Blatt Nr 12.03

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 12

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 28 0 2004120002	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.1: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad f(x)=4\cdot\sin(5\,x)\cdot e^{10\cdot\cos(5\,x)}$

Parameter:

x_n = Faktoren der Funktion, $x_n>0,\ \ n=1..3$.

Die Funktion lautet: $x_1\cdot\sin(x_2\,x)\cdot e^{x_3\cdot\cos(x_2\,x)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=4 \quad x_2=5 \quad x_3=10$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der äußeren Substitution integriert werden:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx \quad = \quad \int f(g)\,dg$$

Beachten Sie dabei, dass $(\cos(ax))'=-a\sin(ax)$ ist.

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int 4\cdot\sin(5\,x)\cdot e^{10\cdot\cos(5\,x)}\,dx &= 4\cdot\int\sin(5\,x)\cdot e^{10\cdot\cos(5\,x)}\,dx && \text{Linearität des Integrals}\\
&= 4\cdot\int\sin(5\,x)\cdot e^{g(x)}\,dx && \text{mit } g(x)=10\cdot\cos(5\,x)\\
&= -4\cdot\int\tfrac{-10\cdot5\cdot\sin(5\,x)}{10\cdot5}\cdot e^{g(x)}\,dx && \text{Erzeugung der inneren Ableitung}\\
&= -4\cdot\int\tfrac{g'(x)}{50}\cdot e^{g(x)}\,dx && g'(x)=-10\cdot5\cdot\sin(5\,x)\\
&= -\tfrac{4}{50}\cdot\int e^g\,dg && \text{Substitutionsregel: } dx\cdot g'(x)=\ dg\\
&= -\tfrac{2}{25}\cdot e^g && \text{integriert } (\textstyle\int e^x=e^x)\\
&= -\tfrac{2}{25}\cdot e^{10\cdot\cos(5\,x)} && \text{rücksubstituiert}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

☐ 1 $8\cdot e^{5\,x}\cdot\cos x$	☐ 2 $-8\cdot e^{5\,x}\cdot\cos x$	☐ 3 $\frac{2}{25}\cdot e^{10\cdot\cos(5\,x)}$	☐ 4 $\frac{4}{5}\cdot\sin(5\,x)\cdot e^{10\cdot\cos(5\,x)}$
☐ 5 $8\cdot\cos(5\,x)\cdot e^x$	☐ 6 $8\cdot e^{10\cdot\cos(5\,x)}$	☐ 7 $-\frac{4}{5}\cdot\cos(5\,x)\cdot e^{10x}$	☐ 8 $2\cdot e^{10\cdot\cos(5\,x)}$
☐ 9 $-8\cdot\cos(5\,x)\cdot e^x$	☐ 10 $-\frac{4}{5}\cdot\sin(5\,x)\cdot e^{10\cdot\cos(5\,x)}$	☐ 11 $-8\cdot e^{10\cdot\cos(5\,x)}$	☒ $-\frac{2}{25}\cdot e^{10\cdot\cos(5\,x)}$

Fehlerinterpretation:

☐ 1 $8\cdot e^{5\,x}\cdot\cos x$	DF: Lösung geraten
☐ 2 $-8\cdot e^{5\,x}\cdot\cos x$	DF: Lösung geraten
☐ 3 $\frac{2}{25}\cdot e^{10\cdot\cos(5\,x)}$	RF: falsches Vorzeichen
☐ 4 $\frac{4}{5}\cdot\sin(5\,x)\cdot e^{10\cdot\cos(5\,x)}$	DF: Lösung geraten
☐ 5 $8\cdot\cos(5\,x)\cdot e^x$	DF: Lösung geraten
☐ 6 $8\cdot e^{10\cdot\cos(5\,x)}$	DF: Falsch substituiert
☐ 7 $-\frac{4}{5}\cdot\cos(5\,x)\cdot e^{10x}$	DF: Lösung geraten
☐ 8 $2\cdot e^{10\cdot\cos(5\,x)}$	DF: Falsch substituiert
☐ 9 $-8\cdot\cos(5\,x)\cdot e^x$	DF: Lösung geraten
☐ 10 $-\frac{4}{5}\cdot\sin(5\,x)\cdot e^{10\cdot\cos(5\,x)}$	DF: Lösung geraten
☐ 11 $-8\cdot e^{10\cdot\cos(5\,x)}$	DF: Falsch substituiert
☒ $-\frac{2}{25}\cdot e^{10\cdot\cos(5\,x)}$	richtig

Aufgabe 12.1.2: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : [0, \frac{1}{6}] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{9 - 324 \cdot x^2}$.

Parameter:

x_n = geloste Zahlen, $x_n > 0$, $n = 1..2$. $x_3 := x_1^2$, $x_4 := x_3 \cdot x_2^2$

Die Funktion lautet: $\sqrt{x_3 - x_4 \cdot x^2}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 6 \quad x_3 = 9 \quad x_4 = 324$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der inneren Substitution integriert werden:

$$\int f(g)\, dg \quad = \quad \int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$$

Dabei soll die Wurzel durch die Gleichung (∗) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ verschwinden.

Das in der Rechnung entstehende $\int \sin^2 x$ berechnen wir wie folgt:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \int & \sin x & \cdot & \sin x & = & -\cos x & \cdot & \sin x & - & \int & -\cos x & \cdot & \cos x \\ \int & u' & \cdot & v & = & u & \cdot & v & - & \int & u & \cdot & v' \end{array} .$$

Dies ist aber nur scheinbar 'im Kreis' gerechnet:

$$\begin{array}{rcll} \int \sin^2 x & = & -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x & \text{siehe oben} \\ & = & -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x) & \text{mit Formel } (*) \\ & = & -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x & \text{Linearität des Integrals} \end{array}$$

Addition von $\int \sin^2 x$ ergibt:

$$2 \cdot \int \sin^2 x = x - \cos x \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad \int \sin^2 x = \frac{x - \cos x \cdot \sin x}{2}.$$

In der Rechnung entsteht weiterhin ein Ausdruck der Form $\sin(\arccos x)$. Diesen Ausdruck berechnen wir wie folgt: Sei $y = \arccos x$, dann gilt:

$$\begin{array}{rll} \sin y & = (\pm)\sqrt{1 - \cos^2 y} & \text{nach Formel } (*) \\ & = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} & y = \arccos x \\ & = \sqrt{1 - x^2} & \cos(\arccos x) = x \end{array} .$$

Damit ist $\sin(\arccos x) = (\pm)\sqrt{1 - x^2}$.

Rechnung:

Zuerst klammern wir 9 aus: $\sqrt{9 - 324 \cdot x^2} \; = \; \sqrt{9 \cdot (1 - 36 \cdot x^2)} \; = \; 3 \cdot \sqrt{1 - 36 \cdot x^2}$.

Jetzt substituieren wir $x(t) := \frac{\cos t}{6}$, t kann im Bereich von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ gewählt werden.

$$
\begin{array}{rcll}
\int 3 \cdot \sqrt{1 - 36 \cdot x^2}\, dx & = & \int 3 \cdot \sqrt{1 - 36 \cdot (\frac{\cos t}{6})^2}\, dx & \text{Substitution} \\
& = & 3 \cdot \int \sqrt{1 - \cos^2 t} \quad \cdot x' \cdot dt & \text{mit } dx \ = \ x' \cdot dt \\
& = & 3 \cdot \int \sqrt{\sin^2 t} \quad \cdot \frac{-\sin t}{6} \cdot dt & x' \ = \ \frac{-\sin t}{6} \\
& = & 3 \cdot \int |\sin t| \cdot \frac{-\sin t}{6} \cdot dt & \\
& = & \frac{3}{6} \cdot \int \sin^2 t \cdot dt & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\
& = & -\frac{1}{2} \cdot \frac{t - \cos t \cdot \sin t}{2} & \text{siehe oben} \\
& = & -\frac{1}{4} \cdot (\arccos(6\,x) - \cos \arccos(6\,x) \cdot \sin \arccos(6\,x)) & t = \arccos(6\,x) \\
& = & -\frac{1}{4} \cdot (\arccos(6\,x) - 6\,x \cdot \sqrt{1 - (6\,x)^2}) & \sin(\arccos(6\,x)) = \sqrt{1 - (6\,x)^2}
\end{array}
$$

Angebotene Lösungen:

☒	$\frac{1}{4} \cdot (6\,x \cdot \sqrt{1 - (6\,x)^2} - \arccos(6\,x))$	2	$\frac{6 \cdot (1^{3/2} - 36 \cdot x^3)}{6x}$
3	$\frac{9}{4} \cdot \frac{(1 + 36 \cdot x^2)^{3/2}}{x}$	4	$3x + 9 \cdot x^2$
5	$1 \cdot (x \cdot \sqrt{1 - (6\,x)^2} - 6 \ \text{areaccosh}\, x)$	6	$\frac{1}{4} \cdot (6\,x \cdot \sqrt{1 - (6\,x)^2} - \ \text{areaccosh}\,(6\,x))$
7	$\frac{1}{2} \cdot (\ \text{areaccosh}\,(6\,x)\ )$	8	$9 \cdot \frac{x}{\sqrt{1 - (6\,x)^2}}$
9	$\frac{1}{2} \cdot (\arccos(6\,x))$	10	$\frac{1}{2} \cdot (x \cdot \sqrt{1 - 6^2\,x^2} - 6 \arccos x)$
11	$\frac{6 \cdot (1 - 36 \cdot x^2)^{3/2}}{6x}$	12	162

Fehlerinterpretation:

☒	$\frac{1}{4} \cdot (6\,x \cdot \sqrt{1 - (6\,x)^2} - \arccos(6\,x))$	richtig	
2	$\frac{6 \cdot (1^{3/2} - 36 \cdot x^3)}{6x}$	DF: Falsche Substitution	
3	$\frac{9}{4} \cdot \frac{(1 + 36 \cdot x^2)^{3/2}}{x}$	DF: Falsche Substitution	
4	$3x + 9 \cdot x^2$	DF: Wurzelrechnung falsch	
5	$1 \cdot (x \cdot \sqrt{1 - (6\,x)^2} - 6 \ \text{areaccosh}\, x)$	DF: Falsche Substitution	
6	$\frac{1}{4} \cdot (6\,x \cdot \sqrt{1 - (6\,x)^2} - \ \text{areaccosh}\,(6\,x))$	DF: Falsche Substitution	
7	$\frac{1}{2} \cdot (\ \text{areaccosh}\,(6\,x)\ )$	DF: Antwort geraten	
8	$9 \cdot \frac{x}{\sqrt{1 - (6\,x)^2}}$	DF: Funktion abgeleitet	
9	$\frac{1}{2} \cdot (\arccos(6\,x))$	DF: Antwort geraten	
10	$\frac{1}{2} \cdot (x \cdot \sqrt{1 - 6^2\,x^2} - 6 \arccos x)$	RF: Viele falsche Faktoren	
11	$\frac{6 \cdot (1 - 36 \cdot x^2)^{3/2}}{6x}$	DF: Falsche Substitution	
12	162	GL:	geratene Lösung

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 63 0 2004120003	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.3: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : [0, \frac{\pi}{10}) \to \mathbb{R} \quad f(x) = 5 \cdot \frac{\sin(\tan(5\,x))}{\cos^2(5\,x)}$.

Parameter:

x_n = Faktoren der Funktion, $x_n > 0, \quad n = 1..2.$

Die Funktion lautet: $x_1 \cdot \frac{\sin(\tan(x_2\,x))}{\cos^2(x_2\,x)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \qquad x_2 = 5$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der äußeren Substitution integriert werden:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx \quad = \quad \int f(g)\ dg$$

Beachten Sie dabei, dass gilt:

$$\begin{aligned}
(\tan(ax))' &= (\tfrac{\sin(ax)}{\cos(ax)})' && \text{Definition des Tangens} \\
&= \tfrac{a\cos(ax)\cdot\cos(ax)-\sin(ax)\cdot(-a\sin(ax))}{\cos^2(ax)} && \text{Quotientenregel} \\
&= \tfrac{a(\cos^2(ax)+\sin^2(ax))}{\cos^2(ax)} && \text{zusammengefasst} \\
&= \tfrac{a}{\cos^2(ax)} && \cos^2 x + \sin^2 x = 1
\end{aligned}$$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int 5 \cdot \tfrac{\sin(\tan(5\,x))}{\cos^2(5\,x)}\ dx &= 5 \cdot \int \tfrac{\sin(g(x))}{\cos^2(5\,x)}\ dx && \text{mit } g(x) = \tan(5\,x) \\
&= \tfrac{5}{5} \cdot \int \sin(g(x)) \cdot \tfrac{5}{\cos^2(5\,x)}\ dx && \text{Erzeugung der inneren Ableitung} \\
&= 1 \cdot \int \sin(g(x)) \cdot g'(x)\ dx && \text{mit } g'(x) = \tfrac{5}{\cos^2(5\,x)} \\
&= 1 \cdot \int \sin(g(x))\ dg && \text{Substitutionsregel: } dx \cdot g'(x) = \ dg \\
&= 1 \cdot -\cos g && \text{integriert } (\textstyle\int \sin x = -\cos x) \\
&= -1 \cdot \cos(\tan(5\,x)) && \text{rücksubstituiert}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $-25 \cdot \cos(\tan(5\,x))$	2 $25 \cdot \ln\lvert\cos(5\,x)\rvert$	3 $-25 \cdot \cos(5\,x)$	4 $25 \cdot \tan(5\,x)$
5 $1 \cdot \ln\lvert\sin(5\,x)\rvert$	☒ $-1 \cdot \cos(\tan(5\,x))$	7 $25 \cdot \ln\lvert\sin(5\,x)\rvert$	8 $-25 \cdot \sin(\tan(5\,x))$
9 $1 \cdot \ln\lvert\cos(5\,x)\rvert$	10 $1 \cdot \cos(\tan(5\,x))$	11 $25 \cdot \sin(\tan(5\,x))$	12 $25 \cdot \cos(\tan(5\,x))$

Fehlerinterpretation:

1	$-25 \cdot \cos(\tan(5\,x))$	DF: Mit innerer Ableitung multipliziert
2	$25 \cdot \ln\lvert\cos(5\,x)\rvert$	DF: Lösung geraten
3	$-25 \cdot \cos(5\,x)$	DF: Lösung geraten
4	$25 \cdot \tan(5\,x)$	DF: Lösung geraten
5	$1 \cdot \ln\lvert\sin(5\,x)\rvert$	DF: Lösung geraten
☒	$-1 \cdot \cos(\tan(5\,x))$	richtig
7	$25 \cdot \ln\lvert\sin(5\,x)\rvert$	DF: Lösung geraten
8	$-25 \cdot \sin(\tan(5\,x))$	DF: Falsch integriert
9	$1 \cdot \ln\lvert\cos(5\,x)\rvert$	DF: Lösung geraten
10	$1 \cdot \cos(\tan(5\,x))$	RF: Vorzeichen falsch
11	$25 \cdot \sin(\tan(5\,x))$	DF: Falsch integriert
12	$25 \cdot \cos(\tan(5\,x))$	DF: Mit innerer Ableitung multipliziert

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
Produktregel	Integralrechnung	Nummer: 88 0 2004120005	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.4: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = (7\,x - 14) \cdot e^{6\,x+3}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 0, \;\; n = 1..4 \; x_2 > x_1$.

Die Funktion lautet: $(7\,x - 14) \cdot e^{6\,x+3}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7 \quad x_2 = 14 \quad x_3 = 6 \quad x_4 = 3$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der Produktregel integriert werden:

$$\int u' \cdot v \quad = \quad u \cdot v - \int u \cdot v'.$$

Dabei ist u normalerweise die $e-$ Funktion und v das Polynom.
Die Faktoren werden unter anderem mit linearer Substitution integriert: $\int e^{ax+b} = \frac{e^{ax+b}}{a}$.

Rechnung:

Die Rollenverteilung ist:
$$\begin{array}{lclclcl} u' & = & e^{6\,x+3} & \Rightarrow & u & = & \frac{e^{6\,x+3}}{6} \\ v & = & 7\,x-14 & \Rightarrow & v' & = & 7 \quad . \end{array}$$

Damit gilt
$$\begin{array}{llclclcll} \int & (7\,x-14) & \cdot & e^{6\,x+3} & = & (7\,x-14) & \cdot & \frac{e^{6\,x+3}}{6} & - \int 7 \cdot \frac{e^{6\,x+3}}{6} \\ \int & v & \cdot & u' & = & v & \cdot & u & - \int v' \cdot u \\ & & & & = & \frac{7\cdot 6\,x-14\cdot 6}{6\cdot 6} & \cdot & e^{6\,x+3} & - \quad 7 \cdot \frac{e^{6\,x+3}}{6\cdot 6} \\ & & & & = & \frac{42\,x-91}{36} & \cdot & e^{6\,x+3} & \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $(\frac{7}{2}x^2 - 14x) \cdot e^{3\,x^2+3x}$	2 $\frac{7\,x^2-14x}{48} \cdot e^{7\,x+3}$	3 $\frac{7\,x^2-14x}{48} \cdot e^{7\,x+4}$	4 $\frac{7\,x^2-14x}{48} \cdot e^{6\,x+4}$
5 $\frac{42\,x+91}{36} \cdot e^{6\,x+3}$	6 $\frac{42\,x-91}{144} \cdot e^{6\,x+4}$	7 $\frac{42\,x-91}{144} \cdot e^{7\,x+4}$	8 $(42\,x-21) \cdot e^{6\,x+3}$
9 $\frac{42\,x+91}{36} \cdot e^{6\,x+4}$	10 $(\frac{7}{12}x^2 - \frac{7}{3}x) \cdot e^{6\,x+3}$	11 $\frac{42\,x-91}{144} \cdot e^{7\,x+3}$	☒ $\frac{42\,x-91}{36} \cdot e^{6\,x+3}$

Fehlerinterpretation:

1	$(\frac{7}{2}x^2 - 14x) \cdot e^{3\,x^2+3x}$	DF: Falsch integriert
2	$\frac{7\,x^2-14x}{48} \cdot e^{7\,x+3}$	DF: Falsch integriert
3	$\frac{7\,x^2-14x}{48} \cdot e^{7\,x+4}$	DF: Falsch integriert
4	$\frac{7\,x^2-14x}{48} \cdot e^{6\,x+4}$	DF: Falsch integriert
5	$\frac{42\,x+91}{36} \cdot e^{6\,x+3}$	DF: Falsch integriert
6	$\frac{42\,x-91}{144} \cdot e^{6\,x+4}$	DF: Falsch integriert
7	$\frac{42\,x-91}{144} \cdot e^{7\,x+4}$	DF: Falsch integriert
8	$(42\,x-21) \cdot e^{6\,x+3}$	DF: Abgeleitet
9	$\frac{42\,x+91}{36} \cdot e^{6\,x+4}$	DF: Falsch integriert
10	$(\frac{7}{12}x^2 - \frac{7}{3}x) \cdot e^{6\,x+3}$	DF: Falsch integriert
11	$\frac{42\,x-91}{144} \cdot e^{7\,x+3}$	DF: Falsch integriert
☒	$\frac{42\,x-91}{36} \cdot e^{6\,x+3}$	richtig

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
innere	Integralrechnung	Nummer: 91 0 2004120006	Kl: 14G
Grad: 80 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.5: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad f(x)=\sqrt{x^2-18x+706}$.

Parameter:

$x_n > 0$, x_n Quadratzahlen $\quad n = 1..2$.

Die Funktion lautet: $\sqrt{x^2 - \{2\cdot x_1\}\,x + \{x_1^2\ +\ x_2^2\}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 9 \qquad x_2 = 25$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der inneren Substitution integriert werden:

$$\int f(g)\;dg \quad = \quad \int f(g(x))\cdot g'(x)\;dx$$

Dazu muss der Term unter der Wurzel zunächst quadratisch ergänzt werden.
Die Wurzel soll durch die Gleichung $(*)$ $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ verschwinden.
$\cosh x := \frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \sinh x := \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Das in der Rechnung entstehende $\int\ \cosh^2 u$ berechnen wir wie folgt:

$$\begin{array}{rcll} \int \cosh^2 u\;du & = & \frac{1}{4}\int e^{2u}+2+e^{-2u}\;du & \text{nach Definition des Kosinushyperbolikus} \\ & = & \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2u}}{2}+2u+\frac{e^{-2u}}{-2}\right) & \text{integriert mit äußerer Substitution} \end{array}$$

Desweiteren wird eine Formel für die Umkehrfunktion des Sinushyperbolikus = areasinh y benötigt:

$$\begin{array}{rcll} \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = y & \Leftrightarrow & e^x - 2y - e^{-x} = 0 & \text{Multiplikation mit 2} \\ & \Leftrightarrow & e^{2x} - 2y\cdot e^x - 1 = 0 & \text{Multiplikation mit } e^x \\ & \Leftrightarrow & u^2 - 2y\cdot u - 1 = 0 & \text{Substitution } e^x = u \\ & \Leftrightarrow & u_{1,2} = \frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2} & \text{Mitternachtsformel} \\ & \Leftrightarrow & x_{1,2} = \ln(y\pm\sqrt{y^2+1}) & \text{Rücksubstitution} \\ & \Leftrightarrow & x_{1,2} = \ln(y+\sqrt{y^2+1}) & \text{Der ln ist nur für positive Argumente definiert} \end{array}$$

Rechnung:

$$\sqrt{x^2-18x+706} \quad = \quad \sqrt{(x-9)^2-81+706} \quad = \quad \sqrt{(x-9)^2+625} \quad = \quad 25\cdot\sqrt{\left(\frac{x-9}{25}\right)^2+1}$$

Nach dieser quadratischen Ergänzung kann man die innere Substitution mit Sinushyperbolikus erkennen:
$\frac{x-9}{25} := \sinh t$:

$$\begin{array}{rcll} \int\sqrt{x^2-18x+706}\;\;dx & = & \int 25\cdot\sqrt{\left(\frac{x-9}{25}\right)^2+1}\;\;dx & \text{siehe oben} \\ & = & 25\cdot\int\sqrt{(\sinh t)^2+1}\;\;dx & \frac{x-9}{25} := \sinh t \\ & = & 25\cdot\int\sqrt{(\cosh t)^2}\;\;x'\cdot dt & (*)\text{ und innere Substitution} \\ & = & 25\cdot\int|\cosh t|\quad\cdot 25\cosh t\cdot dt & x' = (25\sinh t+9)' = 25\cosh t \\ & = & 625\cdot\int\cosh^2 t\cdot dt & \cosh t > 0 \\ & = & \frac{625}{4}\left(\frac{e^{2t}}{2}+2t+\frac{e^{-2t}}{-2}\right) & \text{mit oben} \end{array}$$

$$t \quad = \quad \text{areasinh}\,\left(\frac{x-9}{25}\right) \quad = \quad \ln\left(\frac{x-9}{25}+\sqrt{\left(\frac{x-9}{25}\right)^2+1}\right) \qquad \text{damit gilt:}$$

$$
\begin{aligned}
\int f(x) &= \frac{625}{4}\left(\frac{e^{2\cdot\ln(\frac{x-9}{25}+\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})}}{2}+2\ln(\frac{x-9}{25}+\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})+\frac{e^{-2\cdot\ln(\frac{x-9}{25}+\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})}}{-2}\right)\\
&= \frac{625}{4}\left(\frac{e^{\ln\left((\frac{x-9}{25}+\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})^2\right)}}{2}+2\ln(\frac{x-9}{25}+\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})+\frac{e^{\ln\left((\frac{x-9}{25}+\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})^{-2}\right)}}{-2}\right)\\
&= \frac{625}{8}\left((\frac{x-9}{25}+\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-9}{25}+\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})-(\frac{x-9}{25}+\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})^{-2}\right)
\end{aligned}
$$

Anmerkung des Verfassers:
Wenn ich gewusst hätte, was da rauskommt, hätte ich die Aufgabe wohl lieber gelassen, aber jetzt ist sie schon fertig – viel Spaß beim weiter Vereinfachen und Fehlersuchen. Alle falschen Lösungen sind willkürliche Schätzungen. Es liegt kein spezieller Fehler zu Grunde.

Angebotene Lösungen:

- $\boxed{1}$ $\ln(\frac{x^2-18x+706}{25})$
- $\boxed{2}$ $\text{arcsinh}\,(\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})$
- $\boxtimes$ $\frac{625}{8}\left((\frac{x-9}{25}+\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-9}{25}+\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})-(\frac{x-9}{25}+\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})^{-2}\right)$
- $\boxed{4}$ $\text{areasinh}\,(\frac{x-9}{25})$
- $\boxed{5}$ $\frac{\ln(x^2-18x+706)}{25}$
- $\boxed{6}$ $\arcsin(\frac{x^2-18x+706}{25})$
- $\boxed{7}$ $\frac{x^2}{2}-12x+706$
- $\boxed{8}$ $(\frac{2\cdot(x^2-18x+706)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-18)})$
- $\boxed{9}$ $\text{areasinh}\,(\frac{x-9}{25})\;+\;(\frac{2\cdot(x^2-18x+706)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-18)})$
- $\boxed{10}$ $\frac{\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-9}{25}+\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})-(\frac{x-9}{25}+\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})^{-2}}{8}$
- $\boxed{11}$ $\arcsin(\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})$
- $\boxed{12}$ $\arcsin(\frac{x-9}{25})$

Fehlerinterpretation:

$\boxed{1}$ $\ln(\frac{x^2-18x+706}{25})$	DF: 10
$\boxed{2}$ $\text{arcsinh}\,(\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})$	DF: 9
$\boxtimes$ $\frac{625}{8}\left((\frac{x-9}{25}+\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-9}{25}+\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})-(\frac{x-9}{25}+\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})^{-2}\right)$	richtig
$\boxed{4}$ $\text{areasinh}\,(\frac{x-9}{25})$	DF: 1
$\boxed{5}$ $\frac{\ln(x^2-18x+706)}{25}$	DF: 5
$\boxed{6}$ $\arcsin(\frac{x^2-18x+706}{25})$	DF: 11
$\boxed{7}$ $\frac{x^2}{2}-12x+706$	DF: 4
$\boxed{8}$ $(\frac{2\cdot(x^2-18x+706)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-18)})$	DF: 3
$\boxed{9}$ $\text{areasinh}\,(\frac{x-9}{25})\;+\;(\frac{2\cdot(x^2-18x+706)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-18)})$	DF: 7
$\boxed{10}$ $\frac{\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-9}{25}+\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})-(\frac{x-9}{25}+\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})^{-2}}{8}$	DF: 6
$\boxed{11}$ $\arcsin(\sqrt{(\frac{x-9}{25})^2+1})$	DF: 8
$\boxed{12}$ $\arcsin(\frac{x-9}{25})$	DF: 2

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 98 0 2004120001	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.6: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad f(x)=2\cdot(5\cdot x-10)^6$

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n>0,\;\; n=1..4,\;\; x_3>x_2$

Die Funktion lautet: $x_1 \cdot (x_2 \cdot x \,-\, x_3)^{x_4}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 10 \quad x_4 = 6$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit linearer Substitution und der Potenzregel integriert werden:

$$\int x^n \; dx \quad = \quad \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{und} \qquad \int f(ax+b)\; dx \quad = \quad \frac{F(ax+b)}{a} \quad \text{wenn} \int f(x)\; dx = F(x)\;.$$

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll}
\int 2 \cdot (5 \cdot x - 10)^6 dx & = & 2 \cdot \int (5 \cdot x - 10)^6 dx & \text{Linearität des Integrals} \\
 & = & 2 \cdot \int (g(x))^6 dx & \text{mit } g(x) = 5 \cdot x - 10 \\
 & = & 2 \cdot \int g^6 \frac{dg}{g'} & \text{lineare Substitution} \\
 & = & 2 \cdot \frac{g^{6+1}}{6+1} \cdot \frac{1}{5} & \text{Potenzregel} \\
 & = & \frac{2}{35} \cdot (5 \cdot x - 10)^7 & \text{Rücksubstitution}
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

☒ $\frac{2}{35} \cdot (5 \cdot x - 10)^7$	2 $\frac{2 \cdot (5 \cdot x)^6}{6} - 2 \cdot 10^6 x$	3 $\frac{1}{35} \cdot (5 \cdot x - 10)^7$	4 $60 \cdot (5 \cdot x - 10)^5$
5 $\frac{2 \cdot (5 \cdot x)^7}{7} - 2 \cdot 10^6 x$	6 $\frac{12}{5} \cdot (5 \cdot x - 10)^6$	7 $\frac{2}{5} \cdot (5 \cdot x - 10)^6$	8 $\frac{2 \cdot (5 \cdot x)^5}{25} - 2 \cdot 10^6 x$
9 $\frac{10}{7} \cdot (5 \cdot x - 10)^7$	10 $\frac{2 \cdot (5 \cdot x)^7}{35} - 2 \cdot 10^6 x$	11 $\frac{2 \cdot (5 \cdot x)^7}{35} - 20x$	12 $\frac{7}{5} \cdot (5 \cdot x - 10)^7$

Fehlerinterpretation:

☒	$\frac{2}{35} \cdot (5 \cdot x - 10)^7$	richtig
2	$\frac{2 \cdot (5 \cdot x)^6}{6} - 2 \cdot 10^6 x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
3	$\frac{1}{35} \cdot (5 \cdot x - 10)^7$	DF: Falsche innere Ableitung
4	$60 \cdot (5 \cdot x - 10)^5$	DF: Abgeleitet
5	$\frac{2 \cdot (5 \cdot x)^7}{7} - 2 \cdot 10^6 x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
6	$\frac{12}{5} \cdot (5 \cdot x - 10)^6$	DF: Integration vergessen
7	$\frac{2}{5} \cdot (5 \cdot x - 10)^6$	DF: Integration vergessen
8	$\frac{2 \cdot (5 \cdot x)^5}{25} - 2 \cdot 10^6 x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
9	$\frac{10}{7} \cdot (5 \cdot x - 10)^7$	DF: Mit innerer Ableitung multipliziert
10	$\frac{2 \cdot (5 \cdot x)^7}{35} - 2 \cdot 10^6 x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
11	$\frac{2 \cdot (5 \cdot x)^7}{35} - 20x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
12	$\frac{7}{5} \cdot (5 \cdot x - 10)^7$	DF: Falsche innere Ableitung

Allgemeine Hinweise:

Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).

Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu