Blatt Nr 11.09

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 11

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 1 0 2004110002	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.1: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 4(3x+3)^3$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1, \;\; x_2 > 1, \;\; x_3 > 0$.

Die Formel lautet: $x_1(x_2\,x + x_3)^3$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \qquad x_2 = 3 \qquad x_3 = 3$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lclclcl}
f'(x) & = & (4(3x+3)^3)' & = & 36(3x+3)^2 & \Rightarrow & f'(0) = 324 \\
f''(x) & = & (36(3x+3)^2)' & = & 216(3x+3) & \Rightarrow & f''(0) = 648 \\
f'''(x) & = & (216(3x+3))' & = & 648 & & \\
f''''(x) & \equiv & 0 & = & f^{(n)}(x) \;\; n \geq 4 & &
\end{array}$$

Die Taylorreihe bricht ab, die Funktion ist also ein Polynom. Damit ist

$$a_0 = f(0) = 108, \quad a_1 = f'(0) = 324, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{648}{2}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{648}{6}.$$

Die Taylorreihe ist das Polynom: $\quad 108 \; + \; 324\,x \; + \; 324\,x^2 \; + \; 108\,x^3$.

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man die Funktion mit der binomischen Formel ausmultipliziert hätte:

$$4(3x+3)^3 \quad = \quad 4((3x)^3 + 3(3x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 3x \cdot 3^2 + 3^3)$$

Angebotene Lösungen:

☒ $108 + 324x + 324x^2 + 108x^3$	2 $\frac{324x^4+324}{1-x}$
3 Es gibt keine	4 $4\sum_{i=0}^{\infty}(3x+3)^i$
5 $\sum_{i=0}^{\infty}(4(3x+3))^i$	6 $648 + 648x + 324x^2 + 108x^3$
7 $\frac{324x^4+324}{3-3x}$	8 $108 + 324x + 648x^2 + 648x^3$
9 $4\sum_{i=0}^{3}(3x+3)^i$	10 $\frac{4(3x+3)^4}{1-x}$
11 $\sum_{i=0}^{3}(4(3x+3))^i$	12 $\frac{4(3x+3)^4}{3-3x}$

Fehlerinterpretation:

☒	$108+324x+324x^2+108x^3$	richtig
2	$\frac{324x^4+324}{1-x}$	DF: Lösung geraten
3	Es gibt keine	DF: Doch
4	$4\sum_{i=0}^{\infty}(3x+3)^i$	DF: Lösung geraten
5	$\sum_{i=0}^{\infty}(4(3x+3))^i$	DF: Lösung geraten
6	$648+648x+324x^2+108x^3$	RF: Koeffizienten falsch verteilt
7	$\frac{324x^4+324}{3-3x}$	DF: Lösung geraten
8	$108+324x+648x^2+648x^3$	RF: Nicht durch $i!$ geteilt
9	$4\sum_{i=0}^{3}(3x+3)^i$	DF: Lösung geraten
10	$\frac{4(3x+3)^4}{1-x}$	DF: Lösung geraten
11	$\sum_{i=0}^{3}(4(3x+3))^i$	DF: Lösung geraten
12	$\frac{4(3x+3)^4}{3-3x}$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 36 0 2004110004	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.2: Entwickeln Sie die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=5x\cdot e^{-6x}$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1>1,\ \ x_2>1, x_1\neq x_2$.

Die Formel lautet: $x_1\,x\cdot e^{-x_2\,x}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=5 \qquad x_2=6$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ mit $a_i=\dfrac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).

$(x\cdot e^x)'=(x+1)\cdot e^x$.

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lclclclcl}
f(x) & = & 5x\cdot e^{-6x} & & & \Rightarrow & f(0) & = & 0\\
f'(x) & = & 5e^{-6x}-6\cdot 5x\cdot e^{-6x} & = & (5-30x)\cdot e^{-6x} & \Rightarrow & f'(0) & = & 5\\
f''(x) & = & -30e^{-6x}+6\cdot(30x-5)\cdot e^{-6x} & = & (-60+180x)\cdot e^{-6x} & \Rightarrow & f''(0) & = & -30\\
f'''(x) & = & -6(-60+180x)\cdot e^{-6x}+180\cdot e^{-6x} & = & (540-1080x)\cdot e^{-6x} & \Rightarrow & f'''(0) & = & 540\\
f^{(n)}(x) & = & (-1)^n(5\cdot 6^n\cdot x-5\cdot n\cdot 6^{n-1})\cdot e^{-6x} & \text{für} & n\geq 1 & \Rightarrow & f^{(n)}(0) & = & (-1)^{n-1}\cdot 5\cdot n\cdot 6^{n-1}
\end{array}$$

Damit gilt für $n\geq 1$:

$$a_0 \;=\; f(0) \;=\; 0, \qquad a_n \;=\; \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \;=\; \frac{(-2)^{n-1}\cdot 5\cdot n}{n!} \;=\; \frac{5\cdot(-2)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Die Taylorreihe ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot(-2)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot x^n$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man $-6x = w$ substituiert hätte:

$5x \cdot e^w$	$= 5x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$	Taylorreihe von e^w
	$= 5x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-6x)^n}{n!}$	Rücksubstitution
	$= \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \frac{(-6)^n}{n!} \cdot x \cdot x^n$	Distributivgesetz
	$= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{5\cdot(-6)^n}{n!} \cdot x^{n+1}$	Potenzgesetz
	$= \sum_{m-1=0}^{m-1=\infty} \frac{5\cdot(-6)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot x^m$	Indexverschiebung $m = n+1$
	$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-6)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	m wieder als n geschrieben

Angebotene Lösungen:

☐ 1 $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	☒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-6)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	☐ 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-6)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$
☐ 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 6^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	☐ 5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+6)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	☐ 6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+6)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$
☐ 7 $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^n}{n!} \cdot x^n$	☐ 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-6)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	☐ 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 6^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$
☐ 10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-6)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	☐ 11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 6^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	☐ 12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-6)^n}{n!} \cdot x^{n-1}$

Fehlerinterpretation:

☐ 1 $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
☒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-6)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	richtig
☐ 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-6)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
☐ 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 6^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Durch x geteilt
☐ 5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+6)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
☐ 6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+6)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
☐ 7 $5x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
☐ 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-6)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot x^n$	RF: Durch x geteilt
☐ 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 6^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Bruchrechnen
☐ 10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-6)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}$	DF: Lösung geraten
☐ 11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 6^n}{n!} \cdot \frac{1}{x^n}$	RF: Durch x geteilt
☐ 12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-6)^n}{n!} \cdot x^{n-1}$	RF: Durch x geteilt

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 71 0 2004110001	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.3:

Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 5\sqrt{5x^2 + 9}+5$ in ein Taylorpolynom vom Grad 2 (um 0) .

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1, 2, 3, 4$.
x_2 darf keine Quadratzahl sein.

Die Formel lautet: $x_1\sqrt{x_2\, x^2 + \{x_3 \cdot x_3\}} + x_4$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5$ $x_2 = 5$ $x_3 = 3$ $x_4 = 5$.

Erklärung:

Taylorpolynome sind folgendermaßen definiert: $T_n(x) \quad := \quad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{mit} \quad a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$f'(x) = (5\sqrt{5x^2+9}+5)' = \frac{5\cdot 2\cdot 5x}{2\sqrt{5x^2+9}} = \frac{25x}{\sqrt{5x^2+9}} \Rightarrow f'(0) = 0$$

$f'(0) = 0$ war erwartet worden, weil f achsensymmetrisch zur y - Achse ist

$$f''(x) = \frac{25\cdot\sqrt{5x^2+9}-25x\cdot\frac{2\cdot 5x}{2\sqrt{5x^2+9}}}{(\sqrt{5x^2+9})^2} = \frac{25(5x^2+9)-125x^2}{(5x^2+9)\sqrt{5x^2+9}} = \frac{225}{(5x^2+9)\sqrt{5x^2+9}} \Rightarrow f''(0) = \frac{225}{9\sqrt{9}} = \frac{25}{3}.$$

$$\text{Damit ist} \quad a_0 = f(0) = 20, \quad a_1 = f'(0) = 0, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{25}{6}.$$

$$T_2(x) := \sum_{i=0}^{2} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\, x^i = \frac{f(0)}{0!}\, x^0 + \frac{f'(0)}{1!}\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 = 20 + \frac{25}{6}\, x^2$$

Angebotene Lösungen:

1 $1+x+\frac{x^2}{2}$	2 $14+5\sqrt{5}x^2$	☒ $20+\frac{25}{6}x^2$	4 $10+\frac{25}{3}x^2$
5 $1+x+x^2$	6 $20+\frac{25}{3}x$	7 $14+5\sqrt{5}x$	8 $20+\frac{25}{6}x$
9 $20+\frac{25}{3}x^2$	10 $10+\frac{25}{3}x$	11 $9+5x$	12 Es gibt keine

Fehlerinterpretation:

1	$1+x+\frac{x^2}{2}$	DF: Lösung geraten
2	$14+5\sqrt{5}x^2$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
☒	$20+\frac{25}{6}x^2$	richtig
4	$10+\frac{25}{3}x^2$	RF: Durch 2! an der falschen Stelle dividiert
5	$1+x+x^2$	DF: Lösung geraten
6	$20+\frac{25}{3}x$	RF: 2! im Nenner vergessen
7	$14+5\sqrt{5}x$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
8	$20+\frac{25}{6}x$	RF: x^2 vergessen
9	$20+\frac{25}{3}x^2$	RF: 2! im Nenner vergessen
10	$10+\frac{25}{3}x$	RF: Durch 2! an der falschen Stelle dividiert
11	$9+5x$	DF: Funktion aus der Aufgabe abgeschrieben
12	Es gibt keine	DF: Doch

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 79 0 2004110003	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.4: Entwickeln Sie die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x) = 2+5x+e^{2x}$ in eine Taylorreihe (um 0).

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 0$, $x_2 > 1$, $x_3 > 1$.

Die Formel lautet: $x_1 + x_2\, x + e^{x_3\, x}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 2$.

Erklärung:

Die Taylorreihe ist folgendermaßen definiert: $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (sofern die Reihe konvergiert).
Das Polynom vor der $e-$ Funktion wird einfach zu den ersten Koeffizienten der Taylorreihe addiert.
Die Ableitung von e^{ax} ist $a \cdot e^{ax}$.

Rechnung:

Zuerst differenzieren wir $f(x)$:

$$\begin{array}{lllllllll} f(x) & = & 2+5x+e^{2x} & & & \Rightarrow & f(0) & = & 2+1=3 \\ f'(x) & = & (2+5x+e^{2x})' & = & 5+2\cdot e^{2x} & \Rightarrow & f'(0) & = & 7 \\ f''(x) & = & (5+2\cdot e^{2x})' & = & 4\cdot e^{2x} & \Rightarrow & f''(0) & = & 4 \\ f^{(n)}(x) & = & 2^n \cdot e^{2x} & & \text{für } n \geq 2 & \Rightarrow & & & \\ & & & & & & f^{(n)}(0) = 2^n & & \end{array}$$

Damit gilt für $n \geq 2$:

$$a_0 = f(0) = 3, \quad a_1 = f'(0) = 7, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{4}{2}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{2^n}{n!}.$$

$$\text{Die Taylorreihe ist} \qquad 3 + 7\,x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot x^n \ .$$

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man $2x = w$ substituiert hätte:

$$2+5x+e^w = 2+5x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = 2+5x+1+w + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = 3+7x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot x^n$$

Angebotene Lösungen:

1 $\sum_{n=0}^{\infty}(2+5x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	2 $\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot (2+5x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	3 $\sum_{n=0}^{\infty}(2+5x) + \frac{2^n}{n!} \cdot x^n$
4 $2+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot x^n$	5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot x^n$	6 $3+7x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 2 \cdot x^n$
7 Es gibt keine	8 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$	9 $2 \cdot (2+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot x^n)$
10 $2 \cdot (2+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n)$	☒ $3+7x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot x^n$	12 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 2 \cdot x^n$

Fehlerinterpretation:

1 $\sum_{n=0}^{\infty}(2+5x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
2 $\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot (2+5x) + \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
3 $\sum_{n=0}^{\infty}(2+5x) + \frac{2^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Lösung geraten
4 $2+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot x^n$	DF: Polynom nur abgeschrieben
5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot x^n$	RF: Polynom am Anfang vergessen
6 $3+7x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 2 \cdot x^n$	DF: Substitution falsch
7 Es gibt keine	DF: Doch
8 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$	DF: Reihenentwicklung der $e-$ Funktion
9 $2 \cdot (2+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot x^n)$	DF: Lösung geraten
10 $2 \cdot (2+5x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n)$	DF: Lösung geraten
☒ $3+7x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot x^n$	richtig
12 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 2 \cdot x^n$	RF: Polynom am Anfang vergessen

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 80 0 2004110006	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.5: Entwickeln Sie eine Stammfunktion von $f(x) = 4 \cdot \cos(6\,x^2)$ in eine Taylorreihe um 0.

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $f(x) = x_1 \cdot \cos(x_2\, x^2)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \qquad x_2 = 6$.

Erklärung:

Die Funktion $\cos x^2$ ist (vermutlich) nicht elementar integrierbar. Deshalb ist es sinnvoll, zuerst mittels Substitution die Taylorreihenentwicklung von $\cos x^2$ zu bestimmen und diese dann zu integrieren.

Rechnung:

Die Taylorreihenentwicklung von $\cos x$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$.
Wir substituieren $6\,x^2 = w$ und erhalten:

$$\cos(6\,x^2) \quad = \quad \cos w \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot w^{2n}}{(2n)!} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (6\,x^2)^{2n}}{(2n)!} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\int 4 \cdot \cos(6\,x^2) &= \int 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!} && \text{Taylorreihenentwicklung} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int 4 \cdot \frac{(-1)^n \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n)!} && \text{Integration und Summation vertauscht (und mehr ..)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \frac{(-1)^n \cdot 6^{2n} \cdot (\frac{x^{4n+1}}{4n+1} + c)}{(2n)!} && \text{Integriert} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!} && c = 0 \text{ gewählt}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

[1] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$	[2] Es gibt keine	[3] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$
[4] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	[5] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	[6] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$
[7] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	[8] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)(2n)!}$	[9] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$
[x] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	[11] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	[12] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$

Fehlerinterpretation:

[1] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$	DF: Quadrat nicht beachtet
[2] Es gibt keine	DF: Doch
[3] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$	DF: Falsch Integriert
[4] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	DF: Quadrat nicht beachtet
[5] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	RF: Quadrat auf 6 mitbezogen
[6] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
[7] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
[8] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)(2n)!}$	DF: Falsch Integriert
[9] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$	DF: Falsch Integriert
[x] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	richtig
[11] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{4n} \cdot x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$	RF: Quadrat auf 6 mitbezogen
[12] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 \cdot 6^{2n} \cdot x^{4n+1}}{(2n+1)!}$	RF: Fakultät falsch zusammengefasst

MV 04	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 101 0 2004110005	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 11.1.6: Entwickeln Sie die Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: \qquad f(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{5}{x} \cdot \sin(6x) & \text{für } x \neq 0 \\ 30 & \text{für } x = 0 \end{cases} \qquad \text{in eine Taylorreihe um 0.}$$

Parameter:

x_n = Faktoren und Summanden in der Funktion, $x_1 > 1,\ \ x_2 > 1,\ \ x_1 \neq x_2$.

Die Formel lautet: $\frac{x_1}{x} \cdot \sin(x_2\, x)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \qquad x_2 = 6$.

Erklärung:

Durch die Quotientenregel werden die einzelnen Ableitungen sehr schnell sehr kompliziert. Deshalb ist es eventuell sinnvoller, auf die Reihenentwicklung des Sinus zurückzugreifen und mit Substitution und Regeln aus der Summen - Reihenrechnung die Taylorreihe zu finden.

Rechnung:

$$\lim_{x\to 0} a \cdot \frac{\sin bx}{x} \quad =^H \quad \lim_{x\to 0} a \cdot \frac{b \cdot \cos bx}{1} \quad = \quad a \cdot b$$

Damit ist $f(x)$ bei $x = 0$ stetig. Die Taylorreihenentwicklung von $\sin x$ ist $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
Wir substituieren $6x = w$ und erhalten:

$$\sin(6x) \quad = \quad \sin w \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot w^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (6x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{5}{x} \cdot \sin(6x) &= \tfrac{5}{x} \cdot \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (6x)^{2n+1}}{(2n+1)!} && \text{Entwicklung von } \sin x \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{5}{x} \cdot \frac{(-1)^n \cdot (6x)^{2n+1}}{(2n+1)!} && \text{Distributivgesetz} \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{x \cdot (2n+1)!} && \text{Bruchmultiplikation} \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} && x \text{ gekürzt} \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

☒ $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	2 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$	3 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$
4 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n}$	5 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 30}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	6 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$
7 $\sum_{i=1}^{\infty} \infty \cdot x^{2n+1}$	8 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 30}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	9 ∞
10 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	11 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$	12 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 30}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$

Fehlerinterpretation:

☒ $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	richtig
2 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
3 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
4 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n}$	RF: Untere Grenze der Summe ist falsch
5 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 30}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
6 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
7 $\sum_{i=1}^{\infty} \infty \cdot x^{2n+1}$	DF: Lösung geraten
8 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 30}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	DF: Falsch substituiert
9 ∞	DF: Lösung geraten
10 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
11 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 6^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$	DF: $\frac{1}{x}$ vergessen
12 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 30}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$	DF: Falsch substituiert

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu