Blatt Nr 12.07

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 12

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
Produktregel	Integralrechnung	Nummer: 10 0 2004120005	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.1: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = (3\,x - 10) \cdot e^{3\,x+6}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 0, \quad n = 1..4 \; x_2 > x_1$.

Die Funktion lautet: $(3\,x - 10) \cdot e^{3\,x+6}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \qquad x_2 = 10 \qquad x_3 = 3 \qquad x_4 = 6$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der Produktregel integriert werden:

$$\int u' \cdot v \quad = \quad u \cdot v - \int u \cdot v'.$$

Dabei ist u normalerweise die $e-$ Funktion und v das Polynom.
Die Faktoren werden unter anderem mit linearer Substitution integriert: $\int e^{ax+b} = \frac{e^{ax+b}}{a}$.

Rechnung:

Die Rollenverteilung ist:
$$\begin{array}{rclcrcl} u' & = & e^{3\,x+6} & \Rightarrow & u & = & \frac{e^{3\,x+6}}{3} \\ v & = & 3\,x - 10 & \Rightarrow & v' & = & 3 \end{array}.$$

Damit gilt

$$\begin{array}{llllllllllll} \int & (3\,x-10) & \cdot & e^{3\,x+6} & = & (3\,x-10) & \cdot & \frac{e^{3\,x+6}}{3} & - & \int & 3 & \cdot \; \frac{e^{3\,x+6}}{3} \\ \int & v & \cdot & u' & = & v & \cdot & u & - & \int & v' & \cdot \; u \\ & & & & = & \frac{3\cdot 3\,x - 10\cdot 3}{3\cdot 3} & \cdot & e^{3\,x+6} & - & & 3 & \cdot \; \frac{e^{3\,x+6}}{3\cdot 3} \\ & & & & = & \frac{9\,x-33}{9} & \cdot & e^{3\,x+6} & & & & \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{9\,x-33}{63} \cdot e^{3\,x+7}$	☒ $\frac{9\,x-33}{9} \cdot e^{3\,x+6}$	3 $(\frac{1}{2}x^2 - \frac{10}{3}x) \cdot e^{3\,x+6}$	4 $\frac{3\,x^2-10x}{42} \cdot e^{4\,x+6}$
5 $(\frac{3}{2}x^2 - 10x) \cdot e^{\frac{3}{2}\,x^2+6x}$	6 $\frac{9\,x+33}{9} \cdot e^{3\,x+6}$	7 $\frac{3\,x^2-10x}{42} \cdot e^{3\,x+7}$	8 $\frac{9\,x+33}{9} \cdot e^{3\,x+7}$
9 $\frac{3\,x^2-10x}{42} \cdot e^{4\,x+7}$	10 $(9\,x-13) \cdot e^{3\,x+6}$	11 $\frac{9\,x-33}{63} \cdot e^{4\,x+7}$	12 $\frac{9\,x-33}{63} \cdot e^{4\,x+6}$

Fehlerinterpretation:

1 $\frac{9\,x-33}{63} \cdot e^{3\,x+7}$	DF: Falsch integriert
☒ $\frac{9\,x-33}{9} \cdot e^{3\,x+6}$	richtig
3 $(\frac{1}{2}x^2 - \frac{10}{3}x) \cdot e^{3\,x+6}$	DF: Falsch integriert
4 $\frac{3\,x^2-10x}{42} \cdot e^{4\,x+6}$	DF: Falsch integriert
5 $(\frac{3}{2}x^2 - 10x) \cdot e^{\frac{3}{2}\,x^2+6x}$	DF: Falsch integriert
6 $\frac{9\,x+33}{9} \cdot e^{3\,x+6}$	DF: Falsch integriert
7 $\frac{3\,x^2-10x}{42} \cdot e^{3\,x+7}$	DF: Falsch integriert
8 $\frac{9\,x+33}{9} \cdot e^{3\,x+7}$	DF: Falsch integriert
9 $\frac{3\,x^2-10x}{42} \cdot e^{4\,x+7}$	DF: Falsch integriert
10 $(9\,x-13) \cdot e^{3\,x+6}$	DF: Abgeleitet
11 $\frac{9\,x-33}{63} \cdot e^{4\,x+7}$	DF: Falsch integriert
12 $\frac{9\,x-33}{63} \cdot e^{4\,x+6}$	DF: Falsch integriert

Aufgabe 12.1.2: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{9 - 36 \cdot x^2}$.

Parameter:

x_n = geloste Zahlen, $x_n > 0$, $n = 1..2$. $x_3 := x_1^2$, $x_4 := x_3 \cdot x_2^2$

Die Funktion lautet: $\sqrt{x_3 \, - \, x_4 \cdot x^2}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 9 \qquad x_4 = 36$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der inneren Substitution integriert werden:

$$\int f(g)\; dg \quad = \quad \int f(g(x)) \cdot g'(x)\; dx$$

Dabei soll die Wurzel durch die Gleichung $(*)$ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ verschwinden.

Das in der Rechnung entstehende $\int \sin^2 x$ berechnen wir wie folgt:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \int & \sin x & \cdot & \sin x & = & -\cos x & \cdot & \sin x & - & \int & -\cos x & \cdot & \cos x \\ \int & u' & \cdot & v & = & u & \cdot & v & - & \int & u & \cdot & v' \;. \end{array} .$$

Dies ist aber nur scheinbar 'im Kreis' gerechnet:

$$\begin{array}{rcll} \int \sin^2 x & = & -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x & \text{siehe oben} \\ & = & -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x) & \text{mit Formel } (*) \\ & = & -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x & \text{Linearität des Integrals} \end{array}$$

Addition von $\int \sin^2 x$ ergibt:

$$2 \cdot \int \sin^2 x = x - \cos x \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad \int \sin^2 x = \frac{x - \cos x \cdot \sin x}{2}.$$

In der Rechnung entsteht weiterhin ein Ausdruck der Form $\sin(\arccos x)$. Diesen Ausdruck berechnen wir wie folgt: Sei $y = \arccos x$, dann gilt:

$$\begin{array}{rll} \sin y & = (\pm)\sqrt{1 - \cos^2 y} & \text{nach Formel } (*) \\ & = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} & y = \arccos x \\ & = \sqrt{1 - x^2} & \cos(\arccos x) = x \quad . \end{array}$$

Damit ist $\sin(\arccos x) = (\pm)\sqrt{1 - x^2}$.

Rechnung:

Zuerst klammern wir 9 aus: $\sqrt{9 - 36 \cdot x^2} \;=\; \sqrt{9 \cdot (1 - 4 \cdot x^2)} \;=\; 3 \cdot \sqrt{1 - 4 \cdot x^2}$.

Jetzt substituieren wir $x(t) := \frac{\cos t}{2}$, t kann im Bereich von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ gewählt werden.

$$
\begin{aligned}
\int 3 \cdot \sqrt{1 - 4 \cdot x^2}\, dx &= \int 3 \cdot \sqrt{1 - 4 \cdot (\tfrac{\cos t}{2})^2}\, dx && \text{Substitution} \\
&= 3 \cdot \int \sqrt{1 - \cos^2 t} \quad \cdot x' \cdot dt && \text{mit } dx = x' \cdot dt \\
&= 3 \cdot \int \sqrt{\sin^2 t} \quad \cdot \tfrac{-\sin t}{2} \cdot dt && x' = \tfrac{-\sin t}{2} \\
&= 3 \cdot \int |\sin t| \cdot \tfrac{-\sin t}{2} \cdot dt && \\
&= \tfrac{3}{2} \cdot \int \sin^2 t \cdot dt && \text{t} \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \\
&= -\tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{t - \cos t \cdot \sin t}{2} && \text{siehe oben} \\
&= -\tfrac{3}{4} \cdot (\arccos(2\,x) - \cos \arccos(2\,x) \cdot \sin \arccos(2\,x)) && t = \arccos(2\,x) \\
&= -\tfrac{3}{4} \cdot (\arccos(2\,x) - 2\,x \cdot \sqrt{1 - (2\,x)^2}) && \sin(\arccos(2\,x)) = \sqrt{1 - (2\,x)^2}
\end{aligned}
$$

Angebotene Lösungen:

$\boxed{1}$ $3 \cdot \frac{x}{\sqrt{1-(2\,x)^2}}$	$\boxed{2}$ $\frac{3}{4} \cdot (2\,x \cdot \sqrt{1-(2\,x)^2} -$ areaccosh $(2\,x))$
$\boxed{3}$ $\frac{3}{2} \cdot (x \cdot \sqrt{1 - 2^2\,x^2} - 2 \arccos x)$	$\boxed{4}$ $3 \cdot (x \cdot \sqrt{1-(2\,x)^2} - 2$ areaccosh $x)$
$\boxtimes$ $\frac{3}{4} \cdot (2\,x \cdot \sqrt{1-(2\,x)^2} - \arccos(2\,x))$	$\boxed{6}$ $\frac{6 \cdot (1 - 4 \cdot x^2)^{3/2}}{6x}$
$\boxed{7}$ $\frac{3}{2} \cdot (\arccos(2\,x))$	$\boxed{8}$ $\frac{3}{2} \cdot ($ areaccosh $(2\,x)\,)$
$\boxed{9}$ $\frac{9}{4} \cdot \frac{(1+4 \cdot x^2)^{3/2}}{x}$	$\boxed{10}$ $\frac{6 \cdot (1^{3/2} - 4 \cdot x^3)}{6x}$
$\boxed{11}$ $3x + 3 \cdot x^2$	$\boxed{12}$ 162

Fehlerinterpretation:

$\boxed{1}$ $3 \cdot \frac{x}{\sqrt{1-(2\,x)^2}}$	DF: Funktion abgeleitet	
$\boxed{2}$ $\frac{3}{4} \cdot (2\,x \cdot \sqrt{1-(2\,x)^2} -$ areaccosh $(2\,x))$	DF: Falsche Substitution	
$\boxed{3}$ $\frac{3}{2} \cdot (x \cdot \sqrt{1 - 2^2\,x^2} - 2 \arccos x)$	RF: Viele falsche Faktoren	
$\boxed{4}$ $3 \cdot (x \cdot \sqrt{1-(2\,x)^2} - 2$ areaccosh $x)$	DF: Falsche Substitution	
$\boxtimes$ $\frac{3}{4} \cdot (2\,x \cdot \sqrt{1-(2\,x)^2} - \arccos(2\,x))$	richtig	
$\boxed{6}$ $\frac{6 \cdot (1 - 4 \cdot x^2)^{3/2}}{6x}$	DF: Falsche Substitution	
$\boxed{7}$ $\frac{3}{2} \cdot (\arccos(2\,x))$	DF: Antwort geraten	
$\boxed{8}$ $\frac{3}{2} \cdot ($ areaccosh $(2\,x)\,)$	DF: Antwort geraten	
$\boxed{9}$ $\frac{9}{4} \cdot \frac{(1+4 \cdot x^2)^{3/2}}{x}$	DF: Falsche Substitution	
$\boxed{10}$ $\frac{6 \cdot (1^{3/2} - 4 \cdot x^3)}{6x}$	DF: Falsche Substitution	
$\boxed{11}$ $3x + 3 \cdot x^2$	DF: Wurzelrechnung falsch	
$\boxed{12}$ 162	GL:	geratene Lösung

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 22 0 2004120001	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.3: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = 3 \cdot (2 \cdot x - 3)^6$

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 0$, $n = 1..4$, $x_3 > x_2$

Die Funktion lautet: $x_1 \cdot (x_2 \cdot x - x_3)^{x_4}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = 6$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit linearer Substitution und der Potenzregel integriert werden:

$$\int x^n\,dx \quad = \quad \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{und} \qquad \int f(ax+b)\,dx \quad = \quad \frac{F(ax+b)}{a} \quad \text{wenn} \int f(x)\,dx = F(x)\;.$$

Rechnung:

$$\begin{array}{lll} \int 3\cdot(2\cdot x-3)^6 dx & = 3\cdot\int(2\cdot x-3)^6 dx & \text{Linearität des Integrals} \\ & = 3\cdot\int(g(x))^6 dx & \text{mit } g(x)=2\cdot x-3 \\ & = 3\cdot\int g^6\frac{dg}{g'} & \text{lineare Substitution} \\ & = 3\cdot\frac{g^{6+1}}{6+1}\cdot\frac{1}{2} & \text{Potenzregel} \\ & = \frac{3}{14}\cdot(2\cdot x-3)^7 & \text{Rücksubstitution} \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{3\cdot(2\cdot x)^7}{14}-9x$	2 $\frac{3}{2}\cdot(2\cdot x-3)^6$	3 $\frac{6}{7}\cdot(2\cdot x-3)^7$	4 $\frac{1}{7}\cdot(2\cdot x-3)^7$
5 $9\cdot(2\cdot x-3)^6$	6 $\frac{3\cdot(2\cdot x)^7}{14}-3\cdot 3^6x$	7 $36\cdot(2\cdot x-3)^5$	8 $\frac{3\cdot(2\cdot x)^5}{10}-3\cdot 3^6x$
9 $7\cdot(2\cdot x-3)^7$	10 $\frac{3\cdot(2\cdot x)^7}{7}-3\cdot 3^6x$	☒ $\frac{3}{14}\cdot(2\cdot x-3)^7$	12 $\frac{3\cdot(2\cdot x)^6}{6}-3\cdot 3^6x$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{3\cdot(2\cdot x)^7}{14}-9x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
2	$\frac{3}{2}\cdot(2\cdot x-3)^6$	DF: Integration vergessen
3	$\frac{6}{7}\cdot(2\cdot x-3)^7$	DF: Mit innerer Ableitung multipliziert
4	$\frac{1}{7}\cdot(2\cdot x-3)^7$	DF: Falsche innere Ableitung
5	$9\cdot(2\cdot x-3)^6$	DF: Integration vergessen
6	$\frac{3\cdot(2\cdot x)^7}{14}-3\cdot 3^6x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
7	$36\cdot(2\cdot x-3)^5$	DF: Abgeleitet
8	$\frac{3\cdot(2\cdot x)^5}{10}-3\cdot 3^6x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
9	$7\cdot(2\cdot x-3)^7$	DF: Falsche innere Ableitung
10	$\frac{3\cdot(2\cdot x)^7}{7}-3\cdot 3^6x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
☒	$\frac{3}{14}\cdot(2\cdot x-3)^7$	richtig
12	$\frac{3\cdot(2\cdot x)^6}{6}-3\cdot 3^6x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 28 0 2004120002	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.4: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad f(x)=4\cdot\sin(4\,x)\cdot e^{8\cdot\cos(4\,x)}$

Parameter:

x_n = Faktoren der Funktion, $x_n>0,\;\; n=1..3$.

Die Funktion lautet: $x_1\cdot\sin(x_2\,x)\cdot e^{x_3\cdot\cos(x_2\,x)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=4 \quad x_2=4 \quad x_3=8$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der äußeren Substitution integriert werden:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx \quad = \quad \int f(g)\,dg$$

Beachten Sie dabei, dass $(\cos(ax))'=-a\sin(ax)$ ist.

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int 4\cdot\sin(4\,x)\cdot e^{8\cdot\cos(4\,x)}\;dx &= 4\cdot\int \sin(4\,x)\cdot e^{8\cdot\cos(4\,x)}\;dx && \text{Linearität des Integrals}\\
&= 4\cdot\int \sin(4\,x)\cdot e^{g(x)}\;dx && \text{mit } g(x)=8\cdot\cos(4\,x)\\
&= -4\cdot\int \tfrac{-8\cdot 4\cdot\sin(4\,x)}{8\cdot 4}\cdot e^{g(x)}\;dx && \text{Erzeugung der inneren Ableitung}\\
&= -4\cdot\int \tfrac{g'(x)}{32}\cdot e^{g(x)}\;dx && g'(x)=-8\cdot 4\cdot\sin(4\,x)\\
&= -\tfrac{4}{32}\cdot\int e^{g}\;dg && \text{Substitutionsregel: } dx\cdot g'(x)=\;dg\\
&= -\tfrac{1}{8}\cdot e^{g} && \text{integriert } (\textstyle\int e^x=e^x)\\
&= -\tfrac{1}{8}\cdot e^{8\cdot\cos(4\,x)} && \text{rücksubstituiert}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

[1] $1\cdot\sin(4\,x)\cdot e^{8\cdot\cos(4\,x)}$	[2] $-8\cdot e^{8\cdot\cos(4\,x)}$	[3] $8\cdot e^{8\cdot\cos(4\,x)}$	[4] $8\cdot e^{4\,x}\cdot\cos x$
[5] $\frac{1}{8}\cdot e^{8\cdot\cos(4\,x)}$	[6] $-1\cdot\cos(4\,x)\cdot e^{8x}$	[7] $-2\cdot e^{8\cdot\cos(4\,x)}$	[8] $2\cdot e^{8\cdot\cos(4\,x)}$
[X] $-\frac{1}{8}\cdot e^{8\cdot\cos(4\,x)}$	[10] $8\cdot\cos(4\,x)\cdot e^{x}$	[11] $-1\cdot\sin(4\,x)\cdot e^{8\cdot\cos(4\,x)}$	[12] $1\cdot\cos(4\,x)\cdot e^{8x}$

Fehlerinterpretation:

[1]	$1\cdot\sin(4\,x)\cdot e^{8\cdot\cos(4\,x)}$	DF: Lösung geraten
[2]	$-8\cdot e^{8\cdot\cos(4\,x)}$	DF: Falsch substituiert
[3]	$8\cdot e^{8\cdot\cos(4\,x)}$	DF: Falsch substituiert
[4]	$8\cdot e^{4\,x}\cdot\cos x$	DF: Lösung geraten
[5]	$\frac{1}{8}\cdot e^{8\cdot\cos(4\,x)}$	RF: falsches Vorzeichen
[6]	$-1\cdot\cos(4\,x)\cdot e^{8x}$	DF: Lösung geraten
[7]	$-2\cdot e^{8\cdot\cos(4\,x)}$	DF: Falsch substituiert
[8]	$2\cdot e^{8\cdot\cos(4\,x)}$	DF: Falsch substituiert
[X]	$-\frac{1}{8}\cdot e^{8\cdot\cos(4\,x)}$	richtig
[10]	$8\cdot\cos(4\,x)\cdot e^{x}$	DF: Lösung geraten
[11]	$-1\cdot\sin(4\,x)\cdot e^{8\cdot\cos(4\,x)}$	DF: Lösung geraten
[12]	$1\cdot\cos(4\,x)\cdot e^{8x}$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 31 0 2004120003	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.5: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f:[0,\frac{\pi}{4})\to\mathbb{R}\quad f(x)=2\cdot\frac{\sin(\,\tan(2\,x)\,)}{\cos^2(2\,x)}$.

Parameter:

x_n = Faktoren der Funktion, $x_n>0,\;\; n=1..2$.

Die Funktion lautet: $x_1\cdot\frac{\sin(\,\tan(x_2\,x)\,)}{\cos^2(x_2\,x)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=2\qquad x_2=2$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der äußeren Substitution integriert werden:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\;dx \quad=\quad \int f(g)\;dg$$

Beachten Sie dabei, dass gilt:

$$\begin{aligned}
(\tan(ax))' &= (\tfrac{\sin(ax)}{\cos(ax)})' && \text{Definition des Tangens}\\
&= \tfrac{a\cos(ax)\cdot\cos(ax)-\sin(ax)\cdot(-a\sin(ax))}{\cos^2(ax)} && \text{Quotientenregel}\\
&= \tfrac{a(\cos^2(ax)+\sin^2(ax))}{\cos^2(ax)} && \text{zusammengefasst}\\
&= \tfrac{a}{\cos^2(ax)} && \cos^2 x+\sin^2 x = 1
\end{aligned}$$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int 2\cdot \tfrac{\sin(\tan(2x))}{\cos^2(2x)}\,dx &= 2\cdot\int \tfrac{\sin(g(x))}{\cos^2(2x)}\,dx && \text{mit } g(x)=\tan(2x)\\
&= \tfrac{2}{2}\cdot\int \sin(g(x))\cdot\tfrac{2}{\cos^2(2x)}\,dx && \text{Erzeugung der inneren Ableitung}\\
&= 1\cdot\int \sin(g(x))\cdot g'(x)\,dx && \text{mit } g'(x)=\tfrac{2}{\cos^2(2x)}\\
&= 1\cdot\int \sin(g(x))\,dg && \text{Substitutionsregel: } dx\cdot g'(x)=\ dg\\
&= 1\cdot -\cos g && \text{integriert } (\textstyle\int \sin x = -\cos x)\\
&= -1\cdot\cos(\tan(2x)) && \text{rücksubstituiert}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

☒ $-1\cdot\cos(\tan(2x))$	2 $4\cdot\sin(\tan(2x))$	3 $4\cdot\tan(2x)$	4 $-4\cdot\cos(2x)$
5 $1\cdot\cos(\tan(2x))$	6 $1\cdot\sin(\tan(2x))$	7 $4\cdot\cos(2x)$	8 $4\cdot\ln\|\cos(2x)\|$
9 $-4\cdot\sin(\tan(2x))$	10 $1\cdot\ln\|\cos(2x)\|$	11 $4\cdot\cos(\tan(2x))$	12 $1\cdot\ln\|\sin(2x)\|$

Fehlerinterpretation:

☒	$-1\cdot\cos(\tan(2x))$	richtig
2	$4\cdot\sin(\tan(2x))$	DF: Falsch integriert
3	$4\cdot\tan(2x)$	DF: Lösung geraten
4	$-4\cdot\cos(2x)$	DF: Lösung geraten
5	$1\cdot\cos(\tan(2x))$	RF: Vorzeichen falsch
6	$1\cdot\sin(\tan(2x))$	DF: Falsch integriert
7	$4\cdot\cos(2x)$	DF: Lösung geraten
8	$4\cdot\ln\|\cos(2x)\|$	DF: Lösung geraten
9	$-4\cdot\sin(\tan(2x))$	DF: Falsch integriert
10	$1\cdot\ln\|\cos(2x)\|$	DF: Lösung geraten
11	$4\cdot\cos(\tan(2x))$	DF: Mit innerer Ableitung multipliziert
12	$1\cdot\ln\|\sin(2x)\|$	DF: Lösung geraten

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
innere	Integralrechnung	Nummer: 68 0 2004120006	Kl: 14G
Grad: 80 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.6: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad f(x)=\sqrt{x^2-32x+337}$.

Parameter:

$x_n > 0$, x_n Quadratzahlen $\quad n = 1..2$.

Die Funktion lautet: $\sqrt{x^2-\{2\cdot x_1\}\,x+\{x_1^2\ +\ x_2^2\}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 16 \qquad x_2 = 9$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der inneren Substitution integriert werden:

$$\int f(g)\ dg \quad = \quad \int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx$$

Dazu muss der Term unter der Wurzel zunächst quadratisch ergänzt werden.
Die Wurzel soll durch die Gleichung $(*)$ $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ verschwinden.
$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Das in der Rechnung entstehende $\int \cosh^2 u$ berechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \int \cosh^2 u\ du &= \tfrac{1}{4} \int e^{2u} + 2 + e^{-2u}\ du && \text{nach Definition des Kosinushyperbolikus} \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{e^{2u}}{2} + 2u + \tfrac{e^{-2u}}{-2}\right) && \text{integriert mit äußerer Substitution} \end{aligned}$$

Desweiteren wird eine Formel für die Umkehrfunktion des Sinushyperbolikus = areasinh y benötigt:

$$\begin{aligned} \sinh x = \tfrac{e^x - e^{-x}}{2} = y \quad &\Leftrightarrow \quad e^x - 2y - e^{-x} = 0 && \text{Multiplikation mit 2} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{2x} - 2y \cdot e^x - 1 = 0 && \text{Multiplikation mit } e^x \\ &\Leftrightarrow \quad u^2 - 2y \cdot u - 1 = 0 && \text{Substitution } e^x = u \\ &\Leftrightarrow \quad u_{1,2} = \tfrac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} && \text{Mitternachtsformel} \\ &\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \ln(y \pm \sqrt{y^2+1}) && \text{Rücksubstitution} \\ &\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) && \text{Der ln ist nur für positive Argumente definiert} \end{aligned}$$

Rechnung:

$$\sqrt{x^2 - 32x + 337} \quad = \quad \sqrt{(x-16)^2 - 256 + 337} \quad = \quad \sqrt{(x-16)^2 + 81} \quad = \quad 9 \cdot \sqrt{\left(\frac{x-16}{9}\right)^2 + 1}$$

Nach dieser quadratischen Ergänzung kann man die innere Substitution mit Sinushyperbolikus erkennen:
$\frac{x-16}{9} := \sinh t$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 32x + 337}\ \ dx &= \int 9 \cdot \sqrt{\left(\tfrac{x-16}{9}\right)^2 + 1}\ \ dx && \text{siehe oben} \\ &= 9 \cdot \int \sqrt{(\sinh t)^2 + 1}\ \ dx && \tfrac{x-16}{9} := \sinh t \\ &= 9 \cdot \int \sqrt{(\cosh t)^2}\ \ x' \cdot dt && (*) \text{ und innere Substitution} \\ &= 9 \cdot \int |\cosh t| \ \ \cdot 9 \cosh t \cdot dt && x' = (9 \sinh t + 16)' = 9 \cosh t \\ &= 81 \cdot \int \cosh^2 t \cdot dt && \cosh t > 0 \\ &= \tfrac{81}{4}\left(\tfrac{e^{2t}}{2} + 2t + \tfrac{e^{-2t}}{-2}\right) && \text{mit oben} \end{aligned}$$

$$t \quad = \quad \text{areasinh}\ \left(\frac{x-16}{9}\right) \quad = \quad \ln\left(\frac{x-16}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-16}{9}\right)^2 + 1}\right) \qquad \text{damit gilt:}$$

$$\begin{aligned} \int f(x) &= \tfrac{81}{4}\left(\frac{e^{2 \cdot \ln(\frac{x-16}{9} + \sqrt{(\frac{x-16}{9})^2+1})}}{2} + 2\ln\left(\tfrac{x-16}{9} + \sqrt{(\tfrac{x-16}{9})^2 + 1}\right) + \frac{e^{-2 \cdot \ln(\frac{x-16}{9} + \sqrt{(\frac{x-16}{9})^2+1})}}{-2}\right) \\ &= \tfrac{81}{4}\left(\frac{e^{\ln\left((\frac{x-16}{9} + \sqrt{(\frac{x-16}{9})^2+1})^2\right)}}{2} + 2\ln\left(\tfrac{x-16}{9} + \sqrt{(\tfrac{x-16}{9})^2 + 1}\right) + \frac{e^{\ln\left((\frac{x-16}{9} + \sqrt{(\frac{x-16}{9})^2+1})^{-2}\right)}}{-2}\right) \\ &= \tfrac{81}{8}\left(\left(\tfrac{x-16}{9} + \sqrt{(\tfrac{x-16}{9})^2 + 1}\right)^2 + 4\ln\left(\tfrac{x-16}{9} + \sqrt{(\tfrac{x-16}{9})^2 + 1}\right) - \left(\tfrac{x-16}{9} + \sqrt{(\tfrac{x-16}{9})^2 + 1}\right)^{-2}\right) \end{aligned}$$

Anmerkung des Verfassers:
Wenn ich gewusst hätte, was da rauskommt, hätte ich die Aufgabe wohl lieber gelassen, aber jetzt ist sie schon fertig – viel Spaß beim weiter Vereinfachen und Fehlersuchen. Alle falschen Lösungen sind willkürliche Schätzungen. Es liegt kein spezieller Fehler zu Grunde.

Angebotene Lösungen:

- ☒ $\frac{81}{8}\left((\frac{x-16}{9}+\sqrt{(\frac{x-16}{9})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-16}{9}+\sqrt{(\frac{x-16}{9})^2+1})-(\frac{x-16}{9}+\sqrt{(\frac{x-16}{9})^2+1})^{-2}\right)$
- [2] $\ln(\frac{x^2-32x+337}{9})$
- [3] $\operatorname{arcsinh}(\sqrt{(\frac{x-16}{9})^2+1})$
- [4] $(\frac{2\cdot(x^2-32x+337)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-32)})$
- [5] $\arcsin(\frac{x^2-32x+337}{9})$
- [6] $\arcsin(\frac{x-16}{9})$
- [7] $\operatorname{areasinh}(\frac{x-16}{9}) + (\frac{2\cdot(x^2-32x+337)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-32)})$
- [8] $\frac{x^2}{2}-\frac{64}{3}x+337$
- [9] $\operatorname{areasinh}(\frac{x-16}{9})$
- [10] $\arcsin(\sqrt{(\frac{x-16}{9})^2+1})$
- [11] $\frac{\ln(x^2-32x+337)}{9}$
- [12] $\frac{\sqrt{(\frac{x-16}{9})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-16}{9}+\sqrt{(\frac{x-16}{9})^2+1})-(\frac{x-16}{9}+\sqrt{(\frac{x-16}{9})^2+1})^{-2}}{8}$

Fehlerinterpretation:

☒	$\frac{81}{8}\left((\frac{x-16}{9}+\sqrt{(\frac{x-16}{9})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-16}{9}+\sqrt{(\frac{x-16}{9})^2+1})-(\frac{x-16}{9}+\sqrt{(\frac{x-16}{9})^2+1})^{-2}\right)$	richtig
2	$\ln(\frac{x^2-32x+337}{9})$	DF: 10
3	$\operatorname{arcsinh}(\sqrt{(\frac{x-16}{9})^2+1})$	DF: 9
4	$(\frac{2\cdot(x^2-32x+337)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-32)})$	DF: 3
5	$\arcsin(\frac{x^2-32x+337}{9})$	DF: 11
6	$\arcsin(\frac{x-16}{9})$	DF: 2
7	$\operatorname{areasinh}(\frac{x-16}{9}) + (\frac{2\cdot(x^2-32x+337)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-32)})$	DF: 7
8	$\frac{x^2}{2}-\frac{64}{3}x+337$	DF: 4
9	$\operatorname{areasinh}(\frac{x-16}{9})$	DF: 1
10	$\arcsin(\sqrt{(\frac{x-16}{9})^2+1})$	DF: 8
11	$\frac{\ln(x^2-32x+337)}{9}$	DF: 5
12	$\frac{\sqrt{(\frac{x-16}{9})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-16}{9}+\sqrt{(\frac{x-16}{9})^2+1})-(\frac{x-16}{9}+\sqrt{(\frac{x-16}{9})^2+1})^{-2}}{8}$	DF: 6

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu