stammfunktion von $f(x) = 4 \cdot \cos(6\,x^2)$ in eine Taylorreihe um 0.

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1,\ \ x_2 > 1,\ \ x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $f(x) = x_1 \cdot \cos(x_2\,x^2)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \qquad x_2 = 6$.

Erklärung:

Die Funktion $\cos x^2$ ist (vermutlich) nicht elementar integrierbar. Deshalb ist es sinnvoll, zuerst mittels Substitution die Taylorreihenentwicklung von $\cos x^2$ zu bestimmen und diese dann zu integrieren.

Rechnung:

Die Taylorreihenentwicklung von $\cos x$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$.
Wir substituieren $6\,x^2 = w$ und erhalten:

$$\cos(6\,x^2) \quad = \quad \cos w \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot w^{2n}}{(2n)!} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (6\,x^2)^{2n}}{(2n)!} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!}$$

Damit gilt:

$$\begin{array}{rcll}
\int 4 \cdot \cos(6\,x^2) & = & \int 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!} & \text{Taylorreihenentwicklung} \\
& = & \sum_{n=0}^{\infty} \int 4 \cdot \frac{(-1)^n \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!} & \text{Integration und Summation vertauscht (und mehr ..)} \\
& = & \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \frac{(-1)^n \cdot 6^{2n} \cdot (\frac{x^{4n+1}}{4n+1} + c)}{(2n)!} & \text{Integriert} \\
& = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!} & c = 0 \text{ gewählt}
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

☐ 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	☐ 2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	☐ 3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$
☐ 4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$	☐ 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	☐ 6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$
☐ 7 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)(2n)!}$	☐ 8 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	☐ 9 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$
☐ 10 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	☐ 11 Es gibt keine	☒ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$

Fehlerinterpretation:

☐ 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	DF: Quadrat nicht beachtet
☐ 2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	RF: Fakultät falsch zusammengefasst
☐ 3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$	DF: Falsch Integriert
☐ 4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
☐ 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
☐ 6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	RF: Quadrat auf 6 mitbezogen
☐ 7 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)(2n)!}$	DF: Falsch Integriert
☐ 8 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	RF: Quadrat auf 6 mitbezogen
☐ 9 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$	DF: Quadrat nicht beachtet
☐ 10 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
☐ 11 Es gibt keine	DF: Doch
☒ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	richtig

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 58 0 2004110005	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.4: Entwickeln Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \qquad f(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{2}{x} \cdot \sin(4x) & \text{für } x \neq 0 \\ 8 & \text{für } x = 0 \end{cases} \qquad \text{in eine Taylorreihe um 0.}$$

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1,\;\; x_2 > 1,\;\; x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $\frac{x_1}{x} \cdot \sin(x_2\,x)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \qquad x_2 = 4$.

Erklärung:

Durch die Quotientenregel werden die einzelnen Ableitungen sehr schnell sehr kompliziert. Deshalb ist es eventuell sinnvoller, auf die Reihenentwicklung des Sinus zurückzugreifen und mit Substitution und Regeln aus der Summen - Reihenrechnung die Taylorreihe zu finden.

Rechnung:

$$\lim_{x\to 0} a\cdot\frac{\sin bx}{x} \quad =^H \quad \lim_{x\to 0} a\cdot\frac{b\cdot\cos bx}{1} \quad = \quad a\cdot b$$

Damit ist $f(x)$ bei $x=0$ stetig. Die Taylorreihenentwicklung von $\sin x$ ist $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
Wir substituieren $4x=w$ und erhalten:

$$\sin(4x) \quad = \quad \sin w \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot w^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(4x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x}\cdot\sin(4x) &= \tfrac{2}{x}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n\cdot(4x)^{2n+1}}{(2n+1)!} && \text{Entwicklung von } \sin x\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{2}{x}\cdot\tfrac{(-1)^n\cdot(4x)^{2n+1}}{(2n+1)!} && \text{Distributivgesetz}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n\cdot 2\cdot 4^{2n+1}\cdot x^{2n+1}}{x\cdot(2n+1)!} && \text{Bruchmultiplikation}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n\cdot 2\cdot 4^{2n+1}\cdot x^{2n}}{(2n+1)!} && x \text{ gekürzt}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n\cdot 2\cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 4^{2n}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$	2 $\sum_{i=1}^{\infty}\infty\cdot x^{2n+1}$	3 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 4^{2n}}{(2n)!}\cdot x^{2n}$
4 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	5 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 8}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	☒ $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$
7 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 8}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$	8 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 4^{2n+1}}{(2n)!}\cdot x^{2n+1}$	9 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 4^{2n}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$
10 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 4^{2n}}{(2n)!}\cdot x^{2n+1}$	11 ∞	12 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 4^{2n}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$

Fehlerinterpretation:

1 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 4^{2n}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$	RF: Untere Grenze der Summe ist falsch
2 $\sum_{i=1}^{\infty}\infty\cdot x^{2n+1}$	DF: Lösung geraten
3 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 4^{2n}}{(2n)!}\cdot x^{2n}$	RF: Untere Grenze der Summe ist falsch
4 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
5 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 8}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
☒ $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$	richtig
7 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 8}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$	DF: Falsch substituiert
8 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 4^{2n+1}}{(2n)!}\cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
9 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 4^{2n}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
10 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 4^{2n}}{(2n)!}\cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
11 ∞	DF: Lösung geraten
12 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 4^{2n}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 79 0 2004110001	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.5:

Entwickeln Sie die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=4\sqrt{5x^2+49}+4$ in ein Taylorpolynom vom Grad 2 (um 0) .

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1,2,3,4$.
x_2 darf keine Quadratzahl sein.

Die Formel lautet: $x_1\sqrt{x_2\,x^2 + \{x_3 \cdot x_3\}} + x_4$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 7 \quad x_4 = 4$.

Erklärung:

$$\text{Taylorpolynome sind folgendermaßen definiert:}\quad T_n(x) \;:=\; \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{mit} \quad a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$$

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$f'(x) = (4\sqrt{5x^2+49}+4)' = \frac{4\cdot 2\cdot 5x}{2\sqrt{5x^2+49}} = \frac{20x}{\sqrt{5x^2+49}} \Rightarrow f'(0) = 0$$

$f'(0) = 0$ war erwartet worden, weil f achsensymmetrisch zur y - Achse ist

$$f''(x) = \frac{20\cdot\sqrt{5x^2+49}-20x\cdot\frac{2\cdot 5x}{2\sqrt{5x^2+49}}}{(\sqrt{5x^2+49})^2} = \frac{20(5x^2+49)-100x^2}{(5x^2+49)\sqrt{5x^2+49}} = \frac{980}{(5x^2+49)\sqrt{5x^2+49}} \Rightarrow f''(0) = \frac{980}{49\sqrt{49}} = \frac{20}{7}.$$

$$\text{Damit ist}\quad a_0 = f(0) = 32, \quad a_1 = f'(0) = 0, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{10}{7}.$$

$$T_2(x) := \sum_{i=0}^{2} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\,x^i = \frac{f(0)}{0!}\,x^0 + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 = 32 + \frac{10}{7}\,x^2$$

Angebotene Lösungen:

[1] $1+x+\frac{x^2}{2}$	[2] $32+\frac{20}{7}x$	[3] $49+5x$	[4] $1+x+x^2$
[5] $32+\frac{10}{7}x$	[6] Es gibt keine	[7] $53+4\sqrt{5}x$	[8] $16+\frac{20}{7}x$
[9] $53+4\sqrt{5}x^2$	[10] $49+5x^2$	[☒] $32+\frac{10}{7}x^2$	[12] $16+\frac{20}{7}x^2$

Fehlerinterpretation:

[1] $1+x+\frac{x^2}{2}$	DF: Lösung geraten
[2] $32+\frac{20}{7}x$	RF: 2! im Nenner vergessen
[3] $49+5x$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
[4] $1+x+x^2$	DF: Lösung geraten
[5] $32+\frac{10}{7}x$	RF: x^2 vergessen
[6] Es gibt keine	DF: Doch
[7] $53+4\sqrt{5}x$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
[8] $16+\frac{20}{7}x$	RF: Durch 2! an der falschen Stelle dividiert
[9] $53+4\sqrt{5}x^2$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
[10] $49+5x^2$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
[☒] $32+\frac{10}{7}x^2$	richtig
[12] $16+\frac{20}{7}x^2$	RF: Durch 2! an der falschen Stelle dividiert

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 84 0 2004110003	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.6: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 4 + 5x + e^{6x}$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 0, \;\; x_2 > 1, \;\; x_3 > 1$.

Die Formel lautet: $x_1 + x_2\, x + e^{x_3\, x}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \qquad x_2 = 5 \qquad x_3 = 6$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \dfrac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).
Das Polynom vor der $e-$ Funktion wird einfach zu den ersten Koeffizienten der Taylorreihe addiert.
Die Ableitung von e^{ax} ist $a \cdot e^{ax}$.

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lclclcl}
f(x) & = & 4 + 5x + e^{6x} & & & \Rightarrow & f(0) = 4 + 1 = 5 \\
f'(x) & = & (4 + 5x + e^{6x})' & = & 5 + 6 \cdot e^{6x} & \Rightarrow & f'(0) = 11 \\
f''(x) & = & (5 + 6 \cdot e^{6x})' & = & 36 \cdot e^{6x} & \Rightarrow & f''(0) = 36 \\
f^{(n)}(x) & = & 6^n \cdot e^{6x} & & \text{für } n \geq 2 & \Rightarrow & \\
& & & & & & f^{(n)}(0) = 6^n
\end{array}$$

Damit gilt für $n \geq 2$:

$$a_0 = f(0) = 5, \quad a_1 = f'(0) = 11, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{36}{2}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{6^n}{n!}.$$

$$\text{Die Taylorreihe ist} \qquad 5 + 11\,x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n}{n!} \cdot x^n \; .$$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man $6x = w$ substituiert hätte:

$$4 + 5x + e^w = 4 + 5x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = 4 + 5x + 1 + w + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(6x)^n}{n!} = 5 + 11x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n}{n!} \cdot x^n$$

Angebotene Lösungen:

[1] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 6 \cdot x^n$	[2] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{n!} \cdot x^n$	[3] $\sum_{n=0}^{\infty} (4 + 5x) + \frac{6^n}{n!} \cdot x^n$
[4] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$	[☒] $5 + 11x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n}{n!} \cdot x^n$	[6] $4 + 5x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n}{n!} \cdot x^n$
[7] $\sum_{n=0}^{\infty} (4 + 5x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	[8] $\sum_{n=0}^{\infty} 6 \cdot (4 + 5x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	[9] $6 \cdot (4 + 5x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n)$
[10] $5 + 11x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 6 \cdot x^n$	[11] $6 \cdot (4 + 5x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n}{n!} \cdot x^n)$	[12] Es gibt keine

Fehlerinterpretation:

[1] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 6 \cdot x^n$	RF: Polynom am Anfang vergessen
[2] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{n!} \cdot x^n$	RF: Polynom am Anfang vergessen
[3] $\sum_{n=0}^{\infty} (4 + 5x) + \frac{6^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
[4] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Reihenentwicklung der $e-$ Funktion
[☒] $5 + 11x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n}{n!} \cdot x^n$	richtig
[6] $4 + 5x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Polynom nur abgeschrieben
[7] $\sum_{n=0}^{\infty} (4 + 5x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
[8] $\sum_{n=0}^{\infty} 6 \cdot (4 + 5x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
[9] $6 \cdot (4 + 5x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n)$	DF: Lösung geraten
[10] $5 + 11x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 6 \cdot x^n$	DF: Substitution falsch
[11] $6 \cdot (4 + 5x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n}{n!} \cdot x^n)$	DF: Lösung geraten
[12] Es gibt keine	DF: Doch

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu