

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 11

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 32 0 2004110003	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.1: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = 3 + 2x + e^{5x}$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 0$, $x_2 > 1$, $x_3 > 1$.

Die Formel lautet: $x_1 + x_2 x + e^{x_3 x}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3$ $x_2 = 2$ $x_3 = 5$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

Das Polynom vor der e - Funktion wird einfach zu den ersten Koeffizienten der Taylorreihe addiert.

Die Ableitung von e^{ax} ist $a \cdot e^{ax}$.

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + 2x + e^{5x} && \Rightarrow f(0) = 3 + 1 = 4 \\ f'(x) &= (3 + 2x + e^{5x})' = 2 + 5 \cdot e^{5x} && \Rightarrow f'(0) = 7 \\ f''(x) &= (2 + 5 \cdot e^{5x})' = 25 \cdot e^{5x} && \Rightarrow f''(0) = 25 \\ f^{(n)}(x) &= 5^n \cdot e^{5x} && \text{für } n \geq 2 \Rightarrow f^{(n)}(0) = 5^n \end{aligned}$$

Damit gilt für $n \geq 2$:

$$a_0 = f(0) = 4, \quad a_1 = f'(0) = 7, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{25}{2}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{5^n}{n!}.$$

$$\text{Die Taylorreihe ist} \quad 4 + 7x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n}{n!} \cdot x^n.$$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man $5x = w$ substituiert hätte:

$$3 + 2x + e^w = 3 + 2x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = 3 + 2x + 1 + w + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n!} = 4 + 7x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n}{n!} \cdot x^n$$

Angebotene Lösungen:

- | | | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 $\sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot (3 + 2x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$ | <input type="checkbox"/> 2 $4 + 7x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n}{n!} \cdot x^n$ | <input type="checkbox"/> 3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 5 \cdot x^n$ |
| <input type="checkbox"/> 4 $\sum_{n=0}^{\infty} (3 + 2x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$ | <input type="checkbox"/> 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} \cdot x^n$ | <input type="checkbox"/> 6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$ |
| <input type="checkbox"/> 7 $3 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n}{n!} \cdot x^n$ | <input type="checkbox"/> 8 Es gibt keine | <input type="checkbox"/> 9 $4 + 7x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 5 \cdot x^n$ |
| <input type="checkbox"/> 10 $5 \cdot (3 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n)$ | <input type="checkbox"/> 11 $5 \cdot (3 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n}{n!} \cdot x^n)$ | <input type="checkbox"/> 12 $\sum_{n=0}^{\infty} (3 + 2x) + \frac{5^n}{n!} \cdot x^n$ |

Fehlerinterpretation:

<input type="checkbox"/>	$\sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot (3 + 2x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
<input checked="" type="checkbox"/>	$4 + 7x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n}{n!} \cdot x^n$	richtig
<input type="checkbox"/>	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 5 \cdot x^n$	RF: Polynom am Anfang vergessen
<input type="checkbox"/>	$\sum_{n=0}^{\infty} (3 + 2x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/>	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} \cdot x^n$	RF: Polynom am Anfang vergessen
<input type="checkbox"/>	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Reihenentwicklung der e-Funktion
<input type="checkbox"/>	$3 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Polynom nur abgeschrieben
<input type="checkbox"/>	Es gibt keine	DF: Doch
<input type="checkbox"/>	$4 + 7x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 5 \cdot x^n$	DF: Substitution falsch
<input type="checkbox"/>	$5 \cdot (3 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n)$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/>	$5 \cdot (3 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n}{n!} \cdot x^n)$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/>	$\sum_{n=0}^{\infty} (3 + 2x) + \frac{5^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten

MV 04 Blatt 11 Kapitel 7.4 Taylorreihen
keine Differenzialrechnung Nummer: 45 0 2004110004 Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 11.1.2: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = 4x \cdot e^{-2x}$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

$x_n =$ Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $x_1 x \cdot e^{-x_2 x}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4$ $x_2 = 2$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

$$(x \cdot e^x)' = (x + 1) \cdot e^x.$$

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x \cdot e^{-2x} && \Rightarrow f(0) &= 0 \\ f'(x) &= 4e^{-2x} - 2 \cdot 4x \cdot e^{-2x} &= (4 - 8x) \cdot e^{-2x} &\Rightarrow f'(0) &= 4 \\ f''(x) &= -8e^{-2x} + 2 \cdot (8x - 4) \cdot e^{-2x} &= (-16 + 16x) \cdot e^{-2x} &\Rightarrow f''(0) &= -8 \\ f'''(x) &= -2(-16 + 16x) \cdot e^{-2x} + 16 \cdot e^{-2x} &= (48 - 32x) \cdot e^{-2x} &\Rightarrow f'''(0) &= 48 \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n (4 \cdot 2^n \cdot x - 4 \cdot n \cdot 2^{n-1}) \cdot e^{-2x} \text{ für } n \geq 1 && \Rightarrow f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1} \cdot 4 \cdot n \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

Damit gilt für $n \geq 1$:

$$a_0 = f(0) = 0, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-2)^{n-1} \cdot 4 \cdot n}{n!} = \frac{4 \cdot (-2)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Die Taylorreihe ist
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-2)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man $-2x = w$ substituiert hätte:

$$\begin{aligned}
 4x \cdot e^w &= 4x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} && \text{Taylorreihe von } e^w \\
 &= 4x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} && \text{Rücksubstitution} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \frac{(-2)^n}{n!} \cdot x \cdot x^n && \text{Distributivgesetz} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot (-2)^n}{n!} \cdot x^{n+1} && \text{Potenzgesetz} \\
 &= \sum_{m-1=0}^{m-1=\infty} \frac{4 \cdot (-2)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot x^m && \text{Indexverschiebung } m = n + 1 \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-2)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n && m \text{ wieder als } n \text{ geschrieben}
 \end{aligned}$$

Angeborene Lösungen:

<input type="checkbox"/> 1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-2)^n}{n!} \cdot x^{n-1}$	<input type="checkbox"/> 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	<input type="checkbox"/> 3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4+2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$
<input type="checkbox"/> 4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-2)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	<input checked="" type="checkbox"/> X	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-2)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	<input type="checkbox"/> 6	$4x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$
<input type="checkbox"/> 7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4+2)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	<input type="checkbox"/> 8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	<input type="checkbox"/> 9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$
<input type="checkbox"/> 10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	<input type="checkbox"/> 11	Es gibt keine	<input type="checkbox"/> 12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$

Fehlerinterpretation:

<input type="checkbox"/> 1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-2)^n}{n!} \cdot x^{n-1}$	RF: Durch x geteilt
<input type="checkbox"/> 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	RF: Durch x geteilt
<input type="checkbox"/> 3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4+2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-2)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
<input checked="" type="checkbox"/> X	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-2)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	richtig
<input type="checkbox"/> 6	$4x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4+2)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Durch x geteilt
<input type="checkbox"/> 9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Durch x geteilt
<input type="checkbox"/> 11	Es gibt keine	DF: Doch
<input type="checkbox"/> 12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Bruchrechnen

MV 04 Blatt 11 Kapitel 7.4 Taylorreihen
keine Differenzialrechnung Nummer: 47 0 2004110002 Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 11.1.3: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = 2(2x + 2)^3$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

$x_n =$ Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $x_3 > 0$.

Die Formel lautet: $x_1(x_2 x + x_3)^3$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2$ $x_2 = 2$ $x_3 = 2$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2(2x+2)^3)' = 12(2x+2)^2 &\Rightarrow f'(0) &= 48 \\ f''(x) &= (12(2x+2)^2)' = 48(2x+2) &\Rightarrow f''(0) &= 96 \\ f'''(x) &= (48(2x+2))' = 96 \\ f^{(4)}(x) &\equiv 0 &= f^{(n)}(x) &n \geq 4 \end{aligned}$$

Die Taylorreihe bricht ab, die Funktion ist also ein Polynom. Damit ist

$$a_0 = f(0) = 16, \quad a_1 = f'(0) = 48, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{96}{2}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{96}{6}.$$

$$\text{Die Taylorreihe ist das Polynom: } 16 + 48x + 48x^2 + 16x^3.$$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man die Funktion mit der binomischen Formel ausmultipliziert hätte:

$$2(2x+2)^3 = 2((2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2x \cdot 2^2 + 2^3)$$

Angeborene Lösungen:

- | | | | |
|----------------------------------------|----------------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | Es gibt keine | <input type="checkbox"/> 2 | $\sum_{i=0}^{\infty} (2(2x+2))^i$ |
| <input type="checkbox"/> 3 | $96 + 96x + 48x^2 + 16x^3$ | <input type="checkbox"/> 4 | $2 \sum_{i=0}^3 (2x+2)^i$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $16 + 48x + 96x^2 + 96x^3$ | <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{2(2x+2)^4}{2-2x}$ |
| <input type="checkbox"/> 7 | $2 \sum_{i=0}^{\infty} (2x+2)^i$ | <input type="checkbox"/> 8 | $\frac{32x^4+32}{2-2x}$ |
| <input type="checkbox"/> 9 | $\sum_{i=0}^3 (2(2x+2))^i$ | <input type="checkbox"/> 10 | $\frac{32x^4+32}{1-x}$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 11 | $16 + 48x + 48x^2 + 16x^3$ | <input type="checkbox"/> 12 | $\frac{2(2x+2)^4}{1-x}$ |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|----------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | Es gibt keine | DF: Doch |
| <input type="checkbox"/> 2 | $\sum_{i=0}^{\infty} (2(2x+2))^i$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 3 | $96 + 96x + 48x^2 + 16x^3$ | RF: Koeffizienten falsch verteilt |
| <input type="checkbox"/> 4 | $2 \sum_{i=0}^3 (2x+2)^i$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 5 | $16 + 48x + 96x^2 + 96x^3$ | RF: Nicht durch $i!$ geteilt |
| <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{2(2x+2)^4}{2-2x}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 7 | $2 \sum_{i=0}^{\infty} (2x+2)^i$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 8 | $\frac{32x^4+32}{2-2x}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 9 | $\sum_{i=0}^3 (2(2x+2))^i$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 10 | $\frac{32x^4+32}{1-x}$ | DF: Lösung geraten |
| <input checked="" type="checkbox"/> 11 | $16 + 48x + 48x^2 + 16x^3$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 12 | $\frac{2(2x+2)^4}{1-x}$ | DF: Lösung geraten |

MV 04 Blatt 11 Kapitel 7.4 Taylorreihen
keine Differenzialrechnung Nummer: 60 0 2004110006 Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 11.1.4: Entwickeln Sie eine Stammfunktion von $f(x) = 4 \cdot \cos(5x^2)$ in eine Taylorreihe um 0.

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $f(x) = x_1 \cdot \cos(x_2 x^2)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4$ $x_2 = 5$.

Erklärung:

Die Funktion $\cos x^2$ ist (vermutlich) nicht elementar integrierbar. Deshalb ist es sinnvoll, zuerst mittels Substitution die Taylorreihenentwicklung von $\cos x^2$ zu bestimmen und diese dann zu integrieren.

Rechnung:

Die Taylorreihenentwicklung von $\cos x$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$.

Wir substituieren $5x^2 = w$ und erhalten:

$$\cos(5x^2) = \cos w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot w^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (5x^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \int 4 \cdot \cos(5x^2) &= \int 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!} && \text{Taylorreihenentwicklung} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int 4 \cdot \frac{(-1)^n \cdot 5^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!} && \text{Integration und Summation vertauscht (und mehr ..)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \frac{(-1)^n \cdot 5^{2n} \cdot (\frac{x^{4n+1}}{4n+1} + c)}{(2n)!} && \text{Integriert} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!} && c = 0 \text{ gew\u00e4hlt} \end{aligned}$$

Angebote L\u00f6sungen:

- | | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$ | <input type="checkbox"/> 2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ | <input type="checkbox"/> 3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$ |
| <input type="checkbox"/> 4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$ | <input type="checkbox"/> 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$ | <input type="checkbox"/> 6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$ |
| <input type="checkbox"/> 7 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$ | <input type="checkbox"/> 8 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)(2n)!}$ | <input type="checkbox"/> 9 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$ |
| <input type="checkbox"/> 10 Es gibt keine | <input type="checkbox"/> 11 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{4n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$ |

Fehlerinterpretation:

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$ | RF: Fakult\u00e4t falsch zusammengefasst |
| <input type="checkbox"/> 2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ | DF: Quadrat nicht beachtet |
| <input type="checkbox"/> 3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$ | RF: Quadrat auf 5 mitbezogen |
| <input type="checkbox"/> 4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$ | DF: Falsch Integriert |
| <input type="checkbox"/> 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$ | DF: Quadrat nicht beachtet |
| <input type="checkbox"/> 6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$ | DF: Falsch Integriert |
| <input type="checkbox"/> 7 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$ | DF: Falsch Integriert |
| <input type="checkbox"/> 8 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)(2n)!}$ | DF: Falsch Integriert |
| <input type="checkbox"/> 9 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$ | RF: Quadrat auf 5 mitbezogen |
| <input type="checkbox"/> 10 Es gibt keine | DF: Doch |
| <input type="checkbox"/> 11 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{4n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$ | DF: Falsch Integriert |
| <input checked="" type="checkbox"/> $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 5^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$ | richtig |

MV 04 Blatt 11 Kapitel 7.4 Taylorreihen
keine Differenzialrechnung Nummer: 76 0 2004110001 Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 11.1.5:

Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = 5\sqrt{2x^2 + 49} + 7$ in ein Taylorpolynom vom Grad 2 (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1, 2, 3, 4$.
 x_2 darf keine Quadratzahl sein.

Die Formel lautet: $x_1 \sqrt{x_2 x^2 + \{x_3 \cdot x_3\}} + x_4$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5$ $x_2 = 2$ $x_3 = 7$ $x_4 = 7$.

Erklärung:

Taylorpolynome sind folgendermaßen definiert: $T_n(x) := \sum_{i=0}^n a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$f'(x) = (5\sqrt{2x^2 + 49} + 7)' = \frac{5 \cdot 2x}{2\sqrt{2x^2 + 49}} = \frac{10x}{\sqrt{2x^2 + 49}} \Rightarrow f'(0) = 0$$

$f'(0) = 0$ war erwartet worden, weil f achsensymmetrisch zur y -Achse ist

$$f''(x) = \frac{10 \cdot \sqrt{2x^2 + 49} - 10x \cdot \frac{2 \cdot 2x}{2\sqrt{2x^2 + 49}}}{(\sqrt{2x^2 + 49})^2} = \frac{10(2x^2 + 49) - 20x^2}{(2x^2 + 49)\sqrt{2x^2 + 49}} = \frac{490}{(2x^2 + 49)\sqrt{2x^2 + 49}} \Rightarrow f''(0) = \frac{490}{49\sqrt{49}} = \frac{10}{7}$$

Damit ist $a_0 = f(0) = 42$, $a_1 = f'(0) = 0$, $a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{5}{7}$.

$$T_2(x) := \sum_{i=0}^2 \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = \frac{f(0)}{0!} x^0 + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 = 42 + \frac{5}{7} x^2$$

Angebote Lösungen:

- | | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------|-----------------------------|-------------------------|---------------------------------------|-----------------------|-----------------------------|------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $56 + 5\sqrt{2}x^2$ | <input type="checkbox"/> 2 | $1 + x + \frac{x^2}{2}$ | <input type="checkbox"/> 3 | $21 + \frac{10}{7}x$ | <input type="checkbox"/> 4 | $42 + \frac{10}{7}x^2$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $1 + x + x^2$ | <input type="checkbox"/> 6 | $21 + \frac{10}{7}x^2$ | <input type="checkbox"/> 7 | $42 + \frac{10}{7}x$ | <input type="checkbox"/> 8 | $56 + 5\sqrt{2}x$ |
| <input type="checkbox"/> 9 | Es gibt keine | <input type="checkbox"/> 10 | $49 + 2x^2$ | <input checked="" type="checkbox"/> X | $42 + \frac{5}{7}x^2$ | <input type="checkbox"/> 12 | $49 + 2x$ |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|---------------------------------------|-------------------------|-----------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $56 + 5\sqrt{2}x^2$ | DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben |
| <input type="checkbox"/> 2 | $1 + x + \frac{x^2}{2}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 3 | $21 + \frac{10}{7}x$ | RF: Durch 2! an der falschen Stelle dividiert |
| <input type="checkbox"/> 4 | $42 + \frac{10}{7}x^2$ | RF: 2! im Nenner vergessen |
| <input type="checkbox"/> 5 | $1 + x + x^2$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 6 | $21 + \frac{10}{7}x^2$ | RF: Durch 2! an der falschen Stelle dividiert |
| <input type="checkbox"/> 7 | $42 + \frac{10}{7}x$ | RF: 2! im Nenner vergessen |
| <input type="checkbox"/> 8 | $56 + 5\sqrt{2}x$ | DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben |
| <input type="checkbox"/> 9 | Es gibt keine | DF: Doch |
| <input type="checkbox"/> 10 | $49 + 2x^2$ | DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben |
| <input checked="" type="checkbox"/> X | $42 + \frac{5}{7}x^2$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 12 | $49 + 2x$ | DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben |

MV 04 Blatt 11 Kapitel 7.4 Taylorreihen
keine Differenzialrechnung Nummer: 99 0 2004110005 Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 11.1.6: Entwickeln Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \quad f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x} \cdot \sin(6x) & \text{für } x \neq 0 \\ 30 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{in eine Taylorreihe um 0.}$$

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $\frac{x_1}{x} \cdot \sin(x_2 x)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5$ $x_2 = 6$.

Erklärung:

Durch die Quotientenregel werden die einzelnen Ableitungen sehr schnell sehr kompliziert. Deshalb ist es eventuell sinnvoller, auf die Reihenentwicklung des Sinus zurückzugreifen und mit Substitution und Regeln aus der Summen - Reihenrechnung die Taylorreihe zu finden.

Rechnung:

$$\lim_{x \rightarrow 0} a \cdot \frac{\sin bx}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} a \cdot \frac{b \cdot \cos bx}{1} = a \cdot b$$

Damit ist $f(x)$ bei $x = 0$ stetig. Die Taylorreihenentwicklung von $\sin x$ ist $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot x^{2i+1}}{(2i+1)!}$.
Wir substituieren $6x = w$ und erhalten:

$$\sin(6x) = \sin w = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot w^{2i+1}}{(2i+1)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot (6x)^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \frac{5}{x} \cdot \sin(6x) &= \frac{5}{x} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot (6x)^{2i+1}}{(2i+1)!} && \text{Entwicklung von } \sin x \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{5}{x} \cdot \frac{(-1)^i \cdot (6x)^{2i+1}}{(2i+1)!} && \text{Distributivgesetz} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 5 \cdot 6^{2i+1} \cdot x^{2i+1}}{x \cdot (2i+1)!} && \text{Bruchmultiplikation} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 5 \cdot 6^{2i+1} \cdot x^{2i}}{(2i+1)!} && x \text{ gekürzt} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 5 \cdot 6^{2i+1}}{(2i+1)!} \cdot x^{2i} \end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

<input type="checkbox"/> 1	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 30}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	<input type="checkbox"/> 2	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 5 \cdot 6^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	<input type="checkbox"/> 3	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 5 \cdot 6^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$
<input type="checkbox"/> 4	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 30}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	<input type="checkbox"/> 5	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	<input type="checkbox"/> 6	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 5 \cdot 6^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$
<input type="checkbox"/> 7	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 30}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	<input checked="" type="checkbox"/> 8	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	<input type="checkbox"/> 9	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$
<input type="checkbox"/> 10	$\sum_{i=1}^{\infty} \infty \cdot x^{2n+1}$	<input type="checkbox"/> 11	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	<input type="checkbox"/> 12	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$

Fehlerinterpretation:

<input type="checkbox"/> 1	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 30}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
<input type="checkbox"/> 2	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 5 \cdot 6^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	RF: Untere Grenze der Summe ist falsch
<input type="checkbox"/> 3	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 5 \cdot 6^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
<input type="checkbox"/> 4	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 30}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	DF: Falsch substituiert
<input type="checkbox"/> 5	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	RF: Untere Grenze der Summe ist falsch
<input type="checkbox"/> 6	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 5 \cdot 6^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
<input type="checkbox"/> 7	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 30}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
<input checked="" type="checkbox"/> 8	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	richtig
<input type="checkbox"/> 9	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
<input type="checkbox"/> 10	$\sum_{i=1}^{\infty} \infty \cdot x^{2n+1}$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 11	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
<input type="checkbox"/> 12	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen

Allgemeine Hinweise:

Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware@yahoo.de).

Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: <http://www.vorkurs.de.vu>