Blatt Nr 12.00

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 12

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 10 0 2004120002	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.1: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = 2 \cdot \sin(2\,x) \cdot e^{9 \cdot \cos(2\,x)}$

Parameter:

$x_n =$ Faktoren der Funktion, $x_n > 0, \;\; n = 1..3$.

Die Funktion lautet: $x_1 \cdot \sin(x_2\,x) \cdot e^{x_3 \cdot \cos(x_2\,x)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 9$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der äußeren Substitution integriert werden:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\;dx \quad = \quad \int f(g)\;dg$$

Beachten Sie dabei, dass $(\cos(ax))' = -a\sin(ax)$ ist.

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\textstyle\int 2 \cdot \sin(2\,x) \cdot e^{9\cdot\cos(2\,x)}\;dx &= 2 \cdot \textstyle\int \sin(2\,x) \cdot e^{9\cdot\cos(2\,x)}\;dx && \text{Linearität des Integrals}\\
&= 2 \cdot \textstyle\int \sin(2\,x) \cdot e^{g(x)}\;dx && \text{mit } g(x) = 9 \cdot \cos(2\,x)\\
&= -2 \cdot \textstyle\int \frac{-9\cdot 2\cdot\sin(2\,x)}{9\cdot 2} \cdot e^{g(x)}\;dx && \text{Erzeugung der inneren Ableitung}\\
&= -2 \cdot \textstyle\int \frac{g'(x)}{18} \cdot e^{g(x)}\;dx && g'(x) = -9 \cdot 2 \cdot \sin(2\,x)\\
&= -\tfrac{2}{18} \cdot \textstyle\int e^{g}\;dg && \text{Substitutionsregel: } dx \cdot g'(x) = \;dg\\
&= -\tfrac{1}{9} \cdot e^{g} && \text{integriert } (\textstyle\int e^x = e^x)\\
&= -\tfrac{1}{9} \cdot e^{9\cdot\cos(2\,x)} && \text{rücksubstituiert}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

☐1 $9 \cdot \cos(2\,x) \cdot e^{x}$	☐2 $-9 \cdot e^{9\cdot\cos(2\,x)}$	☐3 $\frac{4}{9} \cdot e^{9\cdot\cos(2\,x)}$	☐4 $9 \cdot e^{2\,x} \cdot \cos x$
☐5 $9 \cdot e^{9\cdot\cos(2\,x)}$	☐6 $-1 \cdot \sin(2\,x) \cdot e^{9\cdot\cos(2\,x)}$	☐7 $1 \cdot \cos(2\,x) \cdot e^{9x}$	☐8 $-1 \cdot \cos(2\,x) \cdot e^{9x}$
☐9 $-9 \cdot \cos(2\,x) \cdot e^{x}$	☐10 $\frac{1}{9} \cdot e^{9\cdot\cos(2\,x)}$	☒ $-\frac{1}{9} \cdot e^{9\cdot\cos(2\,x)}$	☐12 $-\frac{4}{9} \cdot e^{9\cdot\cos(2\,x)}$

Fehlerinterpretation:

☐1	$9 \cdot \cos(2\,x) \cdot e^{x}$	DF: Lösung geraten
☐2	$-9 \cdot e^{9\cdot\cos(2\,x)}$	DF: Falsch substituiert
☐3	$\frac{4}{9} \cdot e^{9\cdot\cos(2\,x)}$	DF: Falsch substituiert
☐4	$9 \cdot e^{2\,x} \cdot \cos x$	DF: Lösung geraten
☐5	$9 \cdot e^{9\cdot\cos(2\,x)}$	DF: Falsch substituiert
☐6	$-1 \cdot \sin(2\,x) \cdot e^{9\cdot\cos(2\,x)}$	DF: Lösung geraten
☐7	$1 \cdot \cos(2\,x) \cdot e^{9x}$	DF: Lösung geraten
☐8	$-1 \cdot \cos(2\,x) \cdot e^{9x}$	DF: Lösung geraten
☐9	$-9 \cdot \cos(2\,x) \cdot e^{x}$	DF: Lösung geraten
☐10	$\frac{1}{9} \cdot e^{9\cdot\cos(2\,x)}$	RF: falsches Vorzeichen
☒	$-\frac{1}{9} \cdot e^{9\cdot\cos(2\,x)}$	richtig
☐12	$-\frac{4}{9} \cdot e^{9\cdot\cos(2\,x)}$	DF: Falsch substituiert

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
Produktregel	Integralrechnung	Nummer: 26 0 2004120005	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.2: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = (2\,x - 8) \cdot e^{2\,x+4}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 0, \;\; n = 1..4 \; x_2 > x_1$.

Die Funktion lautet: $(2\,x - 8) \cdot e^{2\,x+4}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 8 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = 4$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der Produktregel integriert werden:

$$\int u' \cdot v \quad = \quad u \cdot v - \int u \cdot v'.$$

Dabei ist u normalerweise die $e-$ Funktion und v das Polynom.
Die Faktoren werden unter anderem mit linearer Substitution integriert: $\int e^{ax+b} = \frac{e^{ax+b}}{a}$.

Rechnung:

Die Rollenverteilung ist:
$$\begin{array}{lllllll} u' & = & e^{2\,x+4} & \Rightarrow & u & = & \frac{e^{2\,x+4}}{2} \\ v & = & 2\,x - 8 & \Rightarrow & v' & = & 2 \;. \end{array}$$

Damit gilt

$$\begin{array}{llllllllllll} \int & (2\,x-8) & \cdot & e^{2\,x+4} & = & (2\,x-8) & \cdot & \frac{e^{2\,x+4}}{2} & - & \int & 2 & \cdot & \frac{e^{2\,x+4}}{2} \\ \int & v & \cdot & u' & = & v & \cdot & u & - & \int & v' & \cdot & u \\ & & & & = & \frac{2 \cdot 2\,x - 8 \cdot 2}{2 \cdot 2} & \cdot & e^{2\,x+4} & - & & 2 & \cdot & \frac{e^{2\,x+4}}{2 \cdot 2} \\ & & & & = & \frac{4\,x-18}{4} & \cdot & e^{2\,x+4} & & & & & \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{2\,x^2-8x}{20} \cdot e^{2\,x+5}$	2 $\frac{4\,x+18}{4} \cdot e^{2\,x+5}$	3 $\frac{4\,x-18}{20} \cdot e^{2\,x+5}$	4 $\frac{4\,x-18}{20} \cdot e^{3\,x+4}$
☒ $\frac{4\,x-18}{4} \cdot e^{2\,x+4}$	6 $(1x^2 - 8x) \cdot e^{1\,x^2+4x}$	7 $(4\,x - 10) \cdot e^{2\,x+4}$	8 $\frac{2\,x^2-8x}{20} \cdot e^{3\,x+4}$
9 $(\frac{1}{2}x^2 - 4x) \cdot e^{2\,x+4}$	10 $\frac{2\,x^2-8x}{20} \cdot e^{3\,x+5}$	11 $\frac{4\,x+18}{4} \cdot e^{2\,x+4}$	12 $\frac{4\,x-18}{20} \cdot e^{3\,x+5}$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{2\,x^2-8x}{20} \cdot e^{2\,x+5}$	DF: Falsch integriert
2	$\frac{4\,x+18}{4} \cdot e^{2\,x+5}$	DF: Falsch integriert
3	$\frac{4\,x-18}{20} \cdot e^{2\,x+5}$	DF: Falsch integriert
4	$\frac{4\,x-18}{20} \cdot e^{3\,x+4}$	DF: Falsch integriert
☒	$\frac{4\,x-18}{4} \cdot e^{2\,x+4}$	richtig
6	$(1x^2 - 8x) \cdot e^{1\,x^2+4x}$	DF: Falsch integriert
7	$(4\,x - 10) \cdot e^{2\,x+4}$	DF: Abgeleitet
8	$\frac{2\,x^2-8x}{20} \cdot e^{3\,x+4}$	DF: Falsch integriert
9	$(\frac{1}{2}x^2 - 4x) \cdot e^{2\,x+4}$	DF: Falsch integriert
10	$\frac{2\,x^2-8x}{20} \cdot e^{3\,x+5}$	DF: Falsch integriert
11	$\frac{4\,x+18}{4} \cdot e^{2\,x+4}$	DF: Falsch integriert
12	$\frac{4\,x-18}{20} \cdot e^{3\,x+5}$	DF: Falsch integriert

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
Produktregel	Integralrechnung	Nummer: 52 0 2004120004	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.3: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : [0, \frac{1}{6}] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{4 - 144 \cdot x^2}$.

Parameter:

x_n = geloste Zahlen, $x_n > 0$, $n = 1..2$. $x_3 := x_1^2$, $x_4 := x_3 \cdot x_2^2$

Die Funktion lautet: $\sqrt{x_3 - x_4 \cdot x^2}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 6 \quad x_3 = 4 \quad x_4 = 144$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der inneren Substitution integriert werden:

$$\int f(g)\, dg \quad = \quad \int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$$

Dabei soll die Wurzel durch die Gleichung $(*)$ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ verschwinden.

Das in der Rechnung entstehende $\int \sin^2 x$ berechnen wir wie folgt:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \int & \sin x & \cdot & \sin x & = & -\cos x & \cdot & \sin x & - & \int & -\cos x & \cdot & \cos x \\ \int & u' & \cdot & v & = & u & \cdot & v & - & \int & u & \cdot & v' \end{array}.$$

Dies ist aber nur scheinbar 'im Kreis' gerechnet:

$$\begin{array}{rcll} \int \sin^2 x & = & -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x & \text{siehe oben} \\ & = & -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x) & \text{mit Formel } (*) \\ & = & -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x & \text{Linearität des Integrals} \end{array}$$

Addition von $\int \sin^2 x$ ergibt:

$$2 \cdot \int \sin^2 x = x - \cos x \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad \int \sin^2 x = \frac{x - \cos x \cdot \sin x}{2}.$$

In der Rechnung entsteht weiterhin ein Ausdruck der Form $\sin(\arccos x)$. Diesen Ausdruck berechnen wir wie folgt: Sei $y = \arccos x$, dann gilt:

$$\begin{array}{rll} \sin y & = (\pm)\sqrt{1 - \cos^2 y} & \text{nach Formel } (*) \\ & = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} & y = \arccos x \\ & = \sqrt{1 - x^2} & \cos(\arccos x) = x \quad . \end{array}$$

Damit ist $\sin(\arccos x) = (\pm)\sqrt{1 - x^2}$.

Rechnung:

Zuerst klammern wir 4 aus: $\sqrt{4 - 144 \cdot x^2} \;=\; \sqrt{4 \cdot (1 - 36 \cdot x^2)} \;=\; 2 \cdot \sqrt{1 - 36 \cdot x^2}$.
Jetzt substituieren wir $x(t) := \frac{\cos t}{6}$, t kann im Bereich von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ gewählt werden.

$$\begin{array}{rcll} \int 2 \cdot \sqrt{1 - 36 \cdot x^2}\, dx & = & \int 2 \cdot \sqrt{1 - 36 \cdot (\frac{\cos t}{6})^2}\, dx & \text{Substitution} \\ & = & 2 \cdot \int \sqrt{1 - \cos^2 t} \;\cdot x' \cdot dt & \text{mit } dx \;=\; x' \cdot dt \\ & = & 2 \cdot \int \sqrt{\sin^2 t} \;\cdot \frac{-\sin t}{6} \cdot dt & x' \;=\; \frac{-\sin t}{6} \\ & = & 2 \cdot \int |\sin t| \cdot \frac{-\sin t}{6} \cdot dt & \\ & = & \frac{2}{6} \cdot \int \sin^2 t \cdot dt & \text{t} \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ & = & -\frac{1}{3} \cdot \frac{t - \cos t \cdot \sin t}{2} & \text{siehe oben} \\ & = & -\frac{1}{6} \cdot (\arccos\,(6\,x) - \cos\arccos\,(6\,x) \cdot \sin\arccos\,(6\,x)) & t = \arccos\,(6\,x) \\ & = & -\frac{1}{6} \cdot (\arccos\,(6\,x) - 6\,x \cdot \sqrt{1 - (6\,x)^2}) & \sin(\arccos\,(6\,x)) = \sqrt{1 - (6\,x)^2} \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{4\cdot(1-36\cdot x^2)^{3/2}}{6x}$	2 $6\cdot\frac{x}{\sqrt{1-(6\,x)^2}}$
3 $2x+6\cdot x^2$	4 $\frac{2}{3}\cdot(x\cdot\sqrt{1-(6\,x)^2}-6\ \text{areaccosh}\ x)$
☒ $\frac{1}{6}\cdot(6\,x\cdot\sqrt{1-(6\,x)^2}-\arccos\,(6\,x))$	6 $\frac{1}{3}\cdot(\arccos\,(6\,x))$
7 $\frac{4\cdot(1^{3/2}-36\cdot x^3)}{6x}$	8 $\frac{1}{3}\cdot(\ \text{areaccosh}\,(6\,x)\ )$
9 $\frac{1}{6}\cdot(6\,x\cdot\sqrt{1-(6\,x)^2}-\ \text{areaccosh}\,(6\,x))$	10 $\frac{1}{3}\cdot(x\cdot\sqrt{1-6^2\,x^2}-6\arccos x)$
11 $\frac{3}{2}\cdot\frac{(1+36\cdot x^2)^{3/2}}{x}$	12 162

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{4\cdot(1-36\cdot x^2)^{3/2}}{6x}$	DF: Falsche Substitution
2	$6\cdot\frac{x}{\sqrt{1-(6\,x)^2}}$	DF: Funktion abgeleitet
3	$2x+6\cdot x^2$	DF: Wurzelrechnung falsch
4	$\frac{2}{3}\cdot(x\cdot\sqrt{1-(6\,x)^2}-6\ \text{areaccosh}\ x)$	DF: Falsche Substitution
☒	$\frac{1}{6}\cdot(6\,x\cdot\sqrt{1-(6\,x)^2}-\arccos\,(6\,x))$	richtig
6	$\frac{1}{3}\cdot(\arccos\,(6\,x))$	DF: Antwort geraten
7	$\frac{4\cdot(1^{3/2}-36\cdot x^3)}{6x}$	DF: Falsche Substitution
8	$\frac{1}{3}\cdot(\ \text{areaccosh}\,(6\,x)\ )$	DF: Antwort geraten
9	$\frac{1}{6}\cdot(6\,x\cdot\sqrt{1-(6\,x)^2}-\ \text{areaccosh}\,(6\,x))$	DF: Falsche Substitution
10	$\frac{1}{3}\cdot(x\cdot\sqrt{1-6^2\,x^2}-6\arccos x)$	RF: Viele falsche Faktoren
11	$\frac{3}{2}\cdot\frac{(1+36\cdot x^2)^{3/2}}{x}$	DF: Falsche Substitution
12	162	GL: geratene Lösung

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 60 0 2004120001	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.4: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad f(x)=5\cdot(2\cdot x-9)^7$

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n>0,\ \ n=1..4,\ \ x_3>x_2$

Die Funktion lautet: $x_1\cdot(x_2\cdot x\ -\ x_3)^{x_4}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=5\qquad x_2=2\qquad x_3=9\qquad x_4=7.$

Erklärung:

Diese Funktion kann mit linearer Substitution und der Potenzregel integriert werden:

$$\int x^n\,dx\ =\ \frac{x^{n+1}}{n+1}\qquad\text{und}\qquad\int f(ax+b)\,dx\ =\ \frac{F(ax+b)}{a}\quad\text{wenn}\int f(x)\,dx=F(x)\ .$$

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll}\int 5\cdot(2\cdot x-9)^7dx & = & 5\cdot\int(2\cdot x-9)^7dx & \text{Linearität des Integrals}\\ & = & 5\cdot\int(g(x))^7dx & \text{mit } g(x)=2\cdot x-9\\ & = & 5\cdot\int g^7\frac{dg}{g'} & \text{lineare Substitution}\\ & = & 5\cdot\frac{g^{7+1}}{7+1}\cdot\frac{1}{2} & \text{Potenzregel}\\ & = & \frac{5}{16}\cdot(2\cdot x-9)^8 & \text{Rücksubstitution}\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{5\cdot(2\cdot x)^6}{12} - 5\cdot 9^7 x$	2 $70\cdot(2\cdot x-9)^6$	☒ $\frac{5}{16}\cdot(2\cdot x-9)^8$	4 $\frac{5}{72}\cdot(2\cdot x-9)^8$
5 $\frac{5\cdot(2\cdot x)^8}{16} - 45x$	6 $\frac{5\cdot(2\cdot x)^8}{16} - 5\cdot 9^7 x$	7 $\frac{35}{2}\cdot(2\cdot x-9)^7$	8 $\frac{5}{4}\cdot(2\cdot x-9)^8$
9 $\frac{5}{2}\cdot(2\cdot x-9)^7$	10 $\frac{5\cdot(2\cdot x)^8}{8} - 5\cdot 9^7 x$	11 $\frac{40}{9}\cdot(2\cdot x-9)^8$	12 $\frac{5\cdot(2\cdot x)^7}{7} - 5\cdot 9^7 x$

Fehlerinterpretation:

1 $\frac{5\cdot(2\cdot x)^6}{12} - 5\cdot 9^7 x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
2 $70\cdot(2\cdot x-9)^6$	DF: Abgeleitet
☒ $\frac{5}{16}\cdot(2\cdot x-9)^8$	richtig
4 $\frac{5}{72}\cdot(2\cdot x-9)^8$	DF: Falsche innere Ableitung
5 $\frac{5\cdot(2\cdot x)^8}{16} - 45x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
6 $\frac{5\cdot(2\cdot x)^8}{16} - 5\cdot 9^7 x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
7 $\frac{35}{2}\cdot(2\cdot x-9)^7$	DF: Integration vergessen
8 $\frac{5}{4}\cdot(2\cdot x-9)^8$	DF: Mit innerer Ableitung multipliziert
9 $\frac{5}{2}\cdot(2\cdot x-9)^7$	DF: Integration vergessen
10 $\frac{5\cdot(2\cdot x)^8}{8} - 5\cdot 9^7 x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
11 $\frac{40}{9}\cdot(2\cdot x-9)^8$	DF: Falsche innere Ableitung
12 $\frac{5\cdot(2\cdot x)^7}{7} - 5\cdot 9^7 x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 94 0 2004120003	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.5: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f:[0,\frac{\pi}{6})\to\mathbb{R}\quad f(x)=5\cdot\frac{\sin(\tan(3\,x))}{\cos^2(3\,x)}$.

Parameter:

x_n = Faktoren der Funktion, $x_n>0,\;\; n=1..2$.

Die Funktion lautet: $x_1\cdot\frac{\sin(\tan(x_2\,x))}{\cos^2(x_2\,x)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=5 \qquad x_2=3$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der äußeren Substitution integriert werden:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx \quad = \quad \int f(g)\,dg$$

Beachten Sie dabei, dass gilt:

$$\begin{aligned}
(\tan(ax))' &= (\tfrac{\sin(ax)}{\cos(ax)})' && \text{Definition des Tangens}\\
&= \tfrac{a\cos(ax)\cdot\cos(ax)-\sin(ax)\cdot(-a\sin(ax))}{\cos^2(ax)} && \text{Quotientenregel}\\
&= \tfrac{a(\cos^2(ax)+\sin^2(ax))}{\cos^2(ax)} && \text{zusammengefasst}\\
&= \tfrac{a}{\cos^2(ax)} && \cos^2 x+\sin^2 x=1
\end{aligned}$$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int 5 \cdot \frac{\sin(\tan(3\,x))}{\cos^2(3\,x)}\,dx &= 5 \cdot \int \frac{\sin(g(x))}{\cos^2(3\,x)}\,dx && \text{mit } g(x) = \tan(3\,x) \\
&= \tfrac{5}{3} \cdot \int \sin(g(x)) \cdot \frac{3}{\cos^2(3\,x)}\,dx && \text{Erzeugung der inneren Ableitung} \\
&= \tfrac{5}{3} \cdot \int \sin(g(x)) \cdot g'(x)\,dx && \text{mit } g'(x) = \frac{3}{\cos^2(3\,x)} \\
&= \tfrac{5}{3} \cdot \int \sin(g(x))\,dg && \text{Substitutionsregel: } dx \cdot g'(x) = dg \\
&= \tfrac{5}{3} \cdot -\cos g && \text{integriert } (\textstyle\int \sin x = -\cos x) \\
&= -\tfrac{5}{3} \cdot \cos(\tan(3\,x)) && \text{rücksubstituiert}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

$\boxed{1}$ $-\frac{5}{3} \cdot \tan(3\,x)$	$\boxed{2}$ $15 \cdot \sin(\tan(3\,x))$	$\boxed{3}$ $\frac{5}{3} \cdot \ln\lvert\sin(3\,x)\rvert$	$\boxed{4}$ $-15 \cdot \cos(\tan(3\,x))$
$\boxed{5}$ $15 \cdot \ln\lvert\sin(3\,x)\rvert$	$\boxed{6}$ $\frac{5}{3} \cdot \sin(3\,x)$	$\boxed{7}$ $-15 \cdot \cos(3\,x)$	$\boxed{8}$ $-15 \cdot \sin(\tan(3\,x))$
$\boxed{9}$ $-\frac{5}{3} \cdot \sin(\tan(3\,x))$	$\boxtimes$ $-\frac{5}{3} \cdot \cos(\tan(3\,x))$	$\boxed{11}$ $15 \cdot \tan(3\,x)$	$\boxed{12}$ $15 \cdot \cos(3\,x)$

Fehlerinterpretation:

$\boxed{1}$ $-\frac{5}{3} \cdot \tan(3\,x)$	DF: Lösung geraten
$\boxed{2}$ $15 \cdot \sin(\tan(3\,x))$	DF: Falsch integriert
$\boxed{3}$ $\frac{5}{3} \cdot \ln\lvert\sin(3\,x)\rvert$	DF: Lösung geraten
$\boxed{4}$ $-15 \cdot \cos(\tan(3\,x))$	DF: Mit innerer Ableitung multipliziert
$\boxed{5}$ $15 \cdot \ln\lvert\sin(3\,x)\rvert$	DF: Lösung geraten
$\boxed{6}$ $\frac{5}{3} \cdot \sin(3\,x)$	DF: Lösung geraten
$\boxed{7}$ $-15 \cdot \cos(3\,x)$	DF: Lösung geraten
$\boxed{8}$ $-15 \cdot \sin(\tan(3\,x))$	DF: Falsch integriert
$\boxed{9}$ $-\frac{5}{3} \cdot \sin(\tan(3\,x))$	DF: Falsch integriert
$\boxtimes$ $-\frac{5}{3} \cdot \cos(\tan(3\,x))$	richtig
$\boxed{11}$ $15 \cdot \tan(3\,x)$	DF: Lösung geraten
$\boxed{12}$ $15 \cdot \cos(3\,x)$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
innere	Integralrechnung	Nummer: 102 0 2004120006	Kl: 14G
Grad: 80 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.6: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 97}$.

Parameter:

$x_n > 0$, x_n Quadratzahlen $\quad n = 1..2$.

Die Funktion lautet: $\sqrt{x^2 - \{2 \cdot x_1\}\,x + \{x_1^2 \,+\, x_2^2\}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \qquad x_2 = 9$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der inneren Substitution integriert werden:

$$\int f(g)\,dg \quad = \quad \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$$

Dazu muss der Term unter der Wurzel zunächst quadratisch ergänzt werden.
Die Wurzel soll durch die Gleichung $(*)$ $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ verschwinden.
$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Das in der Rechnung entstehende $\int \cosh^2 u$ berechnen wir wie folgt:

$$\begin{array}{rcll} \int \cosh^2 u \, du & = & \frac{1}{4}\int e^{2u}+2+e^{-2u} \, du & \text{nach Definition des Kosinushyperbolikus} \\ & = & \frac{1}{4}(\frac{e^{2u}}{2}+2u+\frac{e^{-2u}}{-2}) & \text{integriert mit äußerer Substitution} \end{array}$$

Desweiteren wird eine Formel für die Umkehrfunktion des Sinushyperbolikus = areasinh y benötigt:

$$\begin{array}{rcll} \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = y & \Leftrightarrow & e^x - 2y - e^{-x} = 0 & \text{Multiplikation mit 2} \\ & \Leftrightarrow & e^{2x} - 2y \cdot e^x - 1 = 0 & \text{Multiplikation mit } e^x \\ & \Leftrightarrow & u^2 - 2y \cdot u - 1 = 0 & \text{Substitution } e^x = u \\ & \Leftrightarrow & u_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} & \text{Mitternachtsformel} \\ & \Leftrightarrow & x_{1,2} = \ln(y \pm \sqrt{y^2+1}) & \text{Rücksubstitution} \\ & \Leftrightarrow & x_{1,2} = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) & \text{Der ln ist nur für positive Argumente definiert} \end{array}$$

Rechnung:

$$\sqrt{x^2-8x+97} \quad = \quad \sqrt{(x-4)^2-16+97} \quad = \quad \sqrt{(x-4)^2+81} \quad = \quad 9 \cdot \sqrt{\left(\frac{x-4}{9}\right)^2+1}$$

Nach dieser quadratischen Ergänzung kann man die innere Substitution mit Sinushyperbolikus erkennen: $\frac{x-4}{9} := \sinh t$:

$$\begin{array}{rcll} \int \sqrt{x^2-8x+97} \; dx & = & \int 9 \cdot \sqrt{\left(\frac{x-4}{9}\right)^2+1} \; dx & \text{siehe oben} \\ & = & 9 \cdot \int \sqrt{(\sinh t)^2+1} \; dx & \frac{x-4}{9} := \sinh t \\ & = & 9 \cdot \int \sqrt{(\cosh t)^2} \; x' \cdot dt & (*) \text{ und innere Substitution} \\ & = & 9 \cdot \int |\cosh t| \; \cdot 9 \cosh t \cdot dt & x' = (9\sinh t + 4)' = 9\cosh t \\ & = & 81 \cdot \int \cosh^2 t \cdot dt & \cosh t > 0 \\ & = & \frac{81}{4}\left(\frac{e^{2t}}{2}+2t+\frac{e^{-2t}}{-2}\right) & \text{mit oben} \end{array}$$

$$t \quad = \quad \text{areasinh}\,(\frac{x-4}{9}) \quad = \quad \ln\left(\frac{x-4}{9}+\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1}\right) \qquad \text{damit gilt:}$$

$$\begin{array}{rcl} \int f(x) & = & \frac{81}{4}\left(\frac{e^{2\cdot\ln(\frac{x-4}{9}+\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})}}{2} + 2\ln(\frac{x-4}{9}+\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1}) + \frac{e^{-2\cdot\ln(\frac{x-4}{9}+\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})}}{-2}\right) \\ & = & \frac{81}{4}\left(\frac{e^{\ln\left((\frac{x-4}{9}+\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})^2\right)}}{2} + 2\ln(\frac{x-4}{9}+\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1}) + \frac{e^{\ln\left((\frac{x-4}{9}+\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})^{-2}\right)}}{-2}\right) \\ & = & \frac{81}{8}\left((\frac{x-4}{9}+\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})^2 + 4\ln(\frac{x-4}{9}+\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1}) - (\frac{x-4}{9}+\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})^{-2}\right) \end{array}$$

Anmerkung des Verfassers:
Wenn ich gewusst hätte, was da rauskommt, hätte ich die Aufgabe wohl lieber gelassen, aber jetzt ist sie schon fertig – viel Spaß beim weiter Vereinfachen und Fehlersuchen. Alle falschen Lösungen sind willkürliche Schätzungen. Es liegt kein spezieller Fehler zu Grunde.

Angebotene Lösungen:

☐ 1 $(\frac{2\cdot(x^2-8x+97)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-8)})$

☐ 2 $\operatorname{areasinh}(\frac{x-4}{9})$

☐ 3 $\ln(\frac{x^2-8x+97}{9})$

☐ 4 $\arcsin(\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})$

☐ 5 $\arcsin(\frac{x-4}{9})$

☐ 6 $\operatorname{arcsinh}(\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})$

☒ $\frac{81}{8}\left((\frac{x-4}{9}+\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-4}{9}+\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})-(\frac{x-4}{9}+\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})^{-2}\right)$

☐ 8 $\arcsin(\frac{x^2-8x+97}{9})$

☐ 9 $\frac{\ln(x^2-8x+97)}{9}$

☐ 10 $\operatorname{areasinh}(\frac{x-4}{9}) + (\frac{2\cdot(x^2-8x+97)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-8)})$

☐ 11 $\frac{x^2}{2}-\frac{16}{3}x+97$

☐ 12 $\frac{\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-4}{9}+\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})-(\frac{x-4}{9}+\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})^{-2}}{8}$

Fehlerinterpretation:

☐ 1	$(\frac{2\cdot(x^2-8x+97)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-8)})$	DF: 3
☐ 2	$\operatorname{areasinh}(\frac{x-4}{9})$	DF: 1
☐ 3	$\ln(\frac{x^2-8x+97}{9})$	DF: 10
☐ 4	$\arcsin(\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})$	DF: 8
☐ 5	$\arcsin(\frac{x-4}{9})$	DF: 2
☐ 6	$\operatorname{arcsinh}(\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})$	DF: 9
☒	$\frac{81}{8}\left((\frac{x-4}{9}+\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-4}{9}+\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})-(\frac{x-4}{9}+\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})^{-2}\right)$	richtig
☐ 8	$\arcsin(\frac{x^2-8x+97}{9})$	DF: 11
☐ 9	$\frac{\ln(x^2-8x+97)}{9}$	DF: 5
☐ 10	$\operatorname{areasinh}(\frac{x-4}{9}) + (\frac{2\cdot(x^2-8x+97)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-8)})$	DF: 7
☐ 11	$\frac{x^2}{2}-\frac{16}{3}x+97$	DF: 4
☐ 12	$\frac{\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-4}{9}+\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})-(\frac{x-4}{9}+\sqrt{(\frac{x-4}{9})^2+1})^{-2}}{8}$	DF: 6

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu