Blatt Nr 11.04

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 11

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 8 0 2004110005	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.1: Entwickeln Sie die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: \qquad f(x) \quad = \begin{cases} \frac{3}{x}\cdot\sin(4x) & \text{für } x\neq 0 \\ 12 & \text{für } x = 0 \end{cases} \qquad \text{in eine Taylorreihe um 0.}$$

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1,\ \ x_2 > 1,\ \ x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $\frac{x_1}{x}\cdot\sin(x_2\,x)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \qquad x_2 = 4$.

Erklärung:

Durch die Quotientenregel werden die einzelnen Ableitungen sehr schnell sehr kompliziert. Deshalb ist es eventuell sinnvoller, auf die Reihenentwicklung des Sinus zurückzugreifen und mit Substitution und Regeln aus der Summen - Reihenrechnung die Taylorreihe zu finden.

Rechnung:

$$\lim_{x\to 0} a\cdot\frac{\sin bx}{x} \quad =^{H} \quad \lim_{x\to 0} a\cdot\frac{b\cdot\cos bx}{1} \quad = \quad a\cdot b$$

Damit ist $f(x)$ bei $x=0$ stetig. Die Taylorreihenentwicklung von $\sin x$ ist $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
Wir substituieren $4x = w$ und erhalten:

$$\sin(4x) \quad = \quad \sin w \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot w^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot (4x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x}\cdot\sin(4x) &= \tfrac{3}{x}\cdot\textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(4x)^{2n+1}}{(2n+1)!} && \text{Entwicklung von } \sin x \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{3}{x}\cdot\frac{(-1)^n\cdot(4x)^{2n+1}}{(2n+1)!} && \text{Distributivgesetz} \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 4^{2n+1}\cdot x^{2n+1}}{x\cdot(2n+1)!} && \text{Bruchmultiplikation} \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 4^{2n+1}\cdot x^{2n}}{(2n+1)!} && x \text{ gekürzt} \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 4^{2n+1}}{(2n)!}\cdot x^{2n+1}$	2 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 4^{2n}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	3 Es gibt keine
4 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$	5 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 4^{2n}}{(2n)!}\cdot x^{2n+1}$	6 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 12}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$
7 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 12}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$	8 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	9 $\sum_{i=1}^{\infty}\infty\cdot x^{2n+1}$
☒ $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$	11 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 4^{2n}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$	12 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 12}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$

Fehlerinterpretation:

1	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 4^{2n+1}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
2	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 4^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
3	Es gibt keine	DF: Doch
4	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	RF: Untere Grenze der Summe ist falsch
5	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 4^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
6	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 12}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	DF: Falsch substituiert
7	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 12}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	DF: Falsch substituiert
8	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
9	$\sum_{i=1}^{\infty} \infty \cdot x^{2n+1}$	DF: Lösung geraten
☒	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	richtig
11	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 4^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	RF: Untere Grenze der Summe ist falsch
12	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 12}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 23 0 2004110001	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.2:

Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 7\sqrt{5x^2 + 25} + 6$ in ein Taylorpolynom vom Grad 2 (um 0) .

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1, 2, 3, 4$.
x_2 darf keine Quadratzahl sein.

Die Formel lautet: $x_1 \sqrt{x_2\, x^2 + \{x_3 \cdot x_3\}} + x_4$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 6$.

Erklärung:

$$\text{Taylorpolynome sind folgendermaßen definiert:} \quad T_n(x) \quad := \quad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{mit} \quad a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$$

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$f'(x) \quad = \quad (7\sqrt{5x^2+25}+6)' \quad = \quad \frac{7 \cdot 2 \cdot 5x}{2\sqrt{5x^2+25}} \quad = \quad \frac{35x}{\sqrt{5x^2+25}} \quad \Rightarrow \quad f'(0) \quad = \quad 0$$

$f'(0) \quad = \quad 0$ war erwartet worden, weil f achsensymmetrisch zur y - Achse ist

$$f''(x) \quad = \quad \frac{35 \cdot \sqrt{5x^2+25} - 35x \cdot \frac{2 \cdot 5x}{2\sqrt{5x^2+25}}}{(\sqrt{5x^2+25})^2} \quad = \quad \frac{35(5x^2+25) - 175x^2}{(5x^2+25)\sqrt{5x^2+25}} \quad = \quad \frac{875}{(5x^2+25)\sqrt{5x^2+25}} \quad \Rightarrow \quad f''(0) \quad = \quad \frac{875}{25\sqrt{25}} = 7.$$

$$\text{Damit ist} \quad a_0 \quad = \quad f(0) \quad = \quad 41, \quad a_1 \quad = \quad f'(0) \quad = \quad 0, \quad a_2 \quad = \quad \frac{f''(0)}{2} \quad = \quad \frac{7}{2}.$$

$$T_2(x) \quad := \quad \sum_{i=0}^{2} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\, x^i \quad = \quad \frac{f(0)}{0!}\, x^0 + \frac{f'(0)}{1!}\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 \quad = \quad 41 + \frac{7}{2}\, x^2$$

Angebotene Lösungen:

1 $1 + x + x^2$	2 $41 + 7x^2$	3 $25 + 5x$	4 $31 + 7\sqrt{5}x$
5 $25 + 5x^2$	☒ $41 + \frac{7}{2}x^2$	7 $1 + x + \frac{x^2}{2}$	8 $\frac{41}{2} + 7x^2$
9 $41 + \frac{7}{2}x$	10 $\frac{41}{2} + 7x$	11 $31 + 7\sqrt{5}x^2$	12 Es gibt keine

Fehlerinterpretation:

1	$1 + x + x^2$	DF: Lösung geraten
2	$41 + 7x^2$	RF: 2! im Nenner vergessen
3	$25 + 5x$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
4	$31 + 7\sqrt{5}x$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
5	$25 + 5x^2$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
☒	$41 + \frac{7}{2}x^2$	richtig
7	$1 + x + \frac{x^2}{2}$	DF: Lösung geraten
8	$\frac{41}{2} + 7x^2$	RF: Durch 2! an der falschen Stelle dividiert
9	$41 + \frac{7}{2}x$	RF: x^2 vergessen
10	$\frac{41}{2} + 7x$	RF: Durch 2! an der falschen Stelle dividiert
11	$31 + 7\sqrt{5}x^2$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
12	Es gibt keine	DF: Doch

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 31 0 2004110002	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.3: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 2(3x + 5)^3$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $x_3 > 0$.

Die Formel lautet: $x_1(x_2\, x + x_3)^3$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 5$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lclcllcl} f'(x) & = & (2(3x+5)^3)' & = & 18(3x+5)^2 & \Rightarrow & f'(0) & = & 450 \\ f''(x) & = & (18(3x+5)^2)' & = & 108(3x+5) & \Rightarrow & f''(0) & = & 540 \\ f'''(x) & = & (108(3x+5))' & = & 324 & & & & \\ f''''(x) & \equiv & 0 & = & f^{(n)}(x) \;\; n \geq 4 & & & & \end{array}$$

Die Taylorreihe bricht ab, die Funktion ist also ein Polynom. Damit ist

$$a_0 = f(0) = 250, \quad a_1 = f'(0) = 450, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{540}{2}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{324}{6}.$$

Die Taylorreihe ist das Polynom: $\quad 250 + 450\,x + 270\,x^2 + 54\,x^3$.

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man die Funktion mit der binomischen Formel ausmultipliziert hätte:

$$2(3x+5)^3 = 2((3x)^3 + 3(3x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 3x \cdot 5^2 + 5^3)$$

Angebotene Lösungen:

1	$\frac{2(3x+5)^4}{5-3x}$	2	Es gibt keine
☒	$250 + 450x + 270x^2 + 54x^3$	4	$2\sum_{i=0}^{3}(3x+5)^i$
5	$\frac{2(3x+5)^4}{1-x}$	6	$324 + 540x + 450x^2 + 250x^3$
7	$\sum_{i=0}^{3}(2(3x+5))^i$	8	$\frac{162x^4+1250}{1-x}$
9	$250 + 450x + 540x^2 + 324x^3$	10	$54 + 270x + 450x^2 + 250x^3$
11	$\sum_{i=0}^{\infty}(2(3x+5))^i$	12	$2\sum_{i=0}^{\infty}(3x+5)^i$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{2(3x+5)^4}{5-3x}$	DF: Lösung geraten
2	Es gibt keine	DF: Doch
☒	$250+450x+270x^2+54x^3$	richtig
4	$2\sum_{i=0}^{3}(3x+5)^i$	DF: Lösung geraten
5	$\frac{2(3x+5)^4}{1-x}$	DF: Lösung geraten
6	$324+540x+450x^2+250x^3$	RF: Koeffizienten falsch verteilt
7	$\sum_{i=0}^{3}(2(3x+5))^i$	DF: Lösung geraten
8	$\frac{162x^4+1250}{1-x}$	DF: Lösung geraten
9	$250+450x+540x^2+324x^3$	RF: Nicht durch $i!$ geteilt
10	$54+270x+450x^2+250x^3$	RF: Koeffizienten falsch verteilt
11	$\sum_{i=0}^{\infty}(2(3x+5))^i$	DF: Lösung geraten
12	$2\sum_{i=0}^{\infty}(3x+5)^i$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 50 0 2004110003	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.4: Entwickeln Sie die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=1+5x+e^{4x}$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1>0,\ \ x_2>1,\ \ x_3>1$.

Die Formel lautet: $x_1+x_2\,x+e^{x_3\,x}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=1 \qquad x_2=5 \qquad x_3=4$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ mit $a_i=\dfrac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).
Das Polynom vor der $e-$ Funktion wird einfach zu den ersten Koeffizienten der Taylorreihe addiert.
Die Ableitung von e^{ax} ist $a\cdot e^{ax}$.

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lclclcl} f(x) & = & 1+5x+e^{4x} & & & \Rightarrow & f(0) = 1+1=2 \\ f'(x) & = & (1+5x+e^{4x})' & = & 5+4\cdot e^{4x} & \Rightarrow & f'(0) = 9 \\ f''(x) & = & (5+4\cdot e^{4x})' & = & 16\cdot e^{4x} & \Rightarrow & f''(0) = 16 \\ f^{(n)}(x) & = & 4^n\cdot e^{4x} & & \text{für } n\geq 2 & \Rightarrow & \\ & & & & & & f^{(n)}(0)=4^n \end{array}$$

Damit gilt für $n\geq 2$:

$$a_0 = f(0) = 2, \quad a_1 = f'(0) = 9, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{16}{2}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{4^n}{n!}.$$

$$\text{Die Taylorreihe ist} \qquad 2 + 9\,x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^n}{n!}\cdot x^n \ .$$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man $4x=w$ substituiert hätte:

$$1+5x+e^w = 1+5x + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!} = 1+5x+1+w + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(4x)^n}{n!} = 2+9x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^n}{n!}\cdot x^n$$

Angebotene Lösungen:

1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot x^n$	2 $\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot (1+5x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$
4 $\sum_{n=0}^{\infty} (1+5x) + \frac{4^n}{n!} \cdot x^n$	5 $2+9x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 4 \cdot x^n$	6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 4 \cdot x^n$
7 $4 \cdot (1+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot x^n)$	8 $4 \cdot (1+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n)$	☒ $2+9x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot x^n$
10 $1+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot x^n$	11 $\sum_{n=0}^{\infty} (1+5x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	12 Es gibt keine

Fehlerinterpretation:

1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot x^n$	RF: Polynom am Anfang vergessen
2 $\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot (1+5x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Reihenentwicklung der $e-$ Funktion
4 $\sum_{n=0}^{\infty} (1+5x) + \frac{4^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
5 $2+9x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 4 \cdot x^n$	DF: Substitution falsch
6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 4 \cdot x^n$	RF: Polynom am Anfang vergessen
7 $4 \cdot (1+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot x^n)$	DF: Lösung geraten
8 $4 \cdot (1+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n)$	DF: Lösung geraten
☒ $2+9x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot x^n$	richtig
10 $1+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Polynom nur abgeschrieben
11 $\sum_{n=0}^{\infty} (1+5x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
12 Es gibt keine	DF: Doch

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 72 0 2004110006	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.5: Entwickeln Sie eine Stammfunktion von $f(x) = 5 \cdot \cos(6\,x^2)$ in eine Taylorreihe um 0.

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $f(x) = x_1 \cdot \cos(x_2\,x^2)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \qquad x_2 = 6$.

Erklärung:

Die Funktion $\cos x^2$ ist (vermutlich) nicht elementar integrierbar. Deshalb ist es sinnvoll, zuerst mittels Substitution die Taylorreihenentwicklung von $\cos x^2$ zu bestimmen und diese dann zu integrieren.

Rechnung:

Die Taylorreihenentwicklung von $\cos x$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$.
Wir substituieren $6\,x^2 = w$ und erhalten:

$$\cos(6\,x^2) \quad = \quad \cos w \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot w^{2n}}{(2n)!} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (6\,x^2)^{2n}}{(2n)!} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\int 5 \cdot \cos(6\,x^2) &= \int 5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!} && \text{Taylorreihenentwicklung} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int 5 \cdot \frac{(-1)^n \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!} && \text{Integration und Summation vertauscht (und mehr ..)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \frac{(-1)^n \cdot 6^{2n} \cdot (\frac{x^{4n+1}}{4n+1} + c)}{(2n)!} && \text{Integriert} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!} && c = 0 \text{ gewählt}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	2	Es gibt keine	☒	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$
4	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	5	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	6	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$
7	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$	8	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$	9	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$
10	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$	11	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	12	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)(2n)!}$

Fehlerinterpretation:

1	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	DF: Quadrat nicht beachtet
2	Es gibt keine	DF: Doch
☒	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	richtig
4	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	RF: Quadrat auf 6 mitbezogen
5	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
6	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
7	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
8	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$	DF: Falsch Integriert
9	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	RF: Fakultät falsch zusammengefasst
10	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$	DF: Quadrat nicht beachtet
11	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	RF: Quadrat auf 6 mitbezogen
12	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)(2n)!}$	DF: Falsch Integriert

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 105 0 2004110004	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.6: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 3x \cdot e^{-4x}$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1, \;\; x_2 > 1, x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $x_1\, x \cdot e^{-x_2\, x}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \qquad x_2 = 4$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

$(x \cdot e^x)' = (x+1) \cdot e^x$.

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lclcll}
f(x) & = & 3x \cdot e^{-4x} & & & \Rightarrow\; f(0) = 0 \\
f'(x) & = & 3e^{-4x} - 4 \cdot 3x \cdot e^{-4x} & = & (3-12x) \cdot e^{-4x} & \Rightarrow\; f'(0) = 3 \\
f''(x) & = & -12e^{-4x} + 4 \cdot (12x-3) \cdot e^{-4x} & = & (-24+48x) \cdot e^{-4x} & \Rightarrow\; f''(0) = -12 \\
f'''(x) & = & -4(-24+48x) \cdot e^{-4x} + 48 \cdot e^{-4x} & = & (144-192x) \cdot e^{-4x} & \Rightarrow\; f'''(0) = 144 \\
f^{(n)}(x) & = & (-1)^n(3 \cdot 4^n \cdot x - 3 \cdot n \cdot 4^{n-1}) \cdot e^{-4x} \text{ für } n \geq 1 & & & \Rightarrow\; f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot 3 \cdot n \cdot 4^{n-1}
\end{array}$$

Damit gilt für $n \geq 1$:

$$a_0 = f(0) = 0, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-2)^{n-1} \cdot 3 \cdot n}{n!} = \frac{3 \cdot (-2)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Die Taylorreihe ist $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot (-2)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man $-4x = w$ substituiert hätte:

$$\begin{aligned}
3x \cdot e^w &= 3x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} && \text{Taylorreihe von } e^w \\
&= 3x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4x)^n}{n!} && \text{Rücksubstitution} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot \frac{(-4)^n}{n!} \cdot x \cdot x^n && \text{Distributivgesetz} \\
&= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{3\cdot(-4)^n}{n!} \cdot x^{n+1} && \text{Potenzgesetz} \\
&= \sum_{m-1=0}^{m-1=\infty} \frac{3\cdot(-4)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot x^m && \text{Indexverschiebung } m = n+1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot(-4)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n && m \text{ wieder als } n \text{ geschrieben}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

☐ 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-4)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	☐ 2 Es gibt keine	☐ 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$
☐ 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 4^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	☒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot(-4)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	☐ 6 $3x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n!} \cdot x^n$
☐ 7 $3x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	☐ 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	☐ 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot(-4)^n}{n!} \cdot x^{n-1}$
☐ 10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 4^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	☐ 11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-4)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	☐ 12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 4^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$

Fehlerinterpretation:

☐ 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-4)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
☐ 2 Es gibt keine	DF: Doch
☐ 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
☐ 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 4^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Durch x geteilt
☒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot(-4)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	richtig
☐ 6 $3x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
☐ 7 $3x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
☐ 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
☐ 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot(-4)^n}{n!} \cdot x^{n-1}$	RF: Durch x geteilt
☐ 10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 4^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Durch x geteilt
☐ 11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-4)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
☐ 12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 4^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Bruchrechnen

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu