Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 12

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 3 0 2004120001	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.1: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = 5 \cdot (2 \cdot x - 7)^3$

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 0$, $n = 1..4$, $x_3 > x_2$

Die Funktion lautet: $x_1 \cdot (x_2 \cdot x - x_3)^{x_4}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 7 \quad x_4 = 3$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit linearer Substitution und der Potenzregel integriert werden:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{und} \qquad \int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} \quad \text{wenn} \int f(x)\,dx = F(x)\ .$$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int 5 \cdot (2 \cdot x - 7)^3 dx &= 5 \cdot \int (2 \cdot x - 7)^3 dx && \text{Linearität des Integrals}\\
&= 5 \cdot \int (g(x))^3 dx && \text{mit } g(x) = 2 \cdot x - 7\\
&= 5 \cdot \int g^3 \tfrac{dg}{g'} && \text{lineare Substitution}\\
&= 5 \cdot \tfrac{g^{3+1}}{3+1} \cdot \tfrac{1}{2} && \text{Potenzregel}\\
&= \tfrac{5}{8} \cdot (2 \cdot x - 7)^4 && \text{Rücksubstitution}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

[1] $\frac{5}{2} \cdot (2 \cdot x - 7)^4$	[2] $\frac{20}{7} \cdot (2 \cdot x - 7)^4$	[X] $\frac{5}{8} \cdot (2 \cdot x - 7)^4$	[4] $30 \cdot (2 \cdot x - 7)^2$
[5] $\frac{5 \cdot (2 \cdot x)^3}{3} - 5 \cdot 7^3 x$	[6] $\frac{5 \cdot (2 \cdot x)^2}{4} - 5 \cdot 7^3 x$	[7] $\frac{5 \cdot (2 \cdot x)^4}{8} - 5 \cdot 7^3 x$	[8] $\frac{5 \cdot (2 \cdot x)^4}{8} - 35x$
[9] $\frac{5}{28} \cdot (2 \cdot x - 7)^4$	[10] $\frac{5}{2} \cdot (2 \cdot x - 7)^3$	[11] $\frac{15}{2} \cdot (2 \cdot x - 7)^3$	[12] $\frac{5 \cdot (2 \cdot x)^4}{4} - 5 \cdot 7^3 x$

Fehlerinterpretation:

[1]	$\frac{5}{2} \cdot (2 \cdot x - 7)^4$	DF: Mit innerer Ableitung multipliziert
[2]	$\frac{20}{7} \cdot (2 \cdot x - 7)^4$	DF: Falsche innere Ableitung
[X]	$\frac{5}{8} \cdot (2 \cdot x - 7)^4$	richtig
[4]	$30 \cdot (2 \cdot x - 7)^2$	DF: Abgeleitet
[5]	$\frac{5 \cdot (2 \cdot x)^3}{3} - 5 \cdot 7^3 x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
[6]	$\frac{5 \cdot (2 \cdot x)^2}{4} - 5 \cdot 7^3 x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
[7]	$\frac{5 \cdot (2 \cdot x)^4}{8} - 5 \cdot 7^3 x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
[8]	$\frac{5 \cdot (2 \cdot x)^4}{8} - 35x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
[9]	$\frac{5}{28} \cdot (2 \cdot x - 7)^4$	DF: Falsche innere Ableitung
[10]	$\frac{5}{2} \cdot (2 \cdot x - 7)^3$	DF: Integration vergessen
[11]	$\frac{15}{2} \cdot (2 \cdot x - 7)^3$	DF: Integration vergessen
[12]	$\frac{5 \cdot (2 \cdot x)^4}{4} - 5 \cdot 7^3 x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
Produktregel	Integralrechnung	Nummer: 11 0 2004120004	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.2: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : [0, \frac{1}{5}] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{16 - 400 \cdot x^2}$.

Parameter:

x_n = geloste Zahlen, $x_n > 0$, $n = 1..2$. $x_3 := x_1^2$, $x_4 := x_3 \cdot x_2^2$

Die Funktion lautet: $\sqrt{x_3 - x_4 \cdot x^2}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \qquad x_2 = 5 \qquad x_3 = 16 \qquad x_4 = 400$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der inneren Substitution integriert werden:

$$\int f(g)\, dg \quad = \quad \int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$$

Dabei soll die Wurzel durch die Gleichung $(*)$ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ verschwinden.

Das in der Rechnung entstehende $\int \sin^2 x$ berechnen wir wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \int & \sin x & \cdot & \sin x & = & -\cos x & \cdot & \sin x & - & \int & -\cos x & \cdot & \cos x \\ \int & u' & \cdot & v & = & u & \cdot & v & - & \int & u & \cdot & v' . \end{array} .$$

Dies ist aber nur scheinbar 'im Kreis' gerechnet:

$$\begin{array}{rcll} \int \sin^2 x & = & -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x & \text{siehe oben} \\ & = & -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x) & \text{mit Formel } (*) \\ & = & -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x & \text{Linearität des Integrals} \end{array}$$

Addition von $\int \sin^2 x$ ergibt:

$$2 \cdot \int \sin^2 x = x - \cos x \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad \int \sin^2 x = \frac{x - \cos x \cdot \sin x}{2}.$$

In der Rechnung entsteht weiterhin ein Ausdruck der Form $\sin(\arccos x)$. Diesen Ausdruck berechnen wir wie folgt: Sei $y = \arccos x$, dann gilt:

$$\begin{array}{rll} \sin y & = (\pm)\sqrt{1 - \cos^2 y} & \text{nach Formel } (*) \\ & = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} & y = \arccos x \\ & = \sqrt{1 - x^2} & \cos(\arccos x) = x \quad . \end{array}$$

Damit ist $\sin(\arccos x) = (\pm)\sqrt{1 - x^2}$.

Rechnung:

Zuerst klammern wir 16 aus: $\sqrt{16 - 400 \cdot x^2} \;=\; \sqrt{16 \cdot (1 - 25 \cdot x^2)} \;=\; 4 \cdot \sqrt{1 - 25 \cdot x^2}$.
Jetzt substituieren wir $x(t) := \frac{\cos t}{5}$, t kann im Bereich von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ gewählt werden.

$$\begin{array}{rcll} \int 4 \cdot \sqrt{1 - 25 \cdot x^2}\, dx & = & \int 4 \cdot \sqrt{1 - 25 \cdot (\frac{\cos t}{5})^2}\, dx & \text{Substitution} \\ & = & 4 \cdot \int \sqrt{1 - \cos^2 t} \;\cdot x' \cdot dt & \text{mit } dx \;=\; x' \cdot dt \\ & = & 4 \cdot \int \sqrt{\sin^2 t} \;\cdot \frac{-\sin t}{5} \cdot dt & x' \;=\; \frac{-\sin t}{5} \\ & = & 4 \cdot \int |\sin t| \cdot \frac{-\sin t}{5} \cdot dt & \\ & = & \frac{4}{5} \cdot \int \sin^2 t \cdot dt & \text{t} \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ & = & -\frac{4}{5} \cdot \frac{t - \cos t \cdot \sin t}{2} & \text{siehe oben} \\ & = & -\frac{2}{5} \cdot (\arccos\,(5\,x) - \cos\arccos\,(5\,x) \cdot \sin\arccos\,(5\,x)) & t = \arccos\,(5\,x) \\ & = & -\frac{2}{5} \cdot (\arccos\,(5\,x) - 5\,x \cdot \sqrt{1 - (5\,x)^2}) & \sin(\arccos\,(5\,x)) = \sqrt{1 - (5\,x)^2} \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1	$\frac{8\cdot(1^{3/2}-25\cdot x^3)}{6x}$	2	$\frac{8\cdot(1-25\cdot x^2)^{3/2}}{6x}$
3	$\frac{4}{5}\cdot(\text{ areaccosh }(5\,x))$	4	$\frac{8}{5}\cdot(x\cdot\sqrt{1-(5\,x)^2}-5\ \text{ areaccosh } x)$
5	$\frac{4}{5}\cdot(x\cdot\sqrt{1-5^2\,x^2}-5\arccos x)$	6	$10\cdot\frac{x}{\sqrt{1-(5\,x)^2}}$
7	$4x+10\cdot x^2$	8	$3\cdot\frac{(1+25\cdot x^2)^{3/2}}{x}$
9	$\frac{2}{5}\cdot(5\,x\cdot\sqrt{1-(5\,x)^2}-\ \text{ areaccosh }(5\,x))$	10	$\frac{4}{5}\cdot(\arccos\,(5\,x))$
☒	$\frac{2}{5}\cdot(5\,x\cdot\sqrt{1-(5\,x)^2}-\arccos\,(5\,x))$	12	162

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{8\cdot(1^{3/2}-25\cdot x^3)}{6x}$	DF: Falsche Substitution
2	$\frac{8\cdot(1-25\cdot x^2)^{3/2}}{6x}$	DF: Falsche Substitution
3	$\frac{4}{5}\cdot(\text{ areaccosh }(5\,x))$	DF: Antwort geraten
4	$\frac{8}{5}\cdot(x\cdot\sqrt{1-(5\,x)^2}-5\ \text{ areaccosh } x)$	DF: Falsche Substitution
5	$\frac{4}{5}\cdot(x\cdot\sqrt{1-5^2\,x^2}-5\arccos x)$	RF: Viele falsche Faktoren
6	$10\cdot\frac{x}{\sqrt{1-(5\,x)^2}}$	DF: Funktion abgeleitet
7	$4x+10\cdot x^2$	DF: Wurzelrechnung falsch
8	$3\cdot\frac{(1+25\cdot x^2)^{3/2}}{x}$	DF: Falsche Substitution
9	$\frac{2}{5}\cdot(5\,x\cdot\sqrt{1-(5\,x)^2}-\ \text{ areaccosh }(5\,x))$	DF: Falsche Substitution
10	$\frac{4}{5}\cdot(\arccos\,(5\,x))$	DF: Antwort geraten
☒	$\frac{2}{5}\cdot(5\,x\cdot\sqrt{1-(5\,x)^2}-\arccos\,(5\,x))$	richtig
12	162	GL: geratene Lösung

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 13 0 2004120002	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.3: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad f(x)=2\cdot\sin(4\,x)\cdot e^{7\cdot\cos(4\,x)}$

Parameter:

x_n = Faktoren der Funktion, $x_n>0,\ \ n=1..3$.

Die Funktion lautet: $x_1\cdot\sin(x_2\,x)\cdot e^{x_3\cdot\cos(x_2\,x)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=2\qquad x_2=4\qquad x_3=7$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der äußeren Substitution integriert werden:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\;dx\quad=\quad\int f(g)\;dg$$

Beachten Sie dabei, dass $(\cos(ax))'=-a\sin(ax)$ ist.

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int 2\cdot\sin(4\,x)\cdot e^{7\cdot\cos(4\,x)}\,dx &= 2\cdot\int \sin(4\,x)\cdot e^{7\cdot\cos(4\,x)}\,dx && \text{Linearität des Integrals}\\
&= 2\cdot\int \sin(4\,x)\cdot e^{g(x)}\,dx && \text{mit } g(x) = 7\cdot\cos(4\,x)\\
&= -2\cdot\int \tfrac{-7\cdot 4\cdot\sin(4\,x)}{7\cdot 4}\cdot e^{g(x)}\,dx && \text{Erzeugung der inneren Ableitung}\\
&= -2\cdot\int \tfrac{g'(x)}{28}\cdot e^{g(x)}\,dx && g'(x) = -7\cdot 4\cdot\sin(4\,x)\\
&= -\tfrac{2}{28}\cdot\int e^{g}\,dg && \text{Substitutionsregel: } dx\cdot g'(x) = dg\\
&= -\tfrac{1}{14}\cdot e^{g} && \text{integriert } (\textstyle\int e^x = e^x)\\
&= -\tfrac{1}{14}\cdot e^{7\cdot\cos(4\,x)} && \text{rücksubstituiert}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

[1] $-\frac{7}{2}\cdot e^{4\,x}\cdot\cos x$	[2] $\frac{7}{2}\cdot e^{4\,x}\cdot\cos x$	[3] $\frac{7}{2}\cdot\cos(4\,x)\cdot e^{x}$	[4] $-\frac{7}{2}\cdot e^{7\cdot\cos(4\,x)}$
[5] $\frac{1}{2}\cdot\sin(4\,x)\cdot e^{7\cdot\cos(4\,x)}$	[6] $-\frac{7}{2}\cdot\cos(4\,x)\cdot e^{x}$	[7] $-\frac{8}{7}\cdot e^{7\cdot\cos(4\,x)}$	[8] $-\frac{1}{2}\cdot\sin(4\,x)\cdot e^{7\cdot\cos(4\,x)}$
[9] $\frac{8}{7}\cdot e^{7\cdot\cos(4\,x)}$	[10] $-\frac{1}{2}\cdot\cos(4\,x)\cdot e^{7x}$	[X] $-\frac{1}{14}\cdot e^{7\cdot\cos(4\,x)}$	[12] $\frac{1}{14}\cdot e^{7\cdot\cos(4\,x)}$

Fehlerinterpretation:

[1]	$-\frac{7}{2}\cdot e^{4\,x}\cdot\cos x$	DF: Lösung geraten
[2]	$\frac{7}{2}\cdot e^{4\,x}\cdot\cos x$	DF: Lösung geraten
[3]	$\frac{7}{2}\cdot\cos(4\,x)\cdot e^{x}$	DF: Lösung geraten
[4]	$-\frac{7}{2}\cdot e^{7\cdot\cos(4\,x)}$	DF: Falsch substituiert
[5]	$\frac{1}{2}\cdot\sin(4\,x)\cdot e^{7\cdot\cos(4\,x)}$	DF: Lösung geraten
[6]	$-\frac{7}{2}\cdot\cos(4\,x)\cdot e^{x}$	DF: Lösung geraten
[7]	$-\frac{8}{7}\cdot e^{7\cdot\cos(4\,x)}$	DF: Falsch substituiert
[8]	$-\frac{1}{2}\cdot\sin(4\,x)\cdot e^{7\cdot\cos(4\,x)}$	DF: Lösung geraten
[9]	$\frac{8}{7}\cdot e^{7\cdot\cos(4\,x)}$	DF: Falsch substituiert
[10]	$-\frac{1}{2}\cdot\cos(4\,x)\cdot e^{7x}$	DF: Lösung geraten
[X]	$-\frac{1}{14}\cdot e^{7\cdot\cos(4\,x)}$	richtig
[12]	$\frac{1}{14}\cdot e^{7\cdot\cos(4\,x)}$	RF: falsches Vorzeichen

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 16 0 2004120003	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.4: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f:[0,\frac{\pi}{8})\to\mathbb{R}\quad f(x) = 4\cdot\frac{\sin(\,\tan(4\,x)\,)}{\cos^2(4\,x)}$.

Parameter:

x_n = Faktoren der Funktion, $x_n > 0,\;\; n = 1..2$.

Die Funktion lautet: $x_1\cdot\frac{\sin(\,\tan(x_2\,x)\,)}{\cos^2(x_2\,x)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \qquad x_2 = 4$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der äußeren Substitution integriert werden:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx \quad = \quad \int f(g)\,dg$$

Beachten Sie dabei, dass gilt:

$$\begin{aligned}
(\tan(ax))' &= \left(\tfrac{\sin(ax)}{\cos(ax)}\right)' && \text{Definition des Tangens}\\
&= \tfrac{a\cos(ax)\cdot\cos(ax)-\sin(ax)\cdot(-a\sin(ax))}{\cos^2(ax)} && \text{Quotientenregel}\\
&= \tfrac{a(\cos^2(ax)+\sin^2(ax))}{\cos^2(ax)} && \text{zusammengefasst}\\
&= \tfrac{a}{\cos^2(ax)} && \cos^2 x+\sin^2 x = 1
\end{aligned}$$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int 4\cdot\tfrac{\sin(\tan(4\,x))}{\cos^2(4\,x)}\,dx &= 4\cdot\int\tfrac{\sin(g(x))}{\cos^2(4\,x)}\,dx && \text{mit } g(x)=\tan(4\,x)\\
&= \tfrac{4}{4}\cdot\int\sin(g(x))\cdot\tfrac{4}{\cos^2(4\,x)}\,dx && \text{Erzeugung der inneren Ableitung}\\
&= 1\cdot\int\sin(g(x))\cdot g'(x)\,dx && \text{mit } g'(x)=\tfrac{4}{\cos^2(4\,x)}\\
&= 1\cdot\int\sin(g(x))\,dg && \text{Substitutionsregel: } dx\cdot g'(x) = dg\\
&= 1\cdot-\cos g && \text{integriert } (\textstyle\int\sin x = -\cos x)\\
&= -1\cdot\cos(\tan(4\,x)) && \text{rücksubstituiert}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

☒ $-1\cdot\cos(\tan(4\,x))$	2 $-1\cdot\tan(4\,x)$	3 $16\cdot\tan(4\,x)$	4 $-1\cdot\sin(4\,x)$
5 $16\cdot\ln\lvert\cos(4\,x)\rvert$	6 $16\cdot\sin(\tan(4\,x))$	7 $16\cdot\ln\lvert\sin(4\,x)\rvert$	8 $1\cdot\ln\lvert\sin(4\,x)\rvert$
9 $-16\cdot\cos(\tan(4\,x))$	10 $1\cdot\sin(\tan(4\,x))$	11 $1\cdot\cos(\tan(4\,x))$	12 $1\cdot\sin(4\,x)$

Fehlerinterpretation:

☒	$-1\cdot\cos(\tan(4\,x))$	richtig
2	$-1\cdot\tan(4\,x)$	DF: Lösung geraten
3	$16\cdot\tan(4\,x)$	DF: Lösung geraten
4	$-1\cdot\sin(4\,x)$	DF: Lösung geraten
5	$16\cdot\ln\lvert\cos(4\,x)\rvert$	DF: Lösung geraten
6	$16\cdot\sin(\tan(4\,x))$	DF: Falsch integriert
7	$16\cdot\ln\lvert\sin(4\,x)\rvert$	DF: Lösung geraten
8	$1\cdot\ln\lvert\sin(4\,x)\rvert$	DF: Lösung geraten
9	$-16\cdot\cos(\tan(4\,x))$	DF: Mit innerer Ableitung multipliziert
10	$1\cdot\sin(\tan(4\,x))$	DF: Falsch integriert
11	$1\cdot\cos(\tan(4\,x))$	RF: Vorzeichen falsch
12	$1\cdot\sin(4\,x)$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
innere	Integralrechnung	Nummer: 20 0 2004120006	Kl: 14G
Grad: 80 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.5: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad f(x)=\sqrt{x^2-32x+881}$.

Parameter:

$x_n > 0$, x_n Quadratzahlen $\quad n = 1..2$.

Die Funktion lautet: $\sqrt{x^2-\{2\cdot x_1\}\,x+\{x_1^2\,+\,x_2^2\}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 16 \qquad x_2 = 25$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der inneren Substitution integriert werden:

$$\int f(g)\ dg \quad = \quad \int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx$$

Dazu muss der Term unter der Wurzel zunächst quadratisch ergänzt werden.
Die Wurzel soll durch die Gleichung $(*)$ $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ verschwinden.
$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Das in der Rechnung entstehende $\int \cosh^2 u$ berechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \int \cosh^2 u\ du &= \tfrac{1}{4} \int e^{2u} + 2 + e^{-2u}\ du && \text{nach Definition des Kosinushyperbolikus} \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{e^{2u}}{2} + 2u + \tfrac{e^{-2u}}{-2}\right) && \text{integriert mit äußerer Substitution} \end{aligned}$$

Desweiteren wird eine Formel für die Umkehrfunktion des Sinushyperbolikus = areasinh y benötigt:

$$\begin{aligned} \sinh x = \tfrac{e^x - e^{-x}}{2} = y \quad &\Leftrightarrow \quad e^x - 2y - e^{-x} = 0 && \text{Multiplikation mit 2} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{2x} - 2y \cdot e^x - 1 = 0 && \text{Multiplikation mit } e^x \\ &\Leftrightarrow \quad u^2 - 2y \cdot u - 1 = 0 && \text{Substitution } e^x = u \\ &\Leftrightarrow \quad u_{1,2} = \tfrac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} && \text{Mitternachtsformel} \\ &\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \ln(y \pm \sqrt{y^2+1}) && \text{Rücksubstitution} \\ &\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) && \text{Der ln ist nur für positive Argumente definiert} \end{aligned}$$

Rechnung:

$$\sqrt{x^2 - 32x + 881} \quad = \quad \sqrt{(x-16)^2 - 256 + 881} \quad = \quad \sqrt{(x-16)^2 + 625} \quad = \quad 25 \cdot \sqrt{\left(\frac{x-16}{25}\right)^2 + 1}$$

Nach dieser quadratischen Ergänzung kann man die innere Substitution mit Sinushyperbolikus erkennen:
$\frac{x-16}{25} := \sinh t$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 32x + 881}\ dx &= \int 25 \cdot \sqrt{\left(\tfrac{x-16}{25}\right)^2 + 1}\ dx && \text{siehe oben} \\ &= 25 \cdot \int \sqrt{(\sinh t)^2 + 1}\ dx && \tfrac{x-16}{25} := \sinh t \\ &= 25 \cdot \int \sqrt{(\cosh t)^2}\ x' \cdot dt && (*) \text{ und innere Substitution} \\ &= 25 \cdot \int |\cosh t| \ \cdot 25 \cosh t \cdot dt && x' = (25 \sinh t + 16)' = 25 \cosh t \\ &= 625 \cdot \int \cosh^2 t \cdot dt && \cosh t > 0 \\ &= \tfrac{625}{4}\left(\tfrac{e^{2t}}{2} + 2t + \tfrac{e^{-2t}}{-2}\right) && \text{mit oben} \end{aligned}$$

$$t \quad = \quad \text{areasinh}\ (\frac{x-16}{25}) \quad = \quad \ln\left(\frac{x-16}{25} + \sqrt{(\frac{x-16}{25})^2 + 1}\right) \qquad \text{damit gilt:}$$

$$\begin{aligned} \int f(x) &= \tfrac{625}{4}\left(\frac{e^{2 \cdot \ln(\frac{x-16}{25} + \sqrt{(\frac{x-16}{25})^2+1})}}{2} + 2\ln(\tfrac{x-16}{25} + \sqrt{(\tfrac{x-16}{25})^2 + 1}) + \frac{e^{-2 \cdot \ln(\frac{x-16}{25} + \sqrt{(\frac{x-16}{25})^2+1})}}{-2}\right) \\ &= \tfrac{625}{4}\left(\frac{e^{\ln\left((\frac{x-16}{25} + \sqrt{(\frac{x-16}{25})^2+1})^2\right)}}{2} + 2\ln(\tfrac{x-16}{25} + \sqrt{(\tfrac{x-16}{25})^2 + 1}) + \frac{e^{\ln\left((\frac{x-16}{25} + \sqrt{(\frac{x-16}{25})^2+1})^{-2}\right)}}{-2}\right) \\ &= \tfrac{625}{8}\left((\tfrac{x-16}{25} + \sqrt{(\tfrac{x-16}{25})^2 + 1})^2 + 4\ln(\tfrac{x-16}{25} + \sqrt{(\tfrac{x-16}{25})^2 + 1}) - (\tfrac{x-16}{25} + \sqrt{(\tfrac{x-16}{25})^2 + 1})^{-2}\right) \end{aligned}$$

Anmerkung des Verfassers:
Wenn ich gewusst hätte, was da rauskommt, hätte ich die Aufgabe wohl lieber gelassen, aber jetzt ist sie schon fertig – viel Spaß beim weiter Vereinfachen und Fehlersuchen. Alle falschen Lösungen sind willkürliche Schätzungen. Es liegt kein spezieller Fehler zu Grunde.

Angebotene Lösungen:

- [ ] 1 $\operatorname{areasinh}\left(\frac{x-16}{25}\right) + \left(\frac{2\cdot(x^2-32x+881)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-32)}\right)$
- [ ] 2 $\left(\frac{2\cdot(x^2-32x+881)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-32)}\right)$
- [ ] 3 $\frac{\sqrt{(\frac{x-16}{25})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-16}{25}+\sqrt{(\frac{x-16}{25})^2+1})-(\frac{x-16}{25}+\sqrt{(\frac{x-16}{25})^2+1})^{-2}}{8}$
- [ ] 4 $\operatorname{areasinh}\left(\frac{x-16}{25}\right)$
- [ ] 5 $\arcsin\left(\frac{x^2-32x+881}{25}\right)$
- [ ] 6 $\frac{x^2}{2} - \frac{64}{3}x + 881$
- [x] 7 $\frac{625}{8}\left((\frac{x-16}{25} + \sqrt{(\frac{x-16}{25})^2+1})^2 + 4\ln(\frac{x-16}{25} + \sqrt{(\frac{x-16}{25})^2+1}) - (\frac{x-16}{25} + \sqrt{(\frac{x-16}{25})^2+1})^{-2}\right)$
- [ ] 8 $\arcsin\left(\sqrt{(\frac{x-16}{25})^2+1}\right)$
- [ ] 9 $\arcsin\left(\frac{x-16}{25}\right)$
- [ ] 10 $\frac{\ln(x^2-32x+881)}{25}$
- [ ] 11 $\operatorname{arcsinh}\left(\sqrt{(\frac{x-16}{25})^2+1}\right)$
- [ ] 12 $\ln(\frac{x^2-32x+881}{25})$

Fehlerinterpretation:

1	$\operatorname{areasinh}\left(\frac{x-16}{25}\right) + \left(\frac{2\cdot(x^2-32x+881)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-32)}\right)$	DF: 7
2	$\left(\frac{2\cdot(x^2-32x+881)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-32)}\right)$	DF: 3
3	$\frac{\sqrt{(\frac{x-16}{25})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-16}{25}+\sqrt{(\frac{x-16}{25})^2+1})-(\frac{x-16}{25}+\sqrt{(\frac{x-16}{25})^2+1})^{-2}}{8}$	DF: 6
4	$\operatorname{areasinh}\left(\frac{x-16}{25}\right)$	DF: 1
5	$\arcsin\left(\frac{x^2-32x+881}{25}\right)$	DF: 11
6	$\frac{x^2}{2} - \frac{64}{3}x + 881$	DF: 4
☒	$\frac{625}{8}\left((\frac{x-16}{25} + \sqrt{(\frac{x-16}{25})^2+1})^2 + 4\ln(\frac{x-16}{25} + \sqrt{(\frac{x-16}{25})^2+1}) - (\frac{x-16}{25} + \sqrt{(\frac{x-16}{25})^2+1})^{-2}\right)$	richtig
8	$\arcsin\left(\sqrt{(\frac{x-16}{25})^2+1}\right)$	DF: 8
9	$\arcsin\left(\frac{x-16}{25}\right)$	DF: 2
10	$\frac{\ln(x^2-32x+881)}{25}$	DF: 5
11	$\operatorname{arcsinh}\left(\sqrt{(\frac{x-16}{25})^2+1}\right)$	DF: 9
12	$\ln(\frac{x^2-32x+881}{25})$	DF: 10

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
Produktregel	Integralrechnung	Nummer: 81 0 2004120005	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.6: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = (4\,x-5)\cdot e^{6\,x+5}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 0,\ \ n = 1..4\ x_2 > x_1$.

Die Funktion lautet: $(4\,x-5)\cdot e^{6\,x+5}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 6 \quad x_4 = 5$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der Produktregel integriert werden:

$$\int u'\cdot v \quad = \quad u\cdot v - \int u\cdot v'.$$

Dabei ist u normalerweise die $e-$ Funktion und v das Polynom.
Die Faktoren werden unter anderem mit linearer Substitution integriert: $\int e^{ax+b} = \frac{e^{ax+b}}{a}$.

Rechnung:

Die Rollenverteilung ist:
$$\begin{array}{lllllll} u' & = & e^{6\,x+5} & \Rightarrow & u & = & \frac{e^{6\,x+5}}{6} \\ v & = & 4\,x-5 & \Rightarrow & v' & = & 4\ . \end{array}$$

Damit gilt
$$\begin{array}{llllllllllll} \int & (4\,x-5) & \cdot & e^{6\,x+5} & = & (4\,x-5) & \cdot & \frac{e^{6\,x+5}}{6} & - & \int\ 4 & \cdot & \frac{e^{6\,x+5}}{6} \\ \int & v & \cdot & u' & = & v & \cdot & u & - & \int\ v' & \cdot & u \\ & & & & = & \frac{4\cdot 6\,x-5\cdot 6}{6\cdot 6} & \cdot & e^{6\,x+5} & - & 4 & \cdot & \frac{e^{6\,x+5}}{6\cdot 6} \\ & & & & = & \frac{24\,x-34}{36} & \cdot & e^{6\,x+5} & & & & \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

☐ 1 $\frac{4\,x^2-5x}{72}\cdot e^{6\,x+6}$	☒ $\frac{24\,x-34}{36}\cdot e^{6\,x+5}$	☐ 3 $\frac{24\,x+34}{36}\cdot e^{6\,x+6}$	☐ 4 $(24\,x-9)\cdot e^{6\,x+5}$
☐ 5 $\frac{24\,x-34}{216}\cdot e^{7\,x+6}$	☐ 6 $\frac{4\,x^2-5x}{72}\cdot e^{7\,x+6}$	☐ 7 $(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x)\cdot e^{6\,x+5}$	☐ 8 $\frac{4\,x^2-5x}{72}\cdot e^{7\,x+5}$
☐ 9 $\frac{24\,x+34}{36}\cdot e^{6\,x+5}$	☐ 10 $(2x^2-5x)\cdot e^{3\,x^2+5x}$	☐ 11 $\frac{24\,x-34}{216}\cdot e^{6\,x+6}$	☐ 12 $\frac{24\,x-34}{216}\cdot e^{7\,x+5}$

Fehlerinterpretation:

☐ 1	$\frac{4\,x^2-5x}{72}\cdot e^{6\,x+6}$	DF: Falsch integriert
☒	$\frac{24\,x-34}{36}\cdot e^{6\,x+5}$	richtig
☐ 3	$\frac{24\,x+34}{36}\cdot e^{6\,x+6}$	DF: Falsch integriert
☐ 4	$(24\,x-9)\cdot e^{6\,x+5}$	DF: Abgeleitet
☐ 5	$\frac{24\,x-34}{216}\cdot e^{7\,x+6}$	DF: Falsch integriert
☐ 6	$\frac{4\,x^2-5x}{72}\cdot e^{7\,x+6}$	DF: Falsch integriert
☐ 7	$(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x)\cdot e^{6\,x+5}$	DF: Falsch integriert
☐ 8	$\frac{4\,x^2-5x}{72}\cdot e^{7\,x+5}$	DF: Falsch integriert
☐ 9	$\frac{24\,x+34}{36}\cdot e^{6\,x+5}$	DF: Falsch integriert
☐ 10	$(2x^2-5x)\cdot e^{3\,x^2+5x}$	DF: Falsch integriert
☐ 11	$\frac{24\,x-34}{216}\cdot e^{6\,x+6}$	DF: Falsch integriert
☐ 12	$\frac{24\,x-34}{216}\cdot e^{7\,x+5}$	DF: Falsch integriert

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu