Blatt Nr 11.06

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 11

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 1 0 2004110004	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.1: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 5x \cdot e^{-3x}$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1, \;\; x_2 > 1, x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $x_1\, x \cdot e^{-x_2\, x}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \qquad x_2 = 3$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \dfrac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

$(x \cdot e^x)' = (x+1) \cdot e^x$.

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lllll} f(x) & = & 5x \cdot e^{-3x} & & \Rightarrow & f(0) & = & 0 \\ f'(x) & = & 5e^{-3x} - 3 \cdot 5x \cdot e^{-3x} & = & (5-15x) \cdot e^{-3x} & \Rightarrow & f'(0) & = & 5 \\ f''(x) & = & -15e^{-3x} + 3 \cdot (15x-5) \cdot e^{-3x} & = & (-30+45x) \cdot e^{-3x} & \Rightarrow & f''(0) & = & -15 \\ f'''(x) & = & -3(-30+45x) \cdot e^{-3x} + 45 \cdot e^{-3x} & = & (135-135x) \cdot e^{-3x} & \Rightarrow & f'''(0) & = & 135 \\ f^{(n)}(x) & = & (-1)^n (5 \cdot 3^n \cdot x - 5 \cdot n \cdot 3^{n-1}) \cdot e^{-3x} \text{ für } n \geq 1 & & & \Rightarrow & f^{(n)}(0) & = & (-1)^{n-1} \cdot 5 \cdot n \cdot 3^{n-1} \end{array}$$

Damit gilt für $n \geq 1$:

$$a_0 = f(0) = 0, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-2)^{n-1} \cdot 5 \cdot n}{n!} = \frac{5 \cdot (-2)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$$\text{Die Taylorreihe ist} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-2)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man $-3x = w$ substituiert hätte:

$$\begin{array}{rcll} 5x \cdot e^w & = & 5x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} & \text{Taylorreihe von } e^w \\ & = & 5x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{n!} & \text{Rücksubstitution} \\ & = & \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \frac{(-3)^n}{n!} \cdot x \cdot x^n & \text{Distributivgesetz} \\ & = & \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{5 \cdot (-3)^n}{n!} \cdot x^{n+1} & \text{Potenzgesetz} \\ & = & \sum_{m-1=0}^{m-1=\infty} \frac{5 \cdot (-3)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot x^m & \text{Indexverschiebung } m = n+1 \\ & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-3)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n & m \text{ wieder als } n \text{ geschrieben} \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

[1] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	[2] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+3)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	[3] Es gibt keine
[4] $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!} \cdot x^n$	[X] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-3)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	[6] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-3)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$
[7] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	[8] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-3)^n}{n!} \cdot x^{n-1}$	[9] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$
[10] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+3)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	[11] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-3)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	[12] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-3)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$

Fehlerinterpretation:

1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 3^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Bruchrechnen
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+3)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
3	Es gibt keine	DF: Doch
4	$5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
☒	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-3)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	richtig
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-3)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	RF: Durch x geteilt
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Durch x geteilt
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-3)^n}{n!} \cdot x^{n-1}$	RF: Durch x geteilt
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 3^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Durch x geteilt
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+3)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-3)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-3)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 29 0 2004110006	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.2: Entwickeln Sie eine Stammfunktion von $f(x) = 5 \cdot \cos(4\,x^2)$ in eine Taylorreihe um 0.

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1, \;\; x_2 > 1, \;\; x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $f(x) = x_1 \cdot \cos(x_2\,x^2)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \qquad x_2 = 4$.

Erklärung:

Die Funktion $\cos x^2$ ist (vermutlich) nicht elementar integrierbar. Deshalb ist es sinnvoll, zuerst mittels Substitution die Taylorreihenentwicklung von $\cos x^2$ zu bestimmen und diese dann zu integrieren.

Rechnung:

Die Taylorreihenentwicklung von $\cos x$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$.
Wir substituieren $4\,x^2 = w$ und erhalten:

$$\cos(4\,x^2) \;=\; \cos w \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot w^{2n}}{(2n)!} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (4\,x^2)^{2n}}{(2n)!} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\int 5 \cdot \cos(4\,x^2) &= \int 5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!} && \text{Taylorreihenentwicklung} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int 5 \cdot \frac{(-1)^n \cdot 4^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!} && \text{Integration und Summation vertauscht (und mehr ..)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \frac{(-1)^n \cdot 4^{2n} \cdot (\frac{x^{4n+1}}{4n+1} + c)}{(2n)!} && \text{Integriert} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!} && c = 0 \text{ gewählt}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	2	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	3	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)(2n)!}$
4	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	5	Es gibt keine	6	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$
7	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$	8	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	☒	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$
10	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{4n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	11	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$	12	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$

Fehlerinterpretation:

1	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	DF: Quadrat nicht beachtet
2	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
3	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)(2n)!}$	DF: Falsch Integriert
4	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	RF: Quadrat auf 4 mitbezogen
5	Es gibt keine	DF: Doch
6	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	RF: Fakultät falsch zusammengefasst
7	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
8	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	RF: Quadrat auf 4 mitbezogen
☒	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	richtig
10	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{4n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
11	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$	DF: Quadrat nicht beachtet
12	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 4^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$	DF: Falsch Integriert

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 88 0 2004110001	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.3:

Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 4\sqrt{5x^2 + 16}{+}5$ in ein Taylorpolynom vom Grad 2 (um 0) .

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1, 2, 3, 4$.
x_2 darf keine Quadratzahl sein.

Die Formel lautet: $x_1 \sqrt{x_2\, x^2 + \{x_3 \cdot x_3\}} + x_4$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4$ $\quad x_2 = 5$ $\quad x_3 = 4$ $\quad x_4 = 5$.

Erklärung:

$$\text{Taylorpolynome sind folgendermaßen definiert:} \quad T_n(x) \quad := \quad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{mit} \quad a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$$

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$f'(x) \quad = \quad (4\sqrt{5x^2 + 16} + 5)' \quad = \quad \frac{4 \cdot 2 \cdot 5x}{2\sqrt{5x^2+16}} \quad = \quad \frac{20x}{\sqrt{5x^2+16}} \quad \Rightarrow \quad f'(0) \quad = \quad 0$$

$f'(0) \quad = \quad 0$ war erwartet worden, weil f achsensymmetrisch zur y - Achse ist

$$f''(x) \quad = \quad \frac{20 \cdot \sqrt{5x^2+16} - 20x \cdot \frac{2 \cdot 5x}{2\sqrt{5x^2+16}}}{(\sqrt{5x^2+16})^2} \quad = \quad \frac{20(5x^2+16) - 100x^2}{(5x^2+16)\sqrt{5x^2+16}} \quad = \quad \frac{320}{(5x^2+16)\sqrt{5x^2+16}} \quad \Rightarrow \quad f''(0) \quad = \quad \frac{320}{16\sqrt{16}} = 5.$$

$$\text{Damit ist} \quad a_0 \quad = \quad f(0) \quad = \quad 21, \quad a_1 \quad = \quad f'(0) \quad = \quad 0, \quad a_2 \quad = \quad \frac{f''(0)}{2} \quad = \quad \frac{5}{2}.$$

$$T_2(x) \quad := \quad \sum_{i=0}^{2} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\, x^i \quad = \quad \frac{f(0)}{0!}\, x^0 + \frac{f'(0)}{1!}\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 \quad = \quad 21 + \frac{5}{2}\, x^2$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{21}{2}+5x^2$	2 $\frac{21}{2}+5x$	3 $16+5x^2$	4 $21+5x^2$
5 $21+4\sqrt{5}x^2$	☒ $21+\frac{5}{2}x^2$	7 $1+x+x^2$	8 Es gibt keine
9 $1+x+\frac{x^2}{2}$	10 $16+5x$	11 $21+5x$	12 $21+4\sqrt{5}x$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{21}{2}+5x^2$	RF: Durch 2! an der falschen Stelle dividiert
2	$\frac{21}{2}+5x$	RF: Durch 2! an der falschen Stelle dividiert
3	$16+5x^2$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
4	$21+5x^2$	RF: 2! im Nenner vergessen
5	$21+4\sqrt{5}x^2$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
☒	$21+\frac{5}{2}x^2$	richtig
7	$1+x+x^2$	DF: Lösung geraten
8	Es gibt keine	DF: Doch
9	$1+x+\frac{x^2}{2}$	DF: Lösung geraten
10	$16+5x$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
11	$21+5x$	RF: 2! im Nenner vergessen
12	$21+4\sqrt{5}x$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 91 0 2004110005	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.4: Entwickeln Sie die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}\cdot\sin(3x) & \text{für } x\neq 0 \\ 12 & \text{für } x=0 \end{cases} \qquad \text{in eine Taylorreihe um 0.}$$

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1>1$, $x_2>1$, $x_1\neq x_2$.

Die Formel lautet: $\frac{x_1}{x}\cdot\sin(x_2\,x)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=4$ $\quad x_2=3$.

Erklärung:

Durch die Quotientenregel werden die einzelnen Ableitungen sehr schnell sehr kompliziert. Deshalb ist es eventuell sinnvoller, auf die Reihenentwicklung des Sinus zurückzugreifen und mit Substitution und Regeln aus der Summen - Reihenrechnung die Taylorreihe zu finden.

Rechnung:

$$\lim_{x\to 0} a\cdot\frac{\sin bx}{x} \;=^H\; \lim_{x\to 0} a\cdot\frac{b\cdot\cos bx}{1} = a\cdot b$$

Damit ist $f(x)$ bei $x=0$ stetig. Die Taylorreihenentwicklung von $\sin x$ ist $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
Wir substituieren $3x=w$ und erhalten:

$$\sin(3x) = \sin w = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot w^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x}\cdot\sin(3x) &= \tfrac{4}{x}\cdot\textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} && \text{Entwicklung von } \sin x\\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{4}{x}\cdot\frac{(-1)^n\cdot(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} && \text{Distributivgesetz}\\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 4\cdot 3^{2n+1}\cdot x^{2n+1}}{x\cdot(2n+1)!} && \text{Bruchmultiplikation}\\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 4\cdot 3^{2n+1}\cdot x^{2n}}{(2n+1)!} && x \text{ gekürzt}\\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 4\cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

[1] ∞	[2] $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n}$	[3] $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 12}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$
[4] $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 12}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	[X] $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	[6] $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$
[7] $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$	[8] $\sum_{i=1}^{\infty} \infty \cdot x^{2n+1}$	[9] $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$
[10] $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	[11] $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	[12] $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n+1}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$

Fehlerinterpretation:

[1] ∞	DF: Lösung geraten
[2] $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n}$	RF: Untere Grenze der Summe ist falsch
[3] $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 12}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
[4] $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 12}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	DF: Falsch substituiert
[X] $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	richtig
[6] $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
[7] $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
[8] $\sum_{i=1}^{\infty} \infty \cdot x^{2n+1}$	DF: Lösung geraten
[9] $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
[10] $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	RF: Untere Grenze der Summe ist falsch
[11] $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
[12] $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{2n+1}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 92 0 2004110003	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.5: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 1 + 6x + e^{4x}$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 0,\;\; x_2 > 1,\;\; x_3 > 1$.

Die Formel lautet: $x_1 + x_2\, x + e^{x_3\, x}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 1 \qquad x_2 = 6 \qquad x_3 = 4$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $\displaystyle f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $\displaystyle a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

Das Polynom vor der $e-$ Funktion wird einfach zu den ersten Koeffizienten der Taylorreihe addiert.
Die Ableitung von e^{ax} ist $a \cdot e^{ax}$.

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lclcllcl}
f(x) & = & 1 + 6x + e^{4x} & & & \Rightarrow & f(0) & = & 1 + 1 = 2 \\
f'(x) & = & (1 + 6x + e^{4x})' & = & 6 + 4 \cdot e^{4x} & \Rightarrow & f'(0) & = & 10 \\
f''(x) & = & (6 + 4 \cdot e^{4x})' & = & 16 \cdot e^{4x} & \Rightarrow & f''(0) & = & 16 \\
f^{(n)}(x) & = & 4^n \cdot e^{4x} & & \text{für } n \geq 2 & \Rightarrow & & &
\end{array}$$

$$f^{(n)}(0) = 4^n$$

Damit gilt für $n \geq 2$:

$$a_0 = f(0) = 2, \quad a_1 = f'(0) = 10, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{16}{2}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{4^n}{n!}.$$

$$\text{Die Taylorreihe ist} \qquad 2 + 10x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot x^n .$$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man $4x = w$ substituiert hätte:

$$1 + 6x + e^w = 1 + 6x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = 1 + 6x + 1 + w + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!} = 2 + 10x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot x^n$$

Angebotene Lösungen:

1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$	2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot x^n$	3 $\sum_{n=0}^{\infty}(1+6x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$
4 $4 \cdot (1 + 6x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n)$	☒ $2 + 10x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot x^n$	6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 4 \cdot x^n$
7 Es gibt keine	8 $2 + 10x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 4 \cdot x^n$	9 $\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot (1+6x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$
10 $1 + 6x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot x^n$	11 $4 \cdot (1 + 6x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot x^n)$	12 $\sum_{n=0}^{\infty}(1+6x) + \frac{4^n}{n!} \cdot x^n$

Fehlerinterpretation:

1	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Reihenentwicklung der $e-$ Funktion
2	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot x^n$	RF: Polynom am Anfang vergessen
3	$\sum_{n=0}^{\infty}(1+6x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
4	$4 \cdot (1 + 6x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n)$	DF: Lösung geraten
☒	$2 + 10x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot x^n$	richtig
6	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 4 \cdot x^n$	RF: Polynom am Anfang vergessen
7	Es gibt keine	DF: Doch
8	$2 + 10x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 4 \cdot x^n$	DF: Substitution falsch
9	$\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot (1+6x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
10	$1 + 6x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Polynom nur abgeschrieben
11	$4 \cdot (1 + 6x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot x^n)$	DF: Lösung geraten
12	$\sum_{n=0}^{\infty}(1+6x) + \frac{4^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 96 0 2004110002	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.6: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 3(6x+4)^3$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1, \;\; x_2 > 1, \;\; x_3 > 0$.

Die Formel lautet: $x_1(x_2\,x + x_3)^3$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 6 \quad x_3 = 4$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lclcll} f'(x) &=& (3(6x+4)^3)' &=& 54(6x+4)^2 & \Rightarrow \; f'(0) = 864 \\ f''(x) &=& (54(6x+4)^2)' &=& 648(6x+4) & \Rightarrow \; f''(0) = 2592 \\ f'''(x) &=& (648(6x+4))' &=& 3888 & \\ f''''(x) &\equiv& 0 &=& f^{(n)}(x) \;\; n \geq 4 & \end{array}$$

Die Taylorreihe bricht ab, die Funktion ist also ein Polynom. Damit ist

$$a_0 = f(0) = 192, \quad a_1 = f'(0) = 864, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{2592}{2}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{3888}{6}.$$

Die Taylorreihe ist das Polynom: $192 \;+\; 864\,x \;+\; 1296\,x^2 \;+\; 648\,x^3$.

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man die Funktion mit der binomischen Formel ausmultipliziert hätte:

$$3(6x+4)^3 \quad = \quad 3((6x)^3 + 3(6x)^2 \cdot 4 + 3 \cdot 6x \cdot 4^2 + 4^3)$$

Angebotene Lösungen:

1	$648 + 1296x + 864x^2 + 192x^3$	2	$\frac{3(6x+4)^4}{1-x}$
☒	$192 + 864x + 1296x^2 + 648x^3$	4	$\frac{3888x^4+768}{4-6x}$
5	$\sum_{i=0}^{3}(3(6x+4))^i$	6	$\frac{3888x^4+768}{1-x}$
7	$3888 + 2592x + 864x^2 + 192x^3$	8	$3\sum_{i=0}^{3}(6x+4)^i$
9	$192 + 864x + 2592x^2 + 3888x^3$	10	$\frac{3(6x+4)^4}{4-6x}$
11	$\sum_{i=0}^{\infty}(3(6x+4))^i$	12	$3\sum_{i=0}^{\infty}(6x+4)^i$

Fehlerinterpretation:

1	$648 + 1296x + 864x^2 + 192x^3$	RF: Koeffizienten falsch verteilt
2	$\frac{3(6x+4)^4}{1-x}$	DF: Lösung geraten
☒	$192 + 864x + 1296x^2 + 648x^3$	richtig
4	$\frac{3888x^4+768}{4-6x}$	DF: Lösung geraten
5	$\sum_{i=0}^{3}(3(6x+4))^i$	DF: Lösung geraten
6	$\frac{3888x^4+768}{1-x}$	DF: Lösung geraten
7	$3888 + 2592x + 864x^2 + 192x^3$	RF: Koeffizienten falsch verteilt
8	$3\sum_{i=0}^{3}(6x+4)^i$	DF: Lösung geraten
9	$192 + 864x + 2592x^2 + 3888x^3$	RF: Nicht durch $i!$ geteilt
10	$\frac{3(6x+4)^4}{4-6x}$	DF: Lösung geraten
11	$\sum_{i=0}^{\infty}(3(6x+4))^i$	DF: Lösung geraten
12	$3\sum_{i=0}^{\infty}(6x+4)^i$	DF: Lösung geraten

Allgemeine Hinweise:

Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).

Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu