Blatt Nr 11.07

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 11

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 16 0 2004110005	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.1: Entwickeln Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \qquad f(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{5}{x} \cdot \sin(6x) & \text{für } x \neq 0 \\ 30 & \text{für } x = 0 \end{cases} \qquad \text{in eine Taylorreihe um 0.}$$

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $\frac{x_1}{x} \cdot \sin(x_2\, x)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \qquad x_2 = 6$.

Erklärung:

Durch die Quotientenregel werden die einzelnen Ableitungen sehr schnell sehr kompliziert. Deshalb ist es eventuell sinnvoller, auf die Reihenentwicklung des Sinus zurückzugreifen und mit Substitution und Regeln aus der Summen - Reihenrechnung die Taylorreihe zu finden.

Rechnung:

$$\lim_{x\to 0} a \cdot \frac{\sin bx}{x} \quad =^H \quad \lim_{x\to 0} a \cdot \frac{b \cdot \cos bx}{1} \quad = \quad a \cdot b$$

Damit ist $f(x)$ bei $x = 0$ stetig. Die Taylorreihenentwicklung von $\sin x$ ist $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
Wir substituieren $6x = w$ und erhalten:

$$\sin(6x) \quad = \quad \sin w \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot w^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (6x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \frac{5}{x} \cdot \sin(6x) &= \frac{5}{x} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (6x)^{2n+1}}{(2n+1)!} && \text{Entwicklung von } \sin x \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{5}{x} \cdot \frac{(-1)^n \cdot (6x)^{2n+1}}{(2n+1)!} && \text{Distributivgesetz} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{x \cdot (2n+1)!} && \text{Bruchmultiplikation} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} && x \text{ gekürzt} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n} \end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

[1] $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	[2] $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$	[3] $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$
[4] $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	[X] $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	[6] $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 30}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$
[7] $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	[8] $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 30}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	[9] $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 30}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$
[10] Es gibt keine	[11] $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$	[12] $\sum_{i=1}^{\infty} \infty \cdot x^{2n+1}$

Fehlerinterpretation:

1	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
2	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
3	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
4	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	RF: Untere Grenze der Summe ist falsch
☒	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	richtig
6	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 30}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	DF: Falsch substituiert
7	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
8	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 30}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	DF: Falsch substituiert
9	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 30}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
10	Es gibt keine	DF: Doch
11	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
12	$\sum_{i=1}^{\infty} \infty \cdot x^{2n+1}$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 40 0 2004110002	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.2: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 2(6x+5)^3$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1, \;\; x_2 > 1, \;\; x_3 > 0$.

Die Formel lautet: $x_1(x_2\, x + x_3)^3$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \qquad x_2 = 6 \qquad x_3 = 5$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lclcllcl}
f'(x) & = & (2(6x+5)^3)' & = & 36(6x+5)^2 & \Rightarrow \; f'(0) & = & 900 \\
f''(x) & = & (36(6x+5)^2)' & = & 432(6x+5) & \Rightarrow \; f''(0) & = & 2160 \\
f'''(x) & = & (432(6x+5))' & = & 2592 & & & \\
f''''(x) & \equiv & 0 & = & f^{(n)}(x) \;\; n \geq 4 & & &
\end{array}$$

Die Taylorreihe bricht ab, die Funktion ist also ein Polynom. Damit ist

$$a_0 \;=\; f(0) \;=\; 250, \quad a_1 \;=\; f'(0) \;=\; 900, \quad a_2 \;=\; \frac{f''(0)}{2} \;=\; \frac{2160}{2}, \quad a_3 \;=\; \frac{f'''(0)}{3!} \;=\; \frac{2592}{6}.$$

Die Taylorreihe ist das Polynom: $\quad 250 \;+\; 900\, x \;+\; 1080\, x^2 \;+\; 432\, x^3$.

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man die Funktion mit der binomischen Formel ausmultipliziert hätte:

$$2(6x+5)^3 \quad = \quad 2((6x)^3 + 3(6x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 6x \cdot 5^2 + 5^3)$$

Angebotene Lösungen:

1	$\frac{2592x^4+1250}{5-6x}$	2	$\frac{2592x^4+1250}{1-x}$
3	$2\sum_{i=0}^{\infty}(6x+5)^i$	4	Es gibt keine
5	$\frac{2(6x+5)^4}{5-6x}$	6	$2\sum_{i=0}^{3}(6x+5)^i$
7	$250+900x+2160x^2+2592x^3$	☒	$250+900x+1080x^2+432x^3$
9	$432+1080x+900x^2+250x^3$	10	$\sum_{i=0}^{3}(2(6x+5))^i$
11	$\frac{2(6x+5)^4}{1-x}$	12	$\sum_{i=0}^{\infty}(2(6x+5))^i$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{2592x^4+1250}{5-6x}$	DF: Lösung geraten
2	$\frac{2592x^4+1250}{1-x}$	DF: Lösung geraten
3	$2\sum_{i=0}^{\infty}(6x+5)^i$	DF: Lösung geraten
4	Es gibt keine	DF: Doch
5	$\frac{2(6x+5)^4}{5-6x}$	DF: Lösung geraten
6	$2\sum_{i=0}^{3}(6x+5)^i$	DF: Lösung geraten
7	$250+900x+2160x^2+2592x^3$	RF: Nicht durch $i!$ geteilt
☒	$250+900x+1080x^2+432x^3$	richtig
9	$432+1080x+900x^2+250x^3$	RF: Koeffizienten falsch verteilt
10	$\sum_{i=0}^{3}(2(6x+5))^i$	DF: Lösung geraten
11	$\frac{2(6x+5)^4}{1-x}$	DF: Lösung geraten
12	$\sum_{i=0}^{\infty}(2(6x+5))^i$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 41 0 2004110004	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.3: Entwickeln Sie die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=5x\cdot e^{-3x}$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1>1,\;\; x_2>1, x_1\neq x_2$.

Die Formel lautet: $x_1\,x\cdot e^{-x_2\,x}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=5 \qquad x_2=3$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ mit $a_i=\dfrac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

$(x\cdot e^x)'=(x+1)\cdot e^x$.

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$
\begin{array}{lllll}
f(x) & = & 5x\cdot e^{-3x} & & \Rightarrow\; f(0) = 0\\
f'(x) & = & 5e^{-3x}-3\cdot 5x\cdot e^{-3x} & = (5-15x)\cdot e^{-3x} & \Rightarrow\; f'(0) = 5\\
f''(x) & = & -15e^{-3x}+3\cdot(15x-5)\cdot e^{-3x} & = (-30+45x)\cdot e^{-3x} & \Rightarrow\; f''(0) = -15\\
f'''(x) & = & -3(-30+45x)\cdot e^{-3x}+45\cdot e^{-3x} & = (135-135x)\cdot e^{-3x} & \Rightarrow\; f'''(0) = 135\\
f^{(n)}(x) & = & (-1)^n(5\cdot 3^n\cdot x-5\cdot n\cdot 3^{n-1})\cdot e^{-3x} \text{ für } n\geq 1 & & \Rightarrow\; f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\cdot 5\cdot n\cdot 3^{n-1}
\end{array}
$$

Damit gilt für $n\geq 1$:

$$a_0 = f(0) = 0, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-2)^{n-1}\cdot 5\cdot n}{n!} = \frac{5\cdot(-2)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$$\text{Die Taylorreihe ist} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot(-2)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot x^n$$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man $-3x = w$ substituiert hätte:

$$\begin{aligned}
5x \cdot e^w &= 5x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} && \text{Taylorreihe von } e^w \\
&= 5x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{n!} && \text{Rücksubstitution} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \frac{(-3)^n}{n!} \cdot x \cdot x^n && \text{Distributivgesetz} \\
&= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{5\cdot(-3)^n}{n!} \cdot x^{n+1} && \text{Potenzgesetz} \\
&= \sum_{m-1=0}^{m-1=\infty} \frac{5\cdot(-3)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot x^m && \text{Indexverschiebung } m = n+1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-3)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n && m \text{ wieder als } n \text{ geschrieben}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+3)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	☒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-3)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+3)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$
4 $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!} \cdot x^n$	5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 3^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 3^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$
7 Es gibt keine	8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-3)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-3)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$
10 $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-3)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$

Fehlerinterpretation:

1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+3)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
☒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-3)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	richtig
3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+3)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
4 $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 3^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Durch x geteilt
6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 3^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Bruchrechnen
7 Es gibt keine	DF: Doch
8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-3)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-3)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	RF: Durch x geteilt
10 $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-3)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Durch x geteilt

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 51 0 2004110001	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.4:

Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 5\sqrt{5x^2 + 4}+5$ in ein Taylorpolynom vom Grad 2 (um 0) .

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1, 2, 3, 4$.
x_2 darf keine Quadratzahl sein.

Die Formel lautet: $x_1\sqrt{x_2\, x^2 + \{x_3 \cdot x_3\}} + x_4$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5$ $x_2 = 5$ $x_3 = 2$ $x_4 = 5$.

Erklärung:

Taylorpolynome sind folgendermaßen definiert: $T_n(x) \quad := \quad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{mit} \quad a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$f'(x) = (5\sqrt{5x^2+4}+5)' = \tfrac{5\cdot 2\cdot 5x}{2\sqrt{5x^2+4}} = \tfrac{25x}{\sqrt{5x^2+4}} \Rightarrow f'(0) = 0$$

$f'(0) \quad = \quad 0$ war erwartet worden, weil f achsensymmetrisch zur y - Achse ist

$$f''(x) = \frac{25\cdot\sqrt{5x^2+4}-25x\cdot\frac{2\cdot 5x}{2\sqrt{5x^2+4}}}{(\sqrt{5x^2+4})^2} = \frac{25(5x^2+4)-125x^2}{(5x^2+4)\sqrt{5x^2+4}} = \frac{100}{(5x^2+4)\sqrt{5x^2+4}} \Rightarrow f''(0) = \frac{100}{4\sqrt{4}} = \frac{25}{2}.$$

Damit ist $a_0 = f(0) = 15, \quad a_1 = f'(0) = 0, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{25}{4}.$

$$T_2(x) := \sum_{i=0}^{2} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\, x^i = \frac{f(0)}{0!}\, x^0 + \frac{f'(0)}{1!}\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 = 15 + \frac{25}{4}\, x^2$$

Angebotene Lösungen:

1 $15+\frac{25}{4}x$	2 $4+5x^2$	3 $\frac{15}{2}+\frac{25}{2}x^2$	4 $15+\frac{25}{2}x$
☒ $15+\frac{25}{4}x^2$	6 $1+x+x^2$	7 $4+5x$	8 $9+5\sqrt{5}x$
9 Es gibt keine	10 $\frac{15}{2}+\frac{25}{2}x$	11 $1+x+\frac{x^2}{2}$	12 $15+\frac{25}{2}x^2$

Fehlerinterpretation:

1	$15+\frac{25}{4}x$	RF: x^2 vergessen
2	$4+5x^2$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
3	$\frac{15}{2}+\frac{25}{2}x^2$	RF: Durch 2! an der falschen Stelle dividiert
4	$15+\frac{25}{2}x$	RF: 2! im Nenner vergessen
☒	$15+\frac{25}{4}x^2$	richtig
6	$1+x+x^2$	DF: Lösung geraten
7	$4+5x$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
8	$9+5\sqrt{5}x$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
9	Es gibt keine	DF: Doch
10	$\frac{15}{2}+\frac{25}{2}x$	RF: Durch 2! an der falschen Stelle dividiert
11	$1+x+\frac{x^2}{2}$	DF: Lösung geraten
12	$15+\frac{25}{2}x^2$	RF: 2! im Nenner vergessen

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 72 0 2004110006	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.5: Entwickeln Sie eine Stammfunktion von $f(x) = 5\cdot\cos(7\,x^2)$ in eine Taylorreihe um 0.

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1, \;\; x_2 > 1, \;\; x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $f(x) = x_1\cdot\cos(x_2\,x^2)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \qquad x_2 = 7$.

Erklärung:

Die Funktion $\cos x^2$ ist (vermutlich) nicht elementar integrierbar. Deshalb ist es sinnvoll, zuerst mittels Substitution die Taylorreihenentwicklung von $\cos x^2$ zu bestimmen und diese dann zu integrieren.

Rechnung:

Die Taylorreihenentwicklung von $\cos x$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$.
Wir substituieren $7\,x^2 = w$ und erhalten:

$$\cos(7\,x^2) \quad = \quad \cos w \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot w^{2n}}{(2n)!} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (7\,x^2)^{2n}}{(2n)!} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 7^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\int 5 \cdot \cos(7\,x^2) &= \int 5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n \cdot 7^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!} && \text{Taylorreihenentwicklung} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int 5 \cdot \tfrac{(-1)^n \cdot 7^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!} && \text{Integration und Summation vertauscht (und mehr ..)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \tfrac{(-1)^n \cdot 7^{2n} \cdot (\frac{x^{4n+1}}{4n+1} + c)}{(2n)!} && \text{Integriert} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!} && c = 0 \text{ gewählt}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 Es gibt keine	2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$
4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)(2n)!}$	☒ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$
7 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{4n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	8 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$	9 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$
10 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	11 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	12 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$

Fehlerinterpretation:

1 Es gibt keine	DF: Doch
2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	RF: Quadrat auf 7 mitbezogen
3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)(2n)!}$	DF: Falsch Integriert
☒ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	richtig
6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	RF: Quadrat auf 7 mitbezogen
7 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{4n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
8 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$	DF: Falsch Integriert
9 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
10 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	RF: Fakultät falsch zusammengefasst
11 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	DF: Quadrat nicht beachtet
12 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 7^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$	DF: Quadrat nicht beachtet

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 96 0 2004110003	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.6: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 3 + 6x + e^{7x}$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 0,\ \ x_2 > 1,\ \ x_3 > 1$.

Die Formel lautet: $x_1 + x_2\,x + e^{x_3\,x}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \qquad x_2 = 6 \qquad x_3 = 7$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).
Das Polynom vor der $e-$ Funktion wird einfach zu den ersten Koeffizienten der Taylorreihe addiert.
Die Ableitung von e^{ax} ist $a \cdot e^{ax}$.

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lclcllcl}
f(x) & = & 3+6x+e^{7x} & & & \Rightarrow\ f(0) & = & 3+1=4 \\
f'(x) & = & (3+6x+e^{7x})' & = & 6+7\cdot e^{7x} & \Rightarrow\ f'(0) & = & 13 \\
f''(x) & = & (6+7\cdot e^{7x})' & = & 49\cdot e^{7x} & \Rightarrow\ f''(0) & = & 49 \\
f^{(n)}(x) & = & 7^n \cdot e^{7x} & & \text{für } n \geq 2 & \Rightarrow & & \\
 & & & & & f^{(n)}(0)=7^n & &
\end{array}$$

Damit gilt für $n \geq 2$:

$$a_0 = f(0) = 4, \quad a_1 = f'(0) = 13, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{49}{2}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{7^n}{n!}.$$

$$\text{Die Taylorreihe ist} \qquad 4 + 13\,x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot x^n \ .$$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man $7x = w$ substituiert hätte:

$$3+6x+e^w = 3+6x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = 3+6x+1+w + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(7x)^n}{n!} = 4+13x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot x^n$$

Angebotene Lösungen:

☐ 1 $7 \cdot (3+6x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot x^n)$	☐ 2 $4+13x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 7 \cdot x^n$	☐ 3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot x^n$
☐ 4 $\sum_{n=0}^{\infty} (3+6x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	☒ $4+13x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot x^n$	☐ 6 $\sum_{n=0}^{\infty} 7 \cdot (3+6x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$
☐ 7 $3+6x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot x^n$	☐ 8 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 7 \cdot x^n$	☐ 9 $\sum_{n=0}^{\infty} (3+6x) + \frac{7^n}{n!} \cdot x^n$
☐ 10 Es gibt keine	☐ 11 $7 \cdot (3+6x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n)$	☐ 12 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$

Fehlerinterpretation:

☐ 1 $7 \cdot (3+6x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot x^n)$	DF: Lösung geraten
☐ 2 $4+13x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 7 \cdot x^n$	DF: Substitution falsch
☐ 3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot x^n$	RF: Polynom am Anfang vergessen
☐ 4 $\sum_{n=0}^{\infty} (3+6x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
☒ $4+13x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot x^n$	richtig
☐ 6 $\sum_{n=0}^{\infty} 7 \cdot (3+6x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
☐ 7 $3+6x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Polynom nur abgeschrieben
☐ 8 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 7 \cdot x^n$	RF: Polynom am Anfang vergessen
☐ 9 $\sum_{n=0}^{\infty} (3+6x) + \frac{7^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
☐ 10 Es gibt keine	DF: Doch
☐ 11 $7 \cdot (3+6x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n)$	DF: Lösung geraten
☐ 12 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Reihenentwicklung der $e-$ Funktion

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu