Blatt Nr 12.05

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 12

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 17 0 2004120003	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.1: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : [0, \frac{\pi}{4}) \to \mathbb{R} \quad f(x) = 4 \cdot \frac{\sin(\tan(2\,x))}{\cos^2(2\,x)}$.

Parameter:

x_n = Faktoren der Funktion, $x_n > 0, \ \ n = 1..2$.

Die Funktion lautet: $x_1 \cdot \frac{\sin(\tan(x_2\,x))}{\cos^2(x_2\,x)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \qquad x_2 = 2$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der äußeren Substitution integriert werden:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx \quad = \quad \int f(g)\,dg$$

Beachten Sie dabei, dass gilt:

$$\begin{aligned}
(\tan(ax))' &= \left(\frac{\sin(ax)}{\cos(ax)}\right)' && \text{Definition des Tangens}\\
&= \frac{a\cos(ax)\cdot\cos(ax) - \sin(ax)\cdot(-a\sin(ax))}{\cos^2(ax)} && \text{Quotientenregel}\\
&= \frac{a(\cos^2(ax)+\sin^2(ax))}{\cos^2(ax)} && \text{zusammengefasst}\\
&= \frac{a}{\cos^2(ax)} && \cos^2 x + \sin^2 x = 1
\end{aligned}$$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int 4 \cdot \frac{\sin(\tan(2\,x))}{\cos^2(2\,x)}\,dx &= 4 \cdot \int \frac{\sin(g(x))}{\cos^2(2\,x)}\,dx && \text{mit } g(x) = \tan(2\,x)\\
&= \frac{4}{2} \cdot \int \sin(g(x)) \cdot \frac{2}{\cos^2(2\,x)}\,dx && \text{Erzeugung der inneren Ableitung}\\
&= 2 \cdot \int \sin(g(x)) \cdot g'(x)\,dx && \text{mit } g'(x) = \frac{2}{\cos^2(2\,x)}\\
&= 2 \cdot \int \sin(g(x))\,dg && \text{Substitutionsregel: } dx \cdot g'(x) = dg\\
&= 2 \cdot -\cos g && \text{integriert } (\textstyle\int \sin x = -\cos x)\\
&= -2 \cdot \cos(\tan(2\,x)) && \text{rücksubstituiert}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

[1] $8 \cdot \ln\lvert\cos(2\,x)\rvert$	[2] $8 \cdot \ln\lvert\sin(2\,x)\rvert$	[3] $-8 \cdot \cos(2\,x)$	[4] $8 \cdot \cos(2\,x)$
[5] $-2 \cdot \tan(2\,x)$	[6] $8 \cdot \sin(\tan(2\,x))$	[7] $-2 \cdot \sin(\tan(2\,x))$	[8] $8 \cdot \cos(\tan(2\,x))$
[9] $2 \cdot \ln\lvert\sin(2\,x)\rvert$	[☒] $-2 \cdot \cos(\tan(2\,x))$	[11] $-8 \cdot \cos(\tan(2\,x))$	[12] $-8 \cdot \sin(\tan(2\,x))$

Fehlerinterpretation:

☐ 1	$8 \cdot \ln\|\cos(2\,x)\|$	DF: Lösung geraten
☐ 2	$8 \cdot \ln\|\sin(2\,x)\|$	DF: Lösung geraten
☐ 3	$-8 \cdot \cos(2\,x)$	DF: Lösung geraten
☐ 4	$8 \cdot \cos(2\,x)$	DF: Lösung geraten
☐ 5	$-2 \cdot \tan(2\,x)$	DF: Lösung geraten
☐ 6	$8 \cdot \sin(\tan(2\,x))$	DF: Falsch integriert
☐ 7	$-2 \cdot \sin(\tan(2\,x))$	DF: Falsch integriert
☐ 8	$8 \cdot \cos(\tan(2\,x))$	DF: Mit innerer Ableitung multipliziert
☐ 9	$2 \cdot \ln\|\sin(2\,x)\|$	DF: Lösung geraten
☒	$-2 \cdot \cos(\tan(2\,x))$	richtig
☐ 11	$-8 \cdot \cos(\tan(2\,x))$	DF: Mit innerer Ableitung multipliziert
☐ 12	$-8 \cdot \sin(\tan(2\,x))$	DF: Falsch integriert

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 30 0 2004120001	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.2: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = 4 \cdot (4 \cdot x - 5)^3$

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 0, \;\; n = 1..4, \;\; x_3 > x_2$

Die Funktion lautet: $x_1 \cdot (x_2 \cdot x \; - \; x_3)^{x_4}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 3$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit linearer Substitution und der Potenzregel integriert werden:

$$\int x^n \, dx \;=\; \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{und} \qquad \int f(ax+b)\, dx \;=\; \frac{F(ax+b)}{a} \quad \text{wenn} \int f(x)\, dx = F(x)\ .$$

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll} \int 4 \cdot (4 \cdot x - 5)^3 dx & = & 4 \cdot \int (4 \cdot x - 5)^3 dx & \text{Linearität des Integrals} \\ & = & 4 \cdot \int (g(x))^3 dx & \text{mit } g(x) = 4 \cdot x - 5 \\ & = & 4 \cdot \int g^3 \frac{dg}{g'} & \text{lineare Substitution} \\ & = & 4 \cdot \frac{g^{3+1}}{3+1} \cdot \frac{1}{4} & \text{Potenzregel} \\ & = & \frac{4}{16} \cdot (4 \cdot x - 5)^4 & \text{Rücksubstitution} \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

☐ 1 $48 \cdot (4 \cdot x - 5)^2$	☐ 2 $\frac{4 \cdot (4 \cdot x)^4}{16} - 20x$	☐ 3 $\frac{1}{5} \cdot (4 \cdot x - 5)^4$	☐ 4 $3 \cdot (4 \cdot x - 5)^3$
☐ 5 $\frac{16}{5} \cdot (4 \cdot x - 5)^4$	☐ 6 $\frac{4 \cdot (4 \cdot x)^3}{3} - 4 \cdot 5^3 x$	☐ 7 $\frac{4 \cdot (4 \cdot x)^2}{8} - 4 \cdot 5^3 x$	☒ $\frac{1}{4} \cdot (4 \cdot x - 5)^4$
☐ 9 $\frac{4 \cdot (4 \cdot x)^4}{16} - 4 \cdot 5^3 x$	☐ 10 $4 \cdot (4 \cdot x - 5)^4$	☐ 11 $1 \cdot (4 \cdot x - 5)^3$	☐ 12 $\frac{4 \cdot (4 \cdot x)^4}{4} - 4 \cdot 5^3 x$

Fehlerinterpretation:

1	$48 \cdot (4 \cdot x - 5)^2$	DF: Abgeleitet
2	$\frac{4 \cdot (4 \cdot x)^4}{16} - 20x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
3	$\frac{1}{5} \cdot (4 \cdot x - 5)^4$	DF: Falsche innere Ableitung
4	$3 \cdot (4 \cdot x - 5)^3$	DF: Integration vergessen
5	$\frac{16}{5} \cdot (4 \cdot x - 5)^4$	DF: Falsche innere Ableitung
6	$\frac{4 \cdot (4 \cdot x)^3}{3} - 4 \cdot 5^3 x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
7	$\frac{4 \cdot (4 \cdot x)^2}{8} - 4 \cdot 5^3 x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
☒	$\frac{1}{4} \cdot (4 \cdot x - 5)^4$	richtig
9	$\frac{4 \cdot (4 \cdot x)^4}{16} - 4 \cdot 5^3 x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
10	$4 \cdot (4 \cdot x - 5)^4$	DF: Mit innerer Ableitung multipliziert
11	$1 \cdot (4 \cdot x - 5)^3$	DF: Integration vergessen
12	$\frac{4 \cdot (4 \cdot x)^4}{4} - 4 \cdot 5^3 x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 36 0 2004120002	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.3: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = 5 \cdot \sin(5\,x) \cdot e^{9 \cdot \cos(5\,x)}$

Parameter:

x_n = Faktoren der Funktion, $x_n > 0, \;\; n = 1..3$.

Die Funktion lautet: $x_1 \cdot \sin(x_2\,x) \cdot e^{x_3 \cdot \cos(x_2\,x)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \qquad x_2 = 5 \qquad x_3 = 9$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der äußeren Substitution integriert werden:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\;dx \quad = \quad \int f(g)\;dg$$

Beachten Sie dabei, dass $(\cos(ax))' = -a\sin(ax)$ ist.

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int 5 \cdot \sin(5\,x) \cdot e^{9 \cdot \cos(5\,x)}\;dx &= 5 \cdot \int \sin(5\,x) \cdot e^{9 \cdot \cos(5\,x)}\;dx && \text{Linearität des Integrals} \\
&= 5 \cdot \int \sin(5\,x) \cdot e^{g(x)}\;dx && \text{mit } g(x) = 9 \cdot \cos(5\,x) \\
&= -5 \cdot \int \tfrac{-9 \cdot 5 \cdot \sin(5\,x)}{9 \cdot 5} \cdot e^{g(x)}\;dx && \text{Erzeugung der inneren Ableitung} \\
&= -5 \cdot \int \tfrac{g'(x)}{45} \cdot e^{g(x)}\;dx && g'(x) = -9 \cdot 5 \cdot \sin(5\,x) \\
&= -\tfrac{5}{45} \cdot \int e^g\;dg && \text{Substitutionsregel: } dx \cdot g'(x) = \;dg \\
&= -\tfrac{1}{9} \cdot e^g && \text{integriert } (\textstyle\int e^x = e^x) \\
&= -\tfrac{1}{9} \cdot e^{9 \cdot \cos(5\,x)} && \text{rücksubstituiert}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $1 \cdot \sin(5\,x) \cdot e^{9 \cdot \cos(5\,x)}$	2 $-1 \cdot \cos(5\,x) \cdot e^{9x}$	3 $-9 \cdot \cos(5\,x) \cdot e^{x}$	4 $\frac{1}{9} \cdot e^{9 \cdot \cos(5\,x)}$
5 $\frac{25}{9} \cdot e^{9 \cdot \cos(5\,x)}$	☒ $-\frac{1}{9} \cdot e^{9 \cdot \cos(5\,x)}$	7 $9 \cdot e^{9 \cdot \cos(5\,x)}$	8 $1 \cdot \cos(5\,x) \cdot e^{9x}$
9 $-1 \cdot \sin(5\,x) \cdot e^{9 \cdot \cos(5\,x)}$	10 $9 \cdot e^{5\,x} \cdot \cos x$	11 $-\frac{25}{9} \cdot e^{9 \cdot \cos(5\,x)}$	12 $9 \cdot \cos(5\,x) \cdot e^{x}$

Fehlerinterpretation:

$\boxed{1}$	$1 \cdot \sin(5\,x) \cdot e^{9 \cdot \cos(5\,x)}$	DF: Lösung geraten
$\boxed{2}$	$-1 \cdot \cos(5\,x) \cdot e^{9x}$	DF: Lösung geraten
$\boxed{3}$	$-9 \cdot \cos(5\,x) \cdot e^{x}$	DF: Lösung geraten
$\boxed{4}$	$\frac{1}{9} \cdot e^{9 \cdot \cos(5\,x)}$	RF: falsches Vorzeichen
$\boxed{5}$	$\frac{25}{9} \cdot e^{9 \cdot \cos(5\,x)}$	DF: Falsch substituiert
$\boxtimes$	$-\frac{1}{9} \cdot e^{9 \cdot \cos(5\,x)}$	richtig
$\boxed{7}$	$9 \cdot e^{9 \cdot \cos(5\,x)}$	DF: Falsch substituiert
$\boxed{8}$	$1 \cdot \cos(5\,x) \cdot e^{9x}$	DF: Lösung geraten
$\boxed{9}$	$-1 \cdot \sin(5\,x) \cdot e^{9 \cdot \cos(5\,x)}$	DF: Lösung geraten
$\boxed{10}$	$9 \cdot e^{5\,x} \cdot \cos x$	DF: Lösung geraten
$\boxed{11}$	$-\frac{25}{9} \cdot e^{9 \cdot \cos(5\,x)}$	DF: Falsch substituiert
$\boxed{12}$	$9 \cdot \cos(5\,x) \cdot e^{x}$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
Produktregel	Integralrechnung	Nummer: 56 0 2004120005	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.4: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = (7\,x - 10) \cdot e^{7\,x+3}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 0, \;\; n = 1..4 \; x_2 > x_1$.

Die Funktion lautet: $(7\,x - 10) \cdot e^{7\,x+3}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7 \quad x_2 = 10 \quad x_3 = 7 \quad x_4 = 3$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der Produktregel integriert werden:

$$\int u' \cdot v \quad = \quad u \cdot v - \int u \cdot v'.$$

Dabei ist u normalerweise die $e-$ Funktion und v das Polynom.
Die Faktoren werden unter anderem mit linearer Substitution integriert: $\int e^{ax+b} = \frac{e^{ax+b}}{a}$.

Rechnung:

Die Rollenverteilung ist:
$$\begin{array}{lcl} u' &=& e^{7\,x+3} \quad \Rightarrow \quad u \;=\; \frac{e^{7\,x+3}}{7} \\ v &=& 7\,x - 10 \quad \Rightarrow \quad v' \;=\; 7 \;. \end{array}$$

Damit gilt

$$\begin{array}{lllllllll} \int & (7\,x-10) & \cdot & e^{7\,x+3} & = & (7\,x-10) & \cdot & \frac{e^{7\,x+3}}{7} & - \int 7 \cdot \frac{e^{7\,x+3}}{7} \\ \int & v & \cdot & u' & = & v & \cdot & u & - \int v' \cdot u \\ & & & & = & \frac{7 \cdot 7\,x - 10 \cdot 7}{7 \cdot 7} & \cdot & e^{7\,x+3} & - \quad 7 \cdot \frac{e^{7\,x+3}}{7 \cdot 7} \\ & & & & = & \frac{49\,x-77}{49} & \cdot & e^{7\,x+3} & \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

$\boxed{1}$ $(49\,x - 17) \cdot e^{7\,x+3}$	$\boxed{2}$ $(\frac{7}{2}x^2 - 10x) \cdot e^{\frac{7}{2}\,x^2+3x}$	$\boxed{3}$ $\frac{7\,x^2-10x}{56} \cdot e^{8\,x+3}$	$\boxtimes$ $\frac{49\,x-77}{49} \cdot e^{7\,x+3}$
$\boxed{5}$ $\frac{49\,x+77}{49} \cdot e^{7\,x+3}$	$\boxed{6}$ $\frac{49\,x-77}{196} \cdot e^{8\,x+3}$	$\boxed{7}$ $(\frac{1}{2}x^2 - \frac{10}{7}x) \cdot e^{7\,x+3}$	$\boxed{8}$ $\frac{49\,x-77}{196} \cdot e^{8\,x+4}$
$\boxed{9}$ $\frac{49\,x-77}{196} \cdot e^{7\,x+4}$	$\boxed{10}$ $\frac{49\,x+77}{49} \cdot e^{7\,x+4}$	$\boxed{11}$ $\frac{7\,x^2-10x}{56} \cdot e^{7\,x+4}$	$\boxed{12}$ $\frac{7\,x^2-10x}{56} \cdot e^{8\,x+4}$

Fehlerinterpretation:

$\square$ 1	$(49\,x-17)\cdot e^{7\,x+3}$	DF: Abgeleitet
$\square$ 2	$(\frac{7}{2}x^2-10x)\cdot e^{\frac{7}{2}\,x^2+3x}$	DF: Falsch integriert
$\square$ 3	$\frac{7\,x^2-10x}{56}\cdot e^{8\,x+3}$	DF: Falsch integriert
$\boxtimes$	$\frac{49\,x-77}{49}\cdot e^{7\,x+3}$	richtig
$\square$ 5	$\frac{49\,x+77}{49}\cdot e^{7\,x+3}$	DF: Falsch integriert
$\square$ 6	$\frac{49\,x-77}{196}\cdot e^{8\,x+3}$	DF: Falsch integriert
$\square$ 7	$(\frac{1}{2}x^2-\frac{10}{7}x)\cdot e^{7\,x+3}$	DF: Falsch integriert
$\square$ 8	$\frac{49\,x-77}{196}\cdot e^{8\,x+4}$	DF: Falsch integriert
$\square$ 9	$\frac{49\,x-77}{196}\cdot e^{7\,x+4}$	DF: Falsch integriert
$\square$ 10	$\frac{49\,x+77}{49}\cdot e^{7\,x+4}$	DF: Falsch integriert
$\square$ 11	$\frac{7\,x^2-10x}{56}\cdot e^{7\,x+4}$	DF: Falsch integriert
$\square$ 12	$\frac{7\,x^2-10x}{56}\cdot e^{8\,x+4}$	DF: Falsch integriert

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
Produktregel	Integralrechnung	Nummer: 65 0 2004120004	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.5: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f:[0,\frac{1}{6}]\to\mathbb{R}\quad f(x)=\sqrt{9-324\cdot x^2}$.

Parameter:

x_n = geloste Zahlen, $x_n>0,\ \ n=1..2.$ $x_3:=x_1^2$, $x_4:=x_3\cdot x_2^2$

Die Funktion lautet: $\sqrt{x_3\,-\,x_4\cdot x^2}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=3\qquad x_2=6\qquad x_3=9\qquad x_4=324.$

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der inneren Substitution integriert werden:

$$\int f(g)\;dg\quad=\quad\int f(g(x))\cdot g'(x)\;dx$$

Dabei soll die Wurzel durch die Gleichung $(*)$ $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ verschwinden.

Das in der Rechnung entstehende $\int\sin^2 x$ berechnen wir wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}\int & \sin x & \cdot & \sin x & = & -\cos x & \cdot & \sin x & - & \int & -\cos x & \cdot & \cos x\\ \int & u' & \cdot & v & = & u & \cdot & v & - & \int & u & \cdot & v'\ .\end{array}\ .$$

Dies ist aber nur scheinbar 'im Kreis' gerechnet:

$$\begin{array}{rcll}\int\sin^2 x & = & -\cos x\cdot\sin x+\int\cos^2 x & \text{siehe oben}\\ & = & -\cos x\cdot\sin x+\int(1-\sin^2 x) & \text{mit Formel }(*)\\ & = & -\cos x\cdot\sin x+x-\int\sin^2 x & \text{Linearität des Integrals}\end{array}$$

Addition von $\int\sin^2 x$ ergibt:

$$2\cdot\int\sin^2 x=x-\cos x\cdot\sin x\quad\Rightarrow\quad\int\sin^2 x=\frac{x-\cos x\cdot\sin x}{2}.$$

In der Rechnung entsteht weiterhin ein Ausdruck der Form $\sin(\arccos x)$. Diesen Ausdruck berechnen wir wie folgt: Sei $y=\arccos x$, dann gilt:

$$\begin{array}{rll}\sin y & =(\pm)\sqrt{1-\cos^2 y} & \text{nach Formel }(*)\\ & =\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} & y=\arccos x\\ & =\sqrt{1-x^2} & \cos(\arccos x)=x\quad.\end{array}$$

Damit ist $\sin(\arccos x)=(\pm)\sqrt{1-x^2}$.

Rechnung:

Zuerst klammern wir 9 aus: $\sqrt{9 - 324 \cdot x^2} = \sqrt{9 \cdot (1 - 36 \cdot x^2)} = 3 \cdot \sqrt{1 - 36 \cdot x^2}$.
Jetzt substituieren wir $x(t) := \frac{\cos t}{6}$, t kann im Bereich von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ gewählt werden.

$$
\begin{array}{rcll}
\int 3 \cdot \sqrt{1 - 36 \cdot x^2}\, dx & = & \int 3 \cdot \sqrt{1 - 36 \cdot (\frac{\cos t}{6})^2}\, dx & \text{Substitution} \\
& = & 3 \cdot \int \sqrt{1 - \cos^2 t} \quad \cdot x' \cdot dt & \text{mit } dx \;=\; x' \cdot dt \\
& = & 3 \cdot \int \sqrt{\sin^2 t} \quad \cdot \frac{-\sin t}{6} \cdot dt & x' \;=\; \frac{-\sin t}{6} \\
& = & 3 \cdot \int |\sin t| \cdot \frac{-\sin t}{6} \cdot dt & \\
& = & \frac{3}{6} \cdot \int \sin^2 t \cdot dt & \text{t} \in [0, \frac{\pi}{2}] \\
& = & -\frac{1}{2} \cdot \frac{t - \cos t \cdot \sin t}{2} & \text{siehe oben} \\
& = & -\frac{1}{4} \cdot (\arccos\,(6\,x) - \cos\arccos\,(6\,x) \cdot \sin\arccos\,(6\,x)) & t = \arccos\,(6\,x) \\
& = & -\frac{1}{4} \cdot (\arccos\,(6\,x) - 6\,x \cdot \sqrt{1 - (6\,x)^2}) & \sin(\arccos\,(6\,x)) = \sqrt{1 - (6\,x)^2}
\end{array}
$$

Angebotene Lösungen:

1	$3x + 9 \cdot x^2$	2	$1 \cdot (x \cdot \sqrt{1 - (6\,x)^2} - 6\ \text{areaccosh}\ x)$
3	$\frac{9}{4} \cdot \frac{(1+36 \cdot x^2)^{3/2}}{x}$	4	$\frac{1}{2} \cdot (x \cdot \sqrt{1 - 6^2\,x^2} - 6 \arccos\, x)$
5	$\frac{1}{2} \cdot (\ \text{areaccosh}\ (6\,x)\ )$	6	$\frac{1}{4} \cdot (6\,x \cdot \sqrt{1 - (6\,x)^2} -\ \text{areaccosh}\ (6\,x))$
☒	$\frac{1}{4} \cdot (6\,x \cdot \sqrt{1 - (6\,x)^2} - \arccos\,(6\,x))$	8	$\frac{6 \cdot (1 - 36 \cdot x^2)^{3/2}}{6x}$
9	$\frac{1}{2} \cdot (\arccos\,(6\,x))$	10	$\frac{6 \cdot (1^{3/2} - 36 \cdot x^3)}{6x}$
11	$9 \cdot \frac{x}{\sqrt{1 - (6\,x)^2}}$	12	162

Fehlerinterpretation:

1	$3x + 9 \cdot x^2$	DF: Wurzelrechnung falsch	
2	$1 \cdot (x \cdot \sqrt{1 - (6\,x)^2} - 6\ \text{areaccosh}\ x)$	DF: Falsche Substitution	
3	$\frac{9}{4} \cdot \frac{(1+36 \cdot x^2)^{3/2}}{x}$	DF: Falsche Substitution	
4	$\frac{1}{2} \cdot (x \cdot \sqrt{1 - 6^2\,x^2} - 6 \arccos\, x)$	RF: Viele falsche Faktoren	
5	$\frac{1}{2} \cdot (\ \text{areaccosh}\ (6\,x)\ )$	DF: Antwort geraten	
6	$\frac{1}{4} \cdot (6\,x \cdot \sqrt{1 - (6\,x)^2} -\ \text{areaccosh}\ (6\,x))$	DF: Falsche Substitution	
☒	$\frac{1}{4} \cdot (6\,x \cdot \sqrt{1 - (6\,x)^2} - \arccos\,(6\,x))$	richtig	
8	$\frac{6 \cdot (1 - 36 \cdot x^2)^{3/2}}{6x}$	DF: Falsche Substitution	
9	$\frac{1}{2} \cdot (\arccos\,(6\,x))$	DF: Antwort geraten	
10	$\frac{6 \cdot (1^{3/2} - 36 \cdot x^3)}{6x}$	DF: Falsche Substitution	
11	$9 \cdot \frac{x}{\sqrt{1 - (6\,x)^2}}$	DF: Funktion abgeleitet	
12	162	GL:	geratene Lösung

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
innere	Integralrechnung	Nummer: 74 0 2004120006	Kl: 14G
Grad: 80 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.6: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 18x + 162}$.

Parameter:

$x_n > 0$, x_n Quadratzahlen $\quad n = 1..2$.

Die Funktion lautet: $\sqrt{x^2 - \{2 \cdot x_1\}\,x + \{x_1^2\ +\ x_2^2\}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 9 \qquad x_2 = 9$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der inneren Substitution integriert werden:

$$\int f(g)\ dg \quad = \quad \int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx$$

Dazu muss der Term unter der Wurzel zunächst quadratisch ergänzt werden.
Die Wurzel soll durch die Gleichung $(*)$ $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ verschwinden.
$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Das in der Rechnung entstehende $\int \cosh^2 u$ berechnen wir wie folgt:

$$\begin{array}{rcll} \int \cosh^2 u\ du & = & \frac{1}{4} \int e^{2u} + 2 + e^{-2u}\ du & \text{nach Definition des Kosinushyperbolikus} \\ & = & \frac{1}{4}(\frac{e^{2u}}{2} + 2u + \frac{e^{-2u}}{-2}) & \text{integriert mit äußerer Substitution} \end{array}$$

Desweiteren wird eine Formel für die Umkehrfunktion des Sinushyperbolikus = areasinh y benötigt:

$$\begin{array}{rcll} \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y & \Leftrightarrow & e^x - 2y - e^{-x} = 0 & \text{Multiplikation mit 2} \\ & \Leftrightarrow & e^{2x} - 2y \cdot e^x - 1 = 0 & \text{Multiplikation mit } e^x \\ & \Leftrightarrow & u^2 - 2y \cdot u - 1 = 0 & \text{Substitution } e^x = u \\ & \Leftrightarrow & u_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} & \text{Mitternachtsformel} \\ & \Leftrightarrow & x_{1,2} = \ln(y \pm \sqrt{y^2 + 1}) & \text{Rücksubstitution} \\ & \Leftrightarrow & x_{1,2} = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) & \text{Der ln ist nur für positive Argumente definiert} \end{array}$$

Rechnung:

$$\sqrt{x^2 - 18x + 162} \quad = \quad \sqrt{(x-9)^2 - 81 + 162} \quad = \quad \sqrt{(x-9)^2 + 81} \quad = \quad 9 \cdot \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}$$

Nach dieser quadratischen Ergänzung kann man die innere Substitution mit Sinushyperbolikus erkennen:
$\frac{x-9}{9} := \sinh t$:

$$\begin{array}{rcll} \int \sqrt{x^2 - 18x + 162}\ \ dx & = & \int 9 \cdot \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}\ \ dx & \text{siehe oben} \\ & = & 9 \cdot \int \sqrt{(\sinh t)^2 + 1}\ \ dx & \frac{x-9}{9} := \sinh t \\ & = & 9 \cdot \int \sqrt{(\cosh t)^2}\ \ x' \cdot dt & (*) \text{ und innere Substitution} \\ & = & 9 \cdot \int |\cosh t| \ \ \cdot 9 \cosh t \cdot dt & x' = (9 \sinh t + 9)' = 9 \cosh t \\ & = & 81 \cdot \int \cosh^2 t \cdot dt & \cosh t > 0 \\ & = & \frac{81}{4}\left(\frac{e^{2t}}{2} + 2t + \frac{e^{-2t}}{-2}\right) & \text{mit oben} \end{array}$$

$$t \quad = \quad \text{areasinh}\ (\frac{x-9}{9}) \quad = \quad \ln\left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{(\frac{x-9}{9})^2 + 1}\right) \qquad \text{damit gilt:}$$

$$\begin{array}{rcl} \int f(x) & = & \frac{81}{4}\left(\frac{e^{2 \cdot \ln(\frac{x-9}{9} + \sqrt{(\frac{x-9}{9})^2 + 1})}}{2} + 2\ln(\frac{x-9}{9} + \sqrt{(\frac{x-9}{9})^2 + 1}) + \frac{e^{-2 \cdot \ln(\frac{x-9}{9} + \sqrt{(\frac{x-9}{9})^2 + 1})}}{-2}\right) \\ & = & \frac{81}{4}\left(\frac{e^{\ln\left((\frac{x-9}{9} + \sqrt{(\frac{x-9}{9})^2 + 1})^2\right)}}{2} + 2\ln(\frac{x-9}{9} + \sqrt{(\frac{x-9}{9})^2 + 1}) + \frac{e^{\ln\left((\frac{x-9}{9} + \sqrt{(\frac{x-9}{9})^2 + 1})^{-2}\right)}}{-2}\right) \\ & = & \frac{81}{8}\left((\frac{x-9}{9} + \sqrt{(\frac{x-9}{9})^2 + 1})^2 + 4\ln(\frac{x-9}{9} + \sqrt{(\frac{x-9}{9})^2 + 1}) - (\frac{x-9}{9} + \sqrt{(\frac{x-9}{9})^2 + 1})^{-2}\right) \end{array}$$

Anmerkung des Verfassers:
Wenn ich gewusst hätte, was da rauskommt, hätte ich die Aufgabe wohl lieber gelassen, aber jetzt ist sie schon fertig – viel Spaß beim weiter Vereinfachen und Fehlersuchen. Alle falschen Lösungen sind willkürliche Schätzungen. Es liegt kein spezieller Fehler zu Grunde.

Angebotene Lösungen:

☐ 1 areasinh $(\frac{x-9}{9})$
☐ 2 $\ln(\frac{x^2-18x+162}{9})$
☐ 3 arcsinh $(\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})$
☐ 4 $(\frac{2\cdot(x^2-18x+162)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-18)})$
☐ 5 arcsin $(\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})$
☐ 6 $\frac{\ln(x^2-18x+162)}{9}$
☐ 7 arcsin $(\frac{x-9}{9})$
☐ 8 $\frac{\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-9}{9}+\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})-(\frac{x-9}{9}+\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})^{-2}}{8}$
☐ 9 areasinh $(\frac{x-9}{9})$ + $(\frac{2\cdot(x^2-18x+162)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-18)})$
☐ 10 $\frac{x^2}{2}-12x+162$
☐ 11 arcsin $(\frac{x^2-18x+162}{9})$
☒ $\frac{81}{8}\left((\frac{x-9}{9}+\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-9}{9}+\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})-(\frac{x-9}{9}+\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})^{-2}\right)$

Fehlerinterpretation:

☐ 1 areasinh $(\frac{x-9}{9})$	DF: 1
☐ 2 $\ln(\frac{x^2-18x+162}{9})$	DF: 10
☐ 3 arcsinh $(\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})$	DF: 9
☐ 4 $(\frac{2\cdot(x^2-18x+162)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-18)})$	DF: 3
☐ 5 arcsin $(\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})$	DF: 8
☐ 6 $\frac{\ln(x^2-18x+162)}{9}$	DF: 5
☐ 7 arcsin $(\frac{x-9}{9})$	DF: 2
☐ 8 $\frac{\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-9}{9}+\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})-(\frac{x-9}{9}+\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})^{-2}}{8}$	DF: 6
☐ 9 areasinh $(\frac{x-9}{9})$ + $(\frac{2\cdot(x^2-18x+162)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-18)})$	DF: 7
☐ 10 $\frac{x^2}{2}-12x+162$	DF: 4
☐ 11 arcsin $(\frac{x^2-18x+162}{9})$	DF: 11
☒ $\frac{81}{8}\left((\frac{x-9}{9}+\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-9}{9}+\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})-(\frac{x-9}{9}+\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})^{-2}\right)$	richtig

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu