Blatt Nr 11.08

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 11

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 42 0 2004110001	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.1:

Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 5\sqrt{3x^2+16}+7$ in ein Taylorpolynom vom Grad 2 (um 0) .

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1, 2, 3, 4$.
x_2 darf keine Quadratzahl sein.

Die Formel lautet: $x_1\sqrt{x_2\, x^2 + \{x_3 \cdot x_3\}} + x_4$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5$ $x_2 = 3$ $x_3 = 4$ $x_4 = 7$.

Erklärung:

$$\text{Taylorpolynome sind folgendermaßen definiert:} \quad T_n(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{mit} \quad a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$$

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$f'(x) = (5\sqrt{3x^2+16}+7)' = \frac{5\cdot 2\cdot 3x}{2\sqrt{3x^2+16}} = \frac{15x}{\sqrt{3x^2+16}} \Rightarrow f'(0) = 0$$

$f'(0) = 0$ war erwartet worden, weil f achsensymmetrisch zur y - Achse ist

$$f''(x) = \frac{15\cdot\sqrt{3x^2+16} - 15x\cdot\frac{2\cdot 3x}{2\sqrt{3x^2+16}}}{(\sqrt{3x^2+16})^2} = \frac{15(3x^2+16)-45x^2}{(3x^2+16)\sqrt{3x^2+16}} = \frac{240}{(3x^2+16)\sqrt{3x^2+16}} \Rightarrow f''(0) = \frac{240}{16\sqrt{16}} = \frac{15}{4}.$$

$$\text{Damit ist} \quad a_0 = f(0) = 27, \quad a_1 = f'(0) = 0, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{15}{8}.$$

$$T_2(x) := \sum_{i=0}^{2} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\, x^i = \frac{f(0)}{0!}\, x^0 + \frac{f'(0)}{1!}\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 = 27 + \frac{15}{8}\, x^2$$

Angebotene Lösungen:

[1] $16+3x$	[2] $23+5\sqrt{3}x^2$	[3] $1+x+x^2$	[4] $23+5\sqrt{3}x$
[5] $27+\frac{15}{8}x$	[6] $16+3x^2$	[7] $\frac{27}{2}+\frac{15}{4}x^2$	[8] $\frac{27}{2}+\frac{15}{4}x$
[9] $27+\frac{15}{4}x^2$	[10] Es gibt keine	[X] $27+\frac{15}{8}x^2$	[12] $27+\frac{15}{4}x$

Fehlerinterpretation:

[1]	$16+3x$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
[2]	$23+5\sqrt{3}x^2$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
[3]	$1+x+x^2$	DF: Lösung geraten
[4]	$23+5\sqrt{3}x$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
[5]	$27+\frac{15}{8}x$	RF: x^2 vergessen
[6]	$16+3x^2$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
[7]	$\frac{27}{2}+\frac{15}{4}x^2$	RF: Durch 2! an der falschen Stelle dividiert
[8]	$\frac{27}{2}+\frac{15}{4}x$	RF: Durch 2! an der falschen Stelle dividiert
[9]	$27+\frac{15}{4}x^2$	RF: 2! im Nenner vergessen
[10]	Es gibt keine	DF: Doch
[X]	$27+\frac{15}{8}x^2$	richtig
[12]	$27+\frac{15}{4}x$	RF: 2! im Nenner vergessen

Aufgabe 11.1.2: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 3 + 5x + e^{3x}$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 0,\ \ x_2 > 1,\ \ x_3 > 1$.

Die Formel lautet: $x_1 + x_2\, x + e^{x_3\, x}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \qquad x_2 = 5 \qquad x_3 = 3$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).
Das Polynom vor der $e-$ Funktion wird einfach zu den ersten Koeffizienten der Taylorreihe addiert.
Die Ableitung von e^{ax} ist $a \cdot e^{ax}$.

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$
\begin{array}{lllll}
f(x) & = & 3+5x+e^{3x} & & \Rightarrow & f(0) & = & 3+1=4 \\
f'(x) & = & (3+5x+e^{3x})' & = & 5+3\cdot e^{3x} & \Rightarrow & f'(0) & = & 8 \\
f''(x) & = & (5+3\cdot e^{3x})' & = & 9\cdot e^{3x} & \Rightarrow & f''(0) & = & 9 \\
f^{(n)}(x) & = & 3^n \cdot e^{3x} & & \text{für } n \geq 2 & \Rightarrow & & & \\
 & & & & & & f^{(n)}(0) = 3^n & &
\end{array}
$$

Damit gilt für $n \geq 2$:

$$a_0 = f(0) = 4, \quad a_1 = f'(0) = 8, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{9}{2}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{3^n}{n!}.$$

$$\text{Die Taylorreihe ist} \qquad 4 + 8\,x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot x^n \ .$$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man $3x = w$ substituiert hätte:

$$3+5x+e^w = 3+5x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = 3+5x+1+w + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = 4+8x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot x^n$$

Angebotene Lösungen:

[1] $\sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot (3+5x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	[2] $3 \cdot (3+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n)$	[3] $4+8x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 3 \cdot x^n$
[X] $4+8x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot x^n$	[5] $\sum_{n=0}^{\infty}(3+5x) + \frac{3^n}{n!} \cdot x^n$	[6] $3+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot x^n$
[7] Es gibt keine	[8] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 3 \cdot x^n$	[9] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot x^n$
[10] $3 \cdot (3+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot x^n)$	[11] $\sum_{n=0}^{\infty}(3+5x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	[12] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$

Fehlerinterpretation:

1	$\sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot (3+5x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
2	$3 \cdot (3+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n)$	DF: Lösung geraten
3	$4+8x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 3 \cdot x^n$	DF: Substitution falsch
☒	$4+8x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot x^n$	richtig
5	$\sum_{n=0}^{\infty}(3+5x) + \frac{3^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
6	$3+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Polynom nur abgeschrieben
7	Es gibt keine	DF: Doch
8	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 3 \cdot x^n$	RF: Polynom am Anfang vergessen
9	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot x^n$	RF: Polynom am Anfang vergessen
10	$3 \cdot (3+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot x^n)$	DF: Lösung geraten
11	$\sum_{n=0}^{\infty}(3+5x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
12	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Reihenentwicklung der $e-$ Funktion

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 45 0 2004110002	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.3: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 3(6x+1)^3$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1, \ \ x_2 > 1, \ \ x_3 > 0$.

Die Formel lautet: $x_1(x_2\,x + x_3)^3$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \qquad x_2 = 6 \qquad x_3 = 1$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lclcllcl}
f'(x) & = & (3(6x+1)^3)' & = & 54(6x+1)^2 & \Rightarrow & f'(0) & = & 54 \\
f''(x) & = & (54(6x+1)^2)' & = & 648(6x+1) & \Rightarrow & f''(0) & = & 648 \\
f'''(x) & = & (648(6x+1))' & = & 3888 & & & & \\
f''''(x) & \equiv & 0 & = & f^{(n)}(x) \ \ n \geq 4 & & & &
\end{array}$$

Die Taylorreihe bricht ab, die Funktion ist also ein Polynom. Damit ist

$$a_0 = f(0) = 3, \quad a_1 = f'(0) = 54, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{648}{2}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{3888}{6}.$$

Die Taylorreihe ist das Polynom: $\quad 3 \ + \ 54\,x \ + \ 324\,x^2 \ + \ 648\,x^3$.

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man die Funktion mit der binomischen Formel ausmultipliziert hätte:

$$3(6x+1)^3 = 3((6x)^3 + 3(6x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 6x \cdot 1^2 + 1^3)$$

Angebotene Lösungen:

1	$3\sum_{i=0}^{3}(6x+1)^i$	☒	$3+54x+324x^2+648x^3$
3	Es gibt keine	4	$3888+648x+54x^2+3x^3$
5	$\frac{3888x^4+3}{1-x}$	6	$\frac{3(6x+1)^4}{1-6x}$
7	$3\sum_{i=0}^{\infty}(6x+1)^i$	8	$\frac{3888x^4+3}{1-6x}$
9	$\sum_{i=0}^{\infty}(3(6x+1))^i$	10	$\frac{3(6x+1)^4}{1-x}$
11	$648+324x+54x^2+3x^3$	12	$\sum_{i=0}^{3}(3(6x+1))^i$

Fehlerinterpretation:

$\boxed{1}$	$3\sum_{i=0}^{3}(6x+1)^i$	DF: Lösung geraten
$\boxtimes$	$3+54x+324x^2+648x^3$	richtig
$\boxed{3}$	Es gibt keine	DF: Doch
$\boxed{4}$	$3888+648x+54x^2+3x^3$	RF: Koeffizienten falsch verteilt
$\boxed{5}$	$\frac{3888x^4+3}{1-x}$	DF: Lösung geraten
$\boxed{6}$	$\frac{3(6x+1)^4}{1-6x}$	DF: Lösung geraten
$\boxed{7}$	$3\sum_{i=0}^{\infty}(6x+1)^i$	DF: Lösung geraten
$\boxed{8}$	$\frac{3888x^4+3}{1-6x}$	DF: Lösung geraten
$\boxed{9}$	$\sum_{i=0}^{\infty}(3(6x+1))^i$	DF: Lösung geraten
$\boxed{10}$	$\frac{3(6x+1)^4}{1-x}$	DF: Lösung geraten
$\boxed{11}$	$648+324x+54x^2+3x^3$	RF: Koeffizienten falsch verteilt
$\boxed{12}$	$\sum_{i=0}^{3}(3(6x+1))^i$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 74 0 2004110004	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.4: Entwickeln Sie die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=5x\cdot e^{-6x}$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1>1,\ \ x_2>1, x_1\neq x_2$.

Die Formel lautet: $x_1\,x\cdot e^{-x_2\,x}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=5\qquad x_2=6$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ mit $a_i=\dfrac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

$(x\cdot e^x)'=(x+1)\cdot e^x$.

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$
\begin{array}{lclclclcl}
f(x) & = & 5x\cdot e^{-6x} & & & \Rightarrow & f(0) & = & 0\\
f'(x) & = & 5e^{-6x}-6\cdot 5x\cdot e^{-6x} & = & (5-30x)\cdot e^{-6x} & \Rightarrow & f'(0) & = & 5\\
f''(x) & = & -30e^{-6x}+6\cdot(30x-5)\cdot e^{-6x} & = & (-60+180x)\cdot e^{-6x} & \Rightarrow & f''(0) & = & -30\\
f'''(x) & = & -6(-60+180x)\cdot e^{-6x}+180\cdot e^{-6x} & = & (540-1080x)\cdot e^{-6x} & \Rightarrow & f'''(0) & = & 540\\
f^{(n)}(x) & = & (-1)^n(5\cdot 6^n\cdot x-5\cdot n\cdot 6^{n-1})\cdot e^{-6x} & \text{für} & n\geq 1 & \Rightarrow & f^{(n)}(0) & = & (-1)^{n-1}\cdot 5\cdot n\cdot 6^{n-1}
\end{array}
$$

Damit gilt für $n\geq 1$:

$$a_0 \;=\; f(0) \;=\; 0,\qquad a_n \;=\; \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \;=\; \frac{(-2)^{n-1}\cdot 5\cdot n}{n!} \;=\; \frac{5\cdot(-2)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$$\text{Die Taylorreihe ist}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot(-2)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot x^n$$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man $-6x = w$ substituiert hätte:

$$
\begin{array}{rcll}
5x \cdot e^w & = & 5x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} & \text{Taylorreihe von } e^w \\
& = & 5x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-6x)^n}{n!} & \text{Rücksubstitution} \\
& = & \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \frac{(-6)^n}{n!} \cdot x \cdot x^n & \text{Distributivgesetz} \\
& = & \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{5\cdot(-6)^n}{n!} \cdot x^{n+1} & \text{Potenzgesetz} \\
& = & \sum_{m-1=0}^{m-1=\infty} \frac{5\cdot(-6)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot x^m & \text{Indexverschiebung } m = n+1 \\
& = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-6)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n & m \text{ wieder als } n \text{ geschrieben}
\end{array}
$$

Angebotene Lösungen:

☒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-6)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 6^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 6^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$
4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+6)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-6)^n}{n!} \cdot x^{n-1}$	6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+6)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$
7 $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^n}{n!} \cdot x^n$	8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 6^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-6)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$
10 $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-6)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-6)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$

Fehlerinterpretation:

☒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-6)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	richtig
2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 6^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Durch x geteilt
3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 6^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Bruchrechnen
4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+6)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-6)^n}{n!} \cdot x^{n-1}$	RF: Durch x geteilt
6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+6)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
7 $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 6^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Durch x geteilt
9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-6)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
10 $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-6)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	RF: Durch x geteilt
12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-6)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 100 0 2004110006	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.5: Entwickeln Sie eine Stammfunktion von $f(x) = 5 \cdot \cos(6\,x^2)$ in eine Taylorreihe um 0.

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $f(x) = x_1 \cdot \cos(x_2\, x^2)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 6$.

Erklärung:

Die Funktion $\cos x^2$ ist (vermutlich) nicht elementar integrierbar. Deshalb ist es sinnvoll, zuerst mittels Substitution die Taylorreihenentwicklung von $\cos x^2$ zu bestimmen und diese dann zu integrieren.

Rechnung:

Die Taylorreihenentwicklung von $\cos x$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$.
Wir substituieren $6\,x^2 = w$ und erhalten:

$$\cos(6\,x^2) \quad = \quad \cos w \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot w^{2n}}{(2n)!} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (6\,x^2)^{2n}}{(2n)!} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!}$$

Damit gilt:

$$\begin{array}{rcll} \int 5 \cdot \cos(6\,x^2) & = & \int 5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!} & \text{Taylorreihenentwicklung} \\ & = & \sum_{n=0}^{\infty} \int 5 \cdot \frac{(-1)^n \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!} & \text{Integration und Summation vertauscht (und mehr ..)} \\ & = & \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \frac{(-1)^n \cdot 6^{2n} \cdot (\frac{x^{4n+1}}{4n+1} + c)}{(2n)!} & \text{Integriert} \\ & = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!} & c = 0 \text{ gewählt} \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$	2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$	3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$
☒ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	6 Es gibt keine
7 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$	8 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	9 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$
10 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	11 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	12 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)(2n)!}$

Fehlerinterpretation:

1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$	DF: Falsch Integriert
2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
☒ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	richtig
5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	RF: Quadrat auf 6 mitbezogen
6 Es gibt keine	DF: Doch
7 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$	DF: Quadrat nicht beachtet
8 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
9 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	RF: Quadrat auf 6 mitbezogen
10 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	DF: Quadrat nicht beachtet
11 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	RF: Fakultät falsch zusammengefasst
12 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)(2n)!}$	DF: Falsch Integriert

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 105 0 2004110005	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.6: Entwickeln Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \qquad f(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{3}{x} \cdot \sin(7x) & \text{für } x \neq 0 \\ 21 & \text{für } x = 0 \end{cases} \qquad \text{in eine Taylorreihe um 0.}$$

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $\frac{x_1}{x} \cdot \sin(x_2\,x)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \qquad x_2 = 7$.

Erklärung:

Durch die Quotientenregel werden die einzelnen Ableitungen sehr schnell sehr kompliziert. Deshalb ist es eventuell sinnvoller, auf die Reihenentwicklung des Sinus zurückzugreifen und mit Substitution und Regeln aus der Summen - Reihenrechnung die Taylorreihe zu finden.

Rechnung:

$$\lim_{x\to 0} a \cdot \frac{\sin bx}{x} \quad =^H \quad \lim_{x\to 0} a \cdot \frac{b\cdot\cos bx}{1} \quad = \quad a\cdot b$$

Damit ist $f(x)$ bei $x=0$ stetig. Die Taylorreihenentwicklung von $\sin x$ ist $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
Wir substituieren $7x = w$ und erhalten:

$$\sin(7x) \quad = \quad \sin w \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot w^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot (7x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x}\cdot\sin(7x) &= \tfrac{3}{x}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n\cdot(7x)^{2n+1}}{(2n+1)!} && \text{Entwicklung von } \sin x\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{3}{x}\cdot\tfrac{(-1)^n\cdot(7x)^{2n+1}}{(2n+1)!} && \text{Distributivgesetz}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n\cdot 3\cdot 7^{2n+1}\cdot x^{2n+1}}{x\cdot(2n+1)!} && \text{Bruchmultiplikation}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n\cdot 3\cdot 7^{2n+1}\cdot x^{2n}}{(2n+1)!} && x \text{ gekürzt}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n\cdot 3\cdot 7^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 7^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$	2 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 21}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	3 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 7^{2n}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$
4 ∞	5 Es gibt keine	6 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 21}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$
7 $\sum_{i=1}^{\infty}\infty\cdot x^{2n+1}$	8 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 7^{2n}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	☒ $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 7^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$
10 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 7^{2n+1}}{(2n)!}\cdot x^{2n+1}$	11 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 7^{2n}}{(2n)!}\cdot x^{2n+1}$	12 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 21}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$

Fehlerinterpretation:

1 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 7^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$	RF: Untere Grenze der Summe ist falsch
2 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 21}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
3 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 7^{2n}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
4 ∞	DF: Lösung geraten
5 Es gibt keine	DF: Doch
6 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 21}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
7 $\sum_{i=1}^{\infty}\infty\cdot x^{2n+1}$	DF: Lösung geraten
8 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 7^{2n}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
☒ $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 7^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$	richtig
10 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 7^{2n+1}}{(2n)!}\cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
11 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 7^{2n}}{(2n)!}\cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
12 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 21}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}$	DF: Falsch substituiert

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu