

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 12

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
Produktregel	Integralrechnung	Nummer: 7 0 2004120004	Kl: 14G
Grad: 20	Zeit: 30	Quelle: keine	W

Aufgabe 12.1.1: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = \sqrt{9 - 36 \cdot x^2}$.

Parameter:

$x_n =$ geloste Zahlen, $x_n > 0$, $n = 1..2$. $x_3 := x_1^2$, $x_4 := x_3 \cdot x_2^2$

Die Funktion lautet: $\sqrt{x_3 - x_4 \cdot x^2}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3$ $x_2 = 2$ $x_3 = 9$ $x_4 = 36$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der inneren Substitution integriert werden:

$$\int f(g) dg = \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

Dabei soll die Wurzel durch die Gleichung (*) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ verschwinden.

Das in der Rechnung entstehende $\int \sin^2 x$ berechnen wir wie folgt:

$$\int \frac{\sin x}{u'} \cdot \frac{\sin x}{v} = -\cos x \cdot \frac{\sin x}{v} - \int \frac{-\cos x}{u} \cdot \frac{\cos x}{v'} \cdot \frac{1}{v}$$

Dies ist aber nur scheinbar 'im Kreis' gerechnet:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x &= -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x && \text{siehe oben} \\ &= -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x) && \text{mit Formel (*)} \\ &= -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x && \text{Linearität des Integrals} \end{aligned}$$

Addition von $\int \sin^2 x$ ergibt:

$$2 \cdot \int \sin^2 x = x - \cos x \cdot \sin x \Rightarrow \int \sin^2 x = \frac{x - \cos x \cdot \sin x}{2}$$

In der Rechnung entsteht weiterhin ein Ausdruck der Form $\sin(\arccos x)$. Diesen Ausdruck berechnen wir wie folgt: Sei $y = \arccos x$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \sin y &= (\pm) \sqrt{1 - \cos^2 y} && \text{nach Formel (*)} \\ &= \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} && y = \arccos x \\ &= \sqrt{1 - x^2} && \cos(\arccos x) = x \end{aligned}$$

Damit ist $\sin(\arccos x) = (\pm) \sqrt{1 - x^2}$.

Rechnung:

Zuerst klammern wir 9 aus: $\sqrt{9 - 36 \cdot x^2} = \sqrt{9 \cdot (1 - 4 \cdot x^2)} = 3 \cdot \sqrt{1 - 4 \cdot x^2}$.

Jetzt substituieren wir $x(t) := \frac{\cos t}{2}$, t kann im Bereich von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ gewählt werden.

$$\begin{aligned}
 \int 3 \cdot \sqrt{1-4 \cdot x^2} dx &= \int 3 \cdot \sqrt{1-4 \cdot \left(\frac{\cos t}{2}\right)^2} dx && \text{Substitution} \\
 &= 3 \cdot \int \sqrt{1-\cos^2 t} \cdot x' \cdot dt && \text{mit } dx = x' \cdot dt \\
 &= 3 \cdot \int \sqrt{\sin^2 t} \cdot \frac{-\sin t}{2} \cdot dt && x' = \frac{-\sin t}{2} \\
 &= 3 \cdot \int |\sin t| \cdot \frac{-\sin t}{2} \cdot dt \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \int \sin^2 t \cdot dt && t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\
 &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{t - \cos t \sin t}{2} && \text{siehe oben} \\
 &= -\frac{3}{4} \cdot (\arccos(2x) - \cos \arccos(2x) \cdot \sin \arccos(2x)) && t = \arccos(2x) \\
 &= -\frac{3}{4} \cdot (\arccos(2x) - 2x \cdot \sqrt{1-(2x)^2}) && \sin(\arccos(2x)) = \sqrt{1-(2x)^2}
 \end{aligned}$$

Angebote Lösung:

- | | | | |
|-----------------------------|---|---------------------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> 1 | $3x + 3 \cdot x^2$ | <input type="checkbox"/> 2 | $\frac{3}{2} \cdot (x \cdot \sqrt{1-2^2 x^2} - 2 \arccos x)$ |
| <input type="checkbox"/> 3 | $\frac{3}{4} \cdot (2x \cdot \sqrt{1-(2x)^2} - \operatorname{areaccosh}(2x))$ | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | $\frac{3}{4} \cdot (2x \cdot \sqrt{1-(2x)^2} - \arccos(2x))$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\frac{6 \cdot (1^{3/2} - 4 \cdot x^3)}{6x}$ | <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{6 \cdot (1-4 \cdot x^2)^{3/2}}{6x}$ |
| <input type="checkbox"/> 7 | $\frac{3}{2} \cdot (\arccos(2x))$ | <input type="checkbox"/> 8 | $\frac{9}{4} \cdot \frac{(1+4 \cdot x^2)^{3/2}}{x}$ |
| <input type="checkbox"/> 9 | $3 \cdot (x \cdot \sqrt{1-(2x)^2} - 2 \operatorname{areaccosh} x)$ | <input type="checkbox"/> 10 | $3 \cdot \frac{x}{\sqrt{1-(2x)^2}}$ |
| <input type="checkbox"/> 11 | $\frac{3}{2} \cdot (\operatorname{areaccosh}(2x))$ | <input type="checkbox"/> 12 | 162 |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|---------------------------------------|---|--|
| <input type="checkbox"/> 1 | $3x + 3 \cdot x^2$ | DF: Wurzelrechnung falsch |
| <input type="checkbox"/> 2 | $\frac{3}{2} \cdot (x \cdot \sqrt{1-2^2 x^2} - 2 \arccos x)$ | RF: Viele falsche Faktoren |
| <input type="checkbox"/> 3 | $\frac{3}{4} \cdot (2x \cdot \sqrt{1-(2x)^2} - \operatorname{areaccosh}(2x))$ | DF: Falsche Substitution |
| <input checked="" type="checkbox"/> 4 | $\frac{3}{4} \cdot (2x \cdot \sqrt{1-(2x)^2} - \arccos(2x))$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\frac{6 \cdot (1^{3/2} - 4 \cdot x^3)}{6x}$ | DF: Falsche Substitution |
| <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{6 \cdot (1-4 \cdot x^2)^{3/2}}{6x}$ | DF: Falsche Substitution |
| <input type="checkbox"/> 7 | $\frac{3}{2} \cdot (\arccos(2x))$ | DF: Antwort geraten |
| <input type="checkbox"/> 8 | $\frac{9}{4} \cdot \frac{(1+4 \cdot x^2)^{3/2}}{x}$ | DF: Falsche Substitution |
| <input type="checkbox"/> 9 | $3 \cdot (x \cdot \sqrt{1-(2x)^2} - 2 \operatorname{areaccosh} x)$ | DF: Falsche Substitution |
| <input type="checkbox"/> 10 | $3 \cdot \frac{x}{\sqrt{1-(2x)^2}}$ | DF: Funktion abgeleitet |
| <input type="checkbox"/> 11 | $\frac{3}{2} \cdot (\operatorname{areaccosh}(2x))$ | DF: Antwort geraten |
| <input type="checkbox"/> 12 | 162 | GL: geratene Lösung |

MV 04 Blatt 12 Kapitel 8.4 Substitution
keine Integralrechnung Nummer: 17 0 2004120002 Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 12.1.2: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = 2 \cdot \sin(4x) \cdot e^{11 \cdot \cos(4x)}$

Parameter:

$x_n =$ Faktoren der Funktion, $x_n > 0, \quad n = 1..3.$

Die Funktion lautet: $x_1 \cdot \sin(x_2 x) \cdot e^{x_3 \cdot \cos(x_2 x)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 11.$

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der äußeren Substitution integriert werden:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(g) dg$$

Beachten Sie dabei, dass $(\cos(ax))' = -a \sin(ax)$ ist.

Rechnung:

$$\begin{aligned} \int 2 \cdot \sin(4x) \cdot e^{11 \cdot \cos(4x)} dx &= 2 \cdot \int \sin(4x) \cdot e^{11 \cdot \cos(4x)} dx && \text{Linearität des Integrals} \\ &= 2 \cdot \int \sin(4x) \cdot e^{g(x)} dx && \text{mit } g(x) = 11 \cdot \cos(4x) \\ &= -2 \cdot \int \frac{-11 \cdot 4 \cdot \sin(4x)}{11 \cdot 4} \cdot e^{g(x)} dx && \text{Erzeugung der inneren Ableitung} \\ &= -2 \cdot \int \frac{g'(x)}{44} \cdot e^{g(x)} dx && g'(x) = -11 \cdot 4 \cdot \sin(4x) \\ &= -\frac{2}{44} \cdot \int e^g dg && \text{Substitutionsregel: } dx \cdot g'(x) = dg \\ &= -\frac{1}{22} \cdot e^g && \text{integriert } (\int e^x = e^x) \\ &= -\frac{1}{22} \cdot e^{11 \cdot \cos(4x)} && \text{rücksubstituiert} \end{aligned}$$

Angebote Lösung:

<input type="checkbox"/> 1	$\frac{1}{2} \cdot \sin(4x) \cdot e^{11 \cdot \cos(4x)}$	<input type="checkbox"/> 2	$-\frac{11}{2} \cdot \cos(4x) \cdot e^x$	<input type="checkbox"/> 3	$\frac{8}{11} \cdot e^{11 \cdot \cos(4x)}$	<input type="checkbox"/> 4	$\frac{11}{2} \cdot e^{4x} \cdot \cos x$
<input type="checkbox"/> 5	$\frac{1}{22} \cdot e^{11 \cdot \cos(4x)}$	<input type="checkbox"/> 6	$-\frac{11}{2} \cdot e^{4x} \cdot \cos x$	<input type="checkbox"/> 7	$-\frac{1}{2} \cdot \sin(4x) \cdot e^{11 \cdot \cos(4x)}$	<input type="checkbox"/> 8	$-\frac{8}{11} \cdot e^{11 \cdot \cos(4x)}$
<input type="checkbox"/> 9	$\frac{11}{2} \cdot e^{11 \cdot \cos(4x)}$	<input type="checkbox"/> 10	$-\frac{1}{2} \cdot \cos(4x) \cdot e^{11x}$	<input checked="" type="checkbox"/> X	$-\frac{1}{22} \cdot e^{11 \cdot \cos(4x)}$	<input type="checkbox"/> 12	$\frac{1}{2} \cdot \cos(4x) \cdot e^{11x}$

Fehlerinterpretation:

<input type="checkbox"/> 1	$\frac{1}{2} \cdot \sin(4x) \cdot e^{11 \cdot \cos(4x)}$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 2	$-\frac{11}{2} \cdot \cos(4x) \cdot e^x$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 3	$\frac{8}{11} \cdot e^{11 \cdot \cos(4x)}$	DF: Falsch substituiert
<input type="checkbox"/> 4	$\frac{11}{2} \cdot e^{4x} \cdot \cos x$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 5	$\frac{1}{22} \cdot e^{11 \cdot \cos(4x)}$	RF: falsches Vorzeichen
<input type="checkbox"/> 6	$-\frac{11}{2} \cdot e^{4x} \cdot \cos x$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 7	$-\frac{1}{2} \cdot \sin(4x) \cdot e^{11 \cdot \cos(4x)}$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 8	$-\frac{8}{11} \cdot e^{11 \cdot \cos(4x)}$	DF: Falsch substituiert
<input type="checkbox"/> 9	$\frac{11}{2} \cdot e^{11 \cdot \cos(4x)}$	DF: Falsch substituiert
<input type="checkbox"/> 10	$-\frac{1}{2} \cdot \cos(4x) \cdot e^{11x}$	DF: Lösung geraten
<input checked="" type="checkbox"/> X	$-\frac{1}{22} \cdot e^{11 \cdot \cos(4x)}$	richtig
<input type="checkbox"/> 12	$\frac{1}{2} \cdot \cos(4x) \cdot e^{11x}$	DF: Lösung geraten

MV 04 Blatt 12 Kapitel 8.4 Substitution
 innere Integralrechnung Nummer: 50 0 2004120006 Kl: 14G
 Grad: 80 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 12.1.3: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x^2 - 18x + 162}$.

Parameter:

$x_n > 0$, x_n Quadratzahlen $n = 1..2$.

Die Funktion lautet: $\sqrt{x^2 - \{2 \cdot x_1\}x + \{x_1^2 + x_2^2\}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 9$ $x_2 = 9$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der inneren Substitution integriert werden:

$$\int f(g) dg = \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

Dazu muss der Term unter der Wurzel zunächst quadratisch ergänzt werden.

Die Wurzel soll durch die Gleichung (*) $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ verschwinden.

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Das in der Rechnung entstehende $\int \cosh^2 u$ berechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \int \cosh^2 u du &= \frac{1}{4} \int e^{2u} + 2 + e^{-2u} du && \text{nach Definition des Kosinushyperbolicus} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2u}}{2} + 2u + \frac{e^{-2u}}{-2} \right) && \text{integriert mit äußerer Substitution} \end{aligned}$$

Desweiteren wird eine Formel für die Umkehrfunktion des Sinushyperbolicus = areasin y benötigt:

$$\begin{aligned} \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y &\Leftrightarrow e^x - 2y - e^{-x} = 0 && \text{Multiplikation mit } 2 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 2y \cdot e^x - 1 = 0 && \text{Multiplikation mit } e^x \\ &\Leftrightarrow u^2 - 2y \cdot u - 1 = 0 && \text{Substitution } e^x = u \\ &\Leftrightarrow u_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} && \text{Mitternachtsformel} \\ &\Leftrightarrow x_{1,2} = \ln(y \pm \sqrt{y^2 + 1}) && \text{Rücksubstitution} \\ &\Leftrightarrow x_{1,2} = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) && \text{Der ln ist nur für positive Argumente definiert} \end{aligned}$$

Rechnung:

$$\sqrt{x^2 - 18x + 162} = \sqrt{(x-9)^2 - 81 + 162} = \sqrt{(x-9)^2 + 81} = 9 \cdot \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}$$

Nach dieser quadratischen Ergänzung kann man die innere Substitution mit Sinushyperbolicus erkennen:
 $\frac{x-9}{9} := \sinh t$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 18x + 162} dx &= \int 9 \cdot \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1} dx && \text{siehe oben} \\ &= 9 \cdot \int \sqrt{(\sinh t)^2 + 1} dx && \frac{x-9}{9} := \sinh t \\ &= 9 \cdot \int \sqrt{(\cosh t)^2} x' \cdot dt && (*) \text{ und innere Substitution} \\ &= 9 \cdot \int |\cosh t| \cdot 9 \cosh t \cdot dt && x' = (9 \sinh t + 9)' = 9 \cosh t \\ &= 81 \cdot \int \cosh^2 t \cdot dt && \cosh t > 0 \\ &= \frac{81}{4} \left(\frac{e^{2t}}{2} + 2t + \frac{e^{-2t}}{-2} \right) && \text{mit oben} \end{aligned}$$

$$t = \operatorname{arcsinh} \left(\frac{x-9}{9} \right) = \ln \left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1} \right) \quad \text{damit gilt:}$$

$$\begin{aligned} \int f(x) &= \frac{81}{4} \left(\frac{e^{2 \cdot \ln \left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1} \right)}}{2} + 2 \ln \left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1} \right) + \frac{e^{-2 \cdot \ln \left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1} \right)}}{-2} \right) \\ &= \frac{81}{4} \left(\frac{e^{\ln \left(\left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1} \right)^2 \right)}}{2} + 2 \ln \left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1} \right) + \frac{e^{\ln \left(\left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1} \right)^{-2} \right)}}{-2} \right) \\ &= \frac{81}{8} \left(\left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1} \right)^2 + 4 \ln \left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1} \right) - \left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1} \right)^{-2} \right) \end{aligned}$$

Anmerkung des Verfassers:

Wenn ich gewusst hätte, was da rauskommt, hätte ich die Aufgabe wohl lieber gelassen, aber jetzt ist sie schon fertig – viel Spaß beim weiter Vereinfachen und Fehlersuchen. Alle falschen Lösungen sind willkürliche Schätzungen. Es liegt kein spezieller Fehler zu Grunde.

Angebotene Lösungen:

- 1 $\left(\frac{2 \cdot (x^2 - 18x + 162)^{\frac{3}{2}}}{3 \cdot (2x - 18)}\right)$
- 2 $\frac{\ln(x^2 - 18x + 162)}{9}$
- 3 $\arcsin\left(\frac{x-9}{9}\right)$
- 4 $\frac{81}{8} \left(\left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}\right)^2 + 4 \ln\left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}\right) - \left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}\right)^{-2} \right)$
- 5 $\ln\left(\frac{x^2 - 18x + 162}{9}\right)$
- 6 $\arcsin\left(\frac{x^2 - 18x + 162}{9}\right)$
- 7 $\operatorname{areasinh}\left(\frac{x-9}{9}\right) + \left(\frac{2 \cdot (x^2 - 18x + 162)^{\frac{3}{2}}}{3 \cdot (2x - 18)}\right)$
- 8 $\frac{x^2}{2} - 12x + 162$
- 9 $\frac{\sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}^2 + 4 \ln\left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}\right) - \left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}\right)^{-2}}{8}$
- 10 $\arcsin\left(\sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}\right)$
- 11 $\operatorname{areasinh}\left(\frac{x-9}{9}\right)$
- 12 $\operatorname{arcsinh}\left(\sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}\right)$

Fehlerinterpretation:

- 1 $\left(\frac{2 \cdot (x^2 - 18x + 162)^{\frac{3}{2}}}{3 \cdot (2x - 18)}\right)$ DF: 3
- 2 $\frac{\ln(x^2 - 18x + 162)}{9}$ DF: 5
- 3 $\arcsin\left(\frac{x-9}{9}\right)$ DF: 2
- 4 $\frac{81}{8} \left(\left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}\right)^2 + 4 \ln\left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}\right) - \left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}\right)^{-2} \right)$ richtig
- 5 $\ln\left(\frac{x^2 - 18x + 162}{9}\right)$ DF: 10
- 6 $\arcsin\left(\frac{x^2 - 18x + 162}{9}\right)$ DF: 11
- 7 $\operatorname{areasinh}\left(\frac{x-9}{9}\right) + \left(\frac{2 \cdot (x^2 - 18x + 162)^{\frac{3}{2}}}{3 \cdot (2x - 18)}\right)$ DF: 7
- 8 $\frac{x^2}{2} - 12x + 162$ DF: 4
- 9 $\frac{\sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}^2 + 4 \ln\left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}\right) - \left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}\right)^{-2}}{8}$ DF: 6
- 10 $\arcsin\left(\sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}\right)$ DF: 8
- 11 $\operatorname{areasinh}\left(\frac{x-9}{9}\right)$ DF: 1
- 12 $\operatorname{arcsinh}\left(\sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}\right)$ DF: 9

MV 04 Blatt 12 Kapitel 8.4 Substitution
keine Integralrechnung Nummer: 59 0 2004120001 Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 12.1.4: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 4 \cdot (5 \cdot x - 10)^3$

Parameter:

$x_n =$ Koeffizienten der Funktion, $x_n > 0$, $n = 1..4$, $x_3 > x_2$

Die Funktion lautet: $x_1 \cdot (x_2 \cdot x - x_3)^{x_4}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 10 \quad x_4 = 3$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit linearer Substitution und der Potenzregel integriert werden:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{und} \quad \int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} \quad \text{wenn} \quad \int f(x) dx = F(x) .$$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
 \int 4 \cdot (5 \cdot x - 10)^3 dx &= 4 \cdot \int (5 \cdot x - 10)^3 dx && \text{Linearität des Integrals} \\
 &= 4 \cdot \int (g(x))^3 dx && \text{mit } g(x) = 5 \cdot x - 10 \\
 &= 4 \cdot \int g^3 \frac{dg}{g'} && \text{lineare Substitution} \\
 &= 4 \cdot \frac{g^{3+1}}{3+1} \cdot \frac{1}{5} && \text{Potenzregel} \\
 &= \frac{4}{20} \cdot (5 \cdot x - 10)^4 && \text{Rücksstitution}
 \end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

- | | | | | | | | |
|----------------------------|--|---------------------------------------|---|-----------------------------|---|-----------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\frac{8}{5} \cdot (5 \cdot x - 10)^4$ | <input type="checkbox"/> 2 | $\frac{1}{10} \cdot (5 \cdot x - 10)^4$ | <input type="checkbox"/> 3 | $60 \cdot (5 \cdot x - 10)^2$ | <input type="checkbox"/> 4 | $\frac{4 \cdot (5 \cdot x)^3}{3} - 4 \cdot 10^3 x$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\frac{4 \cdot (5 \cdot x)^4}{4} - 4 \cdot 10^3 x$ | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | $\frac{1}{5} \cdot (5 \cdot x - 10)^4$ | <input type="checkbox"/> 7 | $\frac{4 \cdot (5 \cdot x)^2}{10} - 4 \cdot 10^3 x$ | <input type="checkbox"/> 8 | $\frac{12}{5} \cdot (5 \cdot x - 10)^3$ |
| <input type="checkbox"/> 9 | $\frac{4}{5} \cdot (5 \cdot x - 10)^3$ | <input type="checkbox"/> 10 | $\frac{4 \cdot (5 \cdot x)^4}{20} - 4 \cdot 10^3 x$ | <input type="checkbox"/> 11 | $5 \cdot (5 \cdot x - 10)^4$ | <input type="checkbox"/> 12 | $\frac{4 \cdot (5 \cdot x)^4}{20} - 40x$ |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|---------------------------------------|---|---|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\frac{8}{5} \cdot (5 \cdot x - 10)^4$ | DF: Falsche innere Ableitung |
| <input type="checkbox"/> 2 | $\frac{1}{10} \cdot (5 \cdot x - 10)^4$ | DF: Falsche innere Ableitung |
| <input type="checkbox"/> 3 | $60 \cdot (5 \cdot x - 10)^2$ | DF: Abgeleitet |
| <input type="checkbox"/> 4 | $\frac{4 \cdot (5 \cdot x)^3}{3} - 4 \cdot 10^3 x$ | DF: Binomische Formel nicht angewendet |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\frac{4 \cdot (5 \cdot x)^4}{4} - 4 \cdot 10^3 x$ | DF: Binomische Formel nicht angewendet |
| <input checked="" type="checkbox"/> 6 | $\frac{1}{5} \cdot (5 \cdot x - 10)^4$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 7 | $\frac{4 \cdot (5 \cdot x)^2}{10} - 4 \cdot 10^3 x$ | DF: Binomische Formel nicht angewendet |
| <input type="checkbox"/> 8 | $\frac{12}{5} \cdot (5 \cdot x - 10)^3$ | DF: Integration vergessen |
| <input type="checkbox"/> 9 | $\frac{4}{5} \cdot (5 \cdot x - 10)^3$ | DF: Integration vergessen |
| <input type="checkbox"/> 10 | $\frac{4 \cdot (5 \cdot x)^4}{20} - 4 \cdot 10^3 x$ | DF: Binomische Formel nicht angewendet |
| <input type="checkbox"/> 11 | $5 \cdot (5 \cdot x - 10)^4$ | DF: Mit innerer Ableitung multipliziert |
| <input type="checkbox"/> 12 | $\frac{4 \cdot (5 \cdot x)^4}{20} - 40x$ | DF: Binomische Formel nicht angewendet |

MV 04 Blatt 12 Kapitel 8.4 Substitution
keine Integralrechnung Nummer: 95 0 2004120003 Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 12.1.5: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : [0, \frac{\pi}{10}) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 4 \cdot \frac{\sin(\tan(5x))}{\cos^2(5x)}$.

Parameter:

$x_n =$ Faktoren der Funktion, $x_n > 0$, $n = 1..2$.

Die Funktion lautet: $x_1 \cdot \frac{\sin(\tan(x_2 x))}{\cos^2(x_2 x)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4$ $x_2 = 5$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der äußeren Substitution integriert werden:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(g) dg$$

Beachten Sie dabei, dass gilt:

$$\begin{aligned}
 (\tan(ax))' &= \left(\frac{\sin(ax)}{\cos(ax)}\right)' && \text{Definition des Tangens} \\
 &= \frac{a \cos(ax) \cdot \cos(ax) - \sin(ax) \cdot (-a \sin(ax))}{\cos^2(ax)} && \text{Quotientenregel} \\
 &= \frac{a(\cos^2(ax) + \sin^2(ax))}{\cos^2(ax)} && \text{zusammengefasst} \\
 &= \frac{a}{\cos^2(ax)} && \cos^2 x + \sin^2 x = 1
 \end{aligned}$$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int 4 \cdot \frac{\sin(\tan(5x))}{\cos^2(5x)} dx &= 4 \cdot \int \frac{\sin(g(x))}{\cos^2(5x)} dx && \text{mit } g(x) = \tan(5x) \\
&= \frac{4}{5} \cdot \int \sin(g(x)) \cdot \frac{5}{\cos^2(5x)} dx && \text{Erzeugung der inneren Ableitung} \\
&= \frac{4}{5} \cdot \int \sin(g(x)) \cdot g'(x) dx && \text{mit } g'(x) = \frac{5}{\cos^2(5x)} \\
&= \frac{4}{5} \cdot \int \sin(g(x)) dg && \text{Substitutionsregel: } dx \cdot g'(x) = dg \\
&= \frac{4}{5} \cdot -\cos g && \text{integriert } (\int \sin x = -\cos x) \\
&= -\frac{4}{5} \cdot \cos(\tan(5x)) && \text{rücks substituiert}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

- | | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $20 \cdot \ln \sin(5x) $ | <input type="checkbox"/> 2 | $-\frac{4}{5} \cdot \sin(5x)$ | <input type="checkbox"/> 3 | $-\frac{4}{5} \cdot \tan(5x)$ | <input type="checkbox"/> 4 | $\frac{4}{5} \cdot \cos(\tan(5x))$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $20 \cdot \sin(\tan(5x))$ | <input type="checkbox"/> 6 | $-20 \cdot \cos(\tan(5x))$ | <input type="checkbox"/> 7 | $\frac{4}{5} \cdot \sin(5x)$ | <input type="checkbox"/> 8 | $20 \cdot \cos(5x)$ |
| <input type="checkbox"/> 9 | $20 \cdot \ln \cos(5x) $ | <input type="checkbox"/> 10 | $20 \cdot \tan(5x)$ | <input type="checkbox"/> 11 | $20 \cdot \cos(\tan(5x))$ | <input checked="" type="checkbox"/> X | $-\frac{4}{5} \cdot \cos(\tan(5x))$ |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|---------------------------------------|-------------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> 1 | $20 \cdot \ln \sin(5x) $ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 2 | $-\frac{4}{5} \cdot \sin(5x)$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 3 | $-\frac{4}{5} \cdot \tan(5x)$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 4 | $\frac{4}{5} \cdot \cos(\tan(5x))$ | RF: Vorzeichen falsch |
| <input type="checkbox"/> 5 | $20 \cdot \sin(\tan(5x))$ | DF: Falsch integriert |
| <input type="checkbox"/> 6 | $-20 \cdot \cos(\tan(5x))$ | DF: Mit innerer Ableitung multipliziert |
| <input type="checkbox"/> 7 | $\frac{4}{5} \cdot \sin(5x)$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 8 | $20 \cdot \cos(5x)$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 9 | $20 \cdot \ln \cos(5x) $ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 10 | $20 \cdot \tan(5x)$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 11 | $20 \cdot \cos(\tan(5x))$ | DF: Mit innerer Ableitung multipliziert |
| <input checked="" type="checkbox"/> X | $-\frac{4}{5} \cdot \cos(\tan(5x))$ | richtig |

MV 04 Blatt 12 Kapitel 8.4 Substitution
Produktregel Integralrechnung Nummer: 97 0 2004120005 Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 12.1.6: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = (4x - 9) \cdot e^{7x+6}$.

Parameter:

$x_n =$ Koeffizienten der Funktion, $x_n > 0$, $n = 1..4$ $x_2 > x_1$.

Die Funktion lautet: $(4x - 9) \cdot e^{7x+6}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4$ $x_2 = 9$ $x_3 = 7$ $x_4 = 6$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der Produktregel integriert werden:

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

Dabei ist u normalerweise die e - Funktion und v das Polynom.

Die Faktoren werden unter anderem mit linearer Substitution integriert: $\int e^{ax+b} = \frac{e^{ax+b}}{a}$.

Rechnung:

Die Rollenverteilung ist:

$$\begin{aligned} u' &= e^{7x+6} \Rightarrow u = \frac{e^{7x+6}}{7} \\ v &= 4x-9 \Rightarrow v' = 4 \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int (4x-9) \cdot e^{7x+6} &= (4x-9) \cdot \frac{e^{7x+6}}{7} - \int 4 \cdot \frac{e^{7x+6}}{7} \\ \int v \cdot u' &= v \cdot u - \int v' \cdot u \\ &= \frac{4 \cdot 7x - 9 \cdot 7}{7 \cdot 7} \cdot e^{7x+6} - 4 \cdot \frac{e^{7x+6}}{7 \cdot 7} \\ &= \frac{28x-67}{49} \cdot e^{7x+6} \end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

- | | | | | | | | |
|----------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\frac{4x^2-9x}{98} \cdot e^{8x+7}$ | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | $\frac{28x-67}{49} \cdot e^{7x+6}$ | <input type="checkbox"/> 3 | $\frac{4x^2-9x}{98} \cdot e^{7x+7}$ | <input type="checkbox"/> 4 | $\frac{28x-67}{343} \cdot e^{7x+7}$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\frac{28x+67}{49} \cdot e^{7x+7}$ | <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{28x-67}{343} \cdot e^{8x+6}$ | <input type="checkbox"/> 7 | $\frac{4x^2-9x}{98} \cdot e^{8x+6}$ | <input type="checkbox"/> 8 | $(\frac{2}{7}x^2 - \frac{9}{7}x) \cdot e^{7x+6}$ |
| <input type="checkbox"/> 9 | $(28x-13) \cdot e^{7x+6}$ | <input type="checkbox"/> 10 | $\frac{28x-67}{343} \cdot e^{8x+7}$ | <input type="checkbox"/> 11 | $\frac{28x+67}{49} \cdot e^{7x+6}$ | <input type="checkbox"/> 12 | $(2x^2-9x) \cdot e^{\frac{7}{2}x^2+6x}$ |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|---------------------------------------|--|-----------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\frac{4x^2-9x}{98} \cdot e^{8x+7}$ | DF: Falsch integriert |
| <input checked="" type="checkbox"/> 2 | $\frac{28x-67}{49} \cdot e^{7x+6}$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 3 | $\frac{4x^2-9x}{98} \cdot e^{7x+7}$ | DF: Falsch integriert |
| <input type="checkbox"/> 4 | $\frac{28x-67}{343} \cdot e^{7x+7}$ | DF: Falsch integriert |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\frac{28x+67}{49} \cdot e^{7x+7}$ | DF: Falsch integriert |
| <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{28x-67}{343} \cdot e^{8x+6}$ | DF: Falsch integriert |
| <input type="checkbox"/> 7 | $\frac{4x^2-9x}{98} \cdot e^{8x+6}$ | DF: Falsch integriert |
| <input type="checkbox"/> 8 | $(\frac{2}{7}x^2 - \frac{9}{7}x) \cdot e^{7x+6}$ | DF: Falsch integriert |
| <input type="checkbox"/> 9 | $(28x-13) \cdot e^{7x+6}$ | DF: Abgeleitet |
| <input type="checkbox"/> 10 | $\frac{28x-67}{343} \cdot e^{8x+7}$ | DF: Falsch integriert |
| <input type="checkbox"/> 11 | $\frac{28x+67}{49} \cdot e^{7x+6}$ | DF: Falsch integriert |
| <input type="checkbox"/> 12 | $(2x^2-9x) \cdot e^{\frac{7}{2}x^2+6x}$ | DF: Falsch integriert |

Allgemeine Hinweise:

Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware@yahoo.de).

Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: <http://www.vorkurs.de.vu>