Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 12

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 4 0 2004120003	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.1: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : [0, \frac{\pi}{12}) \to \mathbb{R} \quad f(x) = 2 \cdot \frac{\sin(\tan(6\,x))}{\cos^2(6\,x)}$.

Parameter:

x_n = Faktoren der Funktion, $x_n > 0, \;\; n = 1..2.$

Die Funktion lautet: $x_1 \cdot \frac{\sin(\tan(x_2\,x))}{\cos^2(x_2\,x)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \qquad x_2 = 6$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der äußeren Substitution integriert werden:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\;dx \quad = \quad \int f(g)\;dg$$

Beachten Sie dabei, dass gilt:

$$\begin{aligned}
(\tan(ax))' &= \left(\frac{\sin(ax)}{\cos(ax)}\right)' && \text{Definition des Tangens}\\
&= \frac{a\cos(ax)\cdot\cos(ax) - \sin(ax)\cdot(-a\sin(ax))}{\cos^2(ax)} && \text{Quotientenregel}\\
&= \frac{a(\cos^2(ax)+\sin^2(ax))}{\cos^2(ax)} && \text{zusammengefasst}\\
&= \frac{a}{\cos^2(ax)} && \cos^2 x + \sin^2 x = 1
\end{aligned}$$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int 2 \cdot \frac{\sin(\tan(6\,x))}{\cos^2(6\,x)}\;dx &= 2 \cdot \int \frac{\sin(g(x))}{\cos^2(6\,x)}\;dx && \text{mit } g(x) = \tan(6\,x)\\
&= \frac{2}{6} \cdot \int \sin(g(x)) \cdot \frac{6}{\cos^2(6\,x)}\;dx && \text{Erzeugung der inneren Ableitung}\\
&= \frac{1}{3} \cdot \int \sin(g(x)) \cdot g'(x)\;dx && \text{mit } g'(x) = \frac{6}{\cos^2(6\,x)}\\
&= \frac{1}{3} \cdot \int \sin(g(x))\;dg && \text{Substitutionsregel: } dx \cdot g'(x) = \;dg\\
&= \frac{1}{3} \cdot -\cos g && \text{integriert } (\textstyle\int \sin x = -\cos x)\\
&= -\frac{1}{3} \cdot \cos(\tan(6\,x)) && \text{rücksubstituiert}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

☐ 1 $-\frac{1}{3} \cdot \sin(\tan(6\,x))$	☐ 2 $-12 \cdot \cos(6\,x)$	☐ 3 $-\frac{1}{3} \cdot \sin(6\,x)$	☐ 4 $-12 \cdot \cos(\tan(6\,x))$
☒ $-\frac{1}{3} \cdot \cos(\tan(6\,x))$	☐ 6 $\frac{1}{3} \cdot \cos(\tan(6\,x))$	☐ 7 $12 \cdot \tan(6\,x)$	☐ 8 $12 \cdot \ln\lvert\cos(6\,x)\rvert$
☐ 9 $\frac{1}{3} \cdot \ln\lvert\sin(6\,x)\rvert$	☐ 10 $12 \cdot \sin(\tan(6\,x))$	☐ 11 $\frac{1}{3} \cdot \sin(\tan(6\,x))$	☐ 12 $-12 \cdot \sin(\tan(6\,x))$

Fehlerinterpretation:

1	$-\frac{1}{3}\cdot\sin(\tan(6\,x))$	DF: Falsch integriert
2	$-12\cdot\cos(6\,x)$	DF: Lösung geraten
3	$-\frac{1}{3}\cdot\sin(6\,x)$	DF: Lösung geraten
4	$-12\cdot\cos(\tan(6\,x))$	DF: Mit innerer Ableitung multipliziert
☒	$-\frac{1}{3}\cdot\cos(\tan(6\,x))$	richtig
6	$\frac{1}{3}\cdot\cos(\tan(6\,x))$	RF: Vorzeichen falsch
7	$12\cdot\tan(6\,x)$	DF: Lösung geraten
8	$12\cdot\ln\lvert\cos(6\,x)\rvert$	DF: Lösung geraten
9	$\frac{1}{3}\cdot\ln\lvert\sin(6\,x)\rvert$	DF: Lösung geraten
10	$12\cdot\sin(\tan(6\,x))$	DF: Falsch integriert
11	$\frac{1}{3}\cdot\sin(\tan(6\,x))$	DF: Falsch integriert
12	$-12\cdot\sin(\tan(6\,x))$	DF: Falsch integriert

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 14 0 2004120001	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.2: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad f(x)=5\cdot(3\cdot x-5)^6$

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n>0,\;\; n=1..4,\;\; x_3>x_2$

Die Funktion lautet: $x_1\cdot(x_2\cdot x\,-\,x_3)^{x_4}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=5\quad x_2=3\quad x_3=5\quad x_4=6$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit linearer Substitution und der Potenzregel integriert werden:

$$\int x^n\,dx \;=\; \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{und} \qquad \int f(ax+b)\,dx \;=\; \frac{F(ax+b)}{a} \quad \text{wenn} \int f(x)\,dx=F(x)\;.$$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int 5\cdot(3\cdot x-5)^6dx &= 5\cdot\int(3\cdot x-5)^6dx && \text{Linearität des Integrals}\\
&= 5\cdot\int(g(x))^6dx && \text{mit } g(x)=3\cdot x-5\\
&= 5\cdot\int g^6\,\tfrac{dg}{g'} && \text{lineare Substitution}\\
&= 5\cdot\tfrac{g^{6+1}}{6+1}\cdot\tfrac{1}{3} && \text{Potenzregel}\\
&= \tfrac{5}{21}\cdot(3\cdot x-5)^7 && \text{Rücksubstitution}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

☒ $\frac{5}{21}\cdot(3\cdot x-5)^7$	2 $\frac{5\cdot(3\cdot x)^7}{21}-25x$	3 $\frac{1}{7}\cdot(3\cdot x-5)^7$	4 $\frac{15}{7}\cdot(3\cdot x-5)^7$
5 $\frac{5\cdot(3\cdot x)^7}{21}-5\cdot5^6x$	6 $90\cdot(3\cdot x-5)^5$	7 $\frac{5\cdot(3\cdot x)^6}{6}-5\cdot5^6x$	8 $\frac{5}{3}\cdot(3\cdot x-5)^6$
9 $\frac{5\cdot(3\cdot x)^5}{15}-5\cdot5^6x$	10 $\frac{5\cdot(3\cdot x)^7}{7}-5\cdot5^6x$	11 $10\cdot(3\cdot x-5)^6$	12 $7\cdot(3\cdot x-5)^7$

Fehlerinterpretation:

☒	$\frac{5}{21} \cdot (3 \cdot x - 5)^7$	richtig
2	$\frac{5 \cdot (3 \cdot x)^7}{21} - 25x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
3	$\frac{1}{7} \cdot (3 \cdot x - 5)^7$	DF: Falsche innere Ableitung
4	$\frac{15}{7} \cdot (3 \cdot x - 5)^7$	DF: Mit innerer Ableitung multipliziert
5	$\frac{5 \cdot (3 \cdot x)^7}{21} - 5 \cdot 5^6 x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
6	$90 \cdot (3 \cdot x - 5)^5$	DF: Abgeleitet
7	$\frac{5 \cdot (3 \cdot x)^6}{6} - 5 \cdot 5^6 x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
8	$\frac{5}{3} \cdot (3 \cdot x - 5)^6$	DF: Integration vergessen
9	$\frac{5 \cdot (3 \cdot x)^5}{15} - 5 \cdot 5^6 x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
10	$\frac{5 \cdot (3 \cdot x)^7}{7} - 5 \cdot 5^6 x$	DF: Binomische Formel nicht angewendet
11	$10 \cdot (3 \cdot x - 5)^6$	DF: Integration vergessen
12	$7 \cdot (3 \cdot x - 5)^7$	DF: Falsche innere Ableitung

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 44 0 2004120002	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.3: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = 3 \cdot \sin(3\,x) \cdot e^{4 \cdot \cos(3\,x)}$

Parameter:

x_n = Faktoren der Funktion, $x_n > 0, \;\; n = 1..3$.

Die Funktion lautet: $x_1 \cdot \sin(x_2\,x) \cdot e^{x_3 \cdot \cos(x_2\,x)}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \qquad x_2 = 3 \qquad x_3 = 4$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der äußeren Substitution integriert werden:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\; dx \quad = \quad \int f(g)\; dg$$

Beachten Sie dabei, dass $(\cos(ax))' = -a \sin(ax)$ ist.

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int 3 \cdot \sin(3\,x) \cdot e^{4 \cdot \cos(3\,x)}\; dx &= 3 \cdot \int \sin(3\,x) \cdot e^{4 \cdot \cos(3\,x)}\; dx && \text{Linearität des Integrals} \\
&= 3 \cdot \int \sin(3\,x) \cdot e^{g(x)}\; dx && \text{mit } g(x) = 4 \cdot \cos(3\,x) \\
&= -3 \cdot \int \tfrac{-4 \cdot 3 \cdot \sin(3\,x)}{4 \cdot 3} \cdot e^{g(x)}\; dx && \text{Erzeugung der inneren Ableitung} \\
&= -3 \cdot \int \tfrac{g'(x)}{12} \cdot e^{g(x)}\; dx && g'(x) = -4 \cdot 3 \cdot \sin(3\,x) \\
&= -\tfrac{3}{12} \cdot \int e^{g}\; dg && \text{Substitutionsregel: } dx \cdot g'(x) = \; dg \\
&= -\tfrac{1}{4} \cdot e^{g} && \text{integriert } (\textstyle\int e^x = e^x) \\
&= -\tfrac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot \cos(3\,x)} && \text{rücksubstituiert}
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\;1 \cdot \cos(3\,x) \cdot e^{4x}$	2 $\;\frac{9}{4} \cdot e^{4 \cdot \cos(3\,x)}$	3 $\;-\frac{9}{4} \cdot e^{4 \cdot \cos(3\,x)}$	4 $\;-4 \cdot \cos(3\,x) \cdot e^{x}$
5 $\;1 \cdot \sin(3\,x) \cdot e^{4 \cdot \cos(3\,x)}$	☒ $\;-\frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot \cos(3\,x)}$	7 $\;4 \cdot e^{3\,x} \cdot \cos x$	8 $\;-1 \cdot \sin(3\,x) \cdot e^{4 \cdot \cos(3\,x)}$
9 $\;4 \cdot \cos(3\,x) \cdot e^{x}$	10 $\;\frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot \cos(3\,x)}$	11 $\;-1 \cdot \cos(3\,x) \cdot e^{4x}$	12 $\;4 \cdot e^{4 \cdot \cos(3\,x)}$

Fehlerinterpretation:

1	$1 \cdot \cos(3\,x) \cdot e^{4x}$	DF: Lösung geraten
2	$\frac{9}{4} \cdot e^{4\cdot\cos(3\,x)}$	DF: Falsch substituiert
3	$-\frac{9}{4} \cdot e^{4\cdot\cos(3\,x)}$	DF: Falsch substituiert
4	$-4 \cdot \cos(3\,x) \cdot e^{x}$	DF: Lösung geraten
5	$1 \cdot \sin(3\,x) \cdot e^{4\cdot\cos(3\,x)}$	DF: Lösung geraten
☒	$-\frac{1}{4} \cdot e^{4\cdot\cos(3\,x)}$	richtig
7	$4 \cdot e^{3\,x} \cdot \cos x$	DF: Lösung geraten
8	$-1 \cdot \sin(3\,x) \cdot e^{4\cdot\cos(3\,x)}$	DF: Lösung geraten
9	$4 \cdot \cos(3\,x) \cdot e^{x}$	DF: Lösung geraten
10	$\frac{1}{4} \cdot e^{4\cdot\cos(3\,x)}$	RF: falsches Vorzeichen
11	$-1 \cdot \cos(3\,x) \cdot e^{4x}$	DF: Lösung geraten
12	$4 \cdot e^{4\cdot\cos(3\,x)}$	DF: Falsch substituiert

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
Produktregel	Integralrechnung	Nummer: 68 0 2004120004	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.4: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : [0, \frac{1}{7}] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{16 - 784 \cdot x^2}$.

Parameter:

x_n = geloste Zahlen, $x_n > 0, \;\; n = 1..2.$ $x_3 := x_1^2$, $x_4 := x_3 \cdot x_2^2$

Die Funktion lautet: $\sqrt{x_3 \; - \; x_4 \cdot x^2}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \qquad x_2 = 7 \qquad x_3 = 16 \qquad x_4 = 784$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der inneren Substitution integriert werden:

$$\int f(g)\;dg \quad = \quad \int f(g(x)) \cdot g'(x)\;dx$$

Dabei soll die Wurzel durch die Gleichung $(*)$ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ verschwinden.

Das in der Rechnung entstehende $\int \sin^2 x$ berechnen wir wie folgt:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \int & \sin x & \cdot & \sin x & = & -\cos x & \cdot & \sin x & - & \int & -\cos x & \cdot & \cos x \\ \int & u' & \cdot & v & = & u & \cdot & v & - & \int & u & \cdot & v' \;. \end{array} .$$

Dies ist aber nur scheinbar 'im Kreis' gerechnet:

$$\begin{array}{rcll} \int \sin^2 x & = & -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x & \text{siehe oben} \\ & = & -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x) & \text{mit Formel } (*) \\ & = & -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x & \text{Linearität des Integrals} \end{array}$$

Addition von $\int \sin^2 x$ ergibt:

$$2 \cdot \int \sin^2 x = x - \cos x \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad \int \sin^2 x = \frac{x - \cos x \cdot \sin x}{2}.$$

In der Rechnung entsteht weiterhin ein Ausdruck der Form $\sin(\arccos x)$. Diesen Ausdruck berechnen wir wie folgt: Sei $y = \arccos x$, dann gilt:

$$\begin{array}{rll} \sin y & = (\pm)\sqrt{1 - \cos^2 y} & \text{nach Formel } (*) \\ & = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} & y = \arccos x \\ & = \sqrt{1 - x^2} & \cos(\arccos x) = x \quad . \end{array}$$

Damit ist $\sin(\arccos x) = (\pm)\sqrt{1 - x^2}$.

Rechnung:

Zuerst klammern wir 16 aus: $\sqrt{16-784\cdot x^2} \;=\; \sqrt{16\cdot(1-49\cdot x^2)} \;=\; 4\cdot\sqrt{1-49\cdot x^2}$.
Jetzt substituieren wir $x(t) := \frac{\cos t}{7}$, t kann im Bereich von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ gewählt werden.

$$
\begin{aligned}
\int 4\cdot\sqrt{1-49\cdot x^2}\,dx &= \int 4\cdot\sqrt{1-49\cdot(\tfrac{\cos t}{7})^2}\,dx && \text{Substitution}\\
&= 4\cdot\int\sqrt{1-\cos^2 t}\;\cdot x'\cdot dt && \text{mit } dx \;=\; x'\cdot dt\\
&= 4\cdot\int\sqrt{\sin^2 t}\;\cdot\tfrac{-\sin t}{7}\cdot dt && x' \;=\; \tfrac{-\sin t}{7}\\
&= 4\cdot\int|\sin t|\cdot\tfrac{-\sin t}{7}\cdot dt\\
&= \tfrac{4}{7}\cdot\int\sin^2 t\cdot dt && \text{t} \in [0,\tfrac{\pi}{2}]\\
&= -\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{t-\cos t\cdot\sin t}{2} && \text{siehe oben}\\
&= -\tfrac{2}{7}\cdot(\arccos(7\,x)-\cos\arccos(7\,x)\cdot\sin\arccos(7\,x)) && t=\arccos(7\,x)\\
&= -\tfrac{2}{7}\cdot(\arccos(7\,x)-7\,x\cdot\sqrt{1-(7\,x)^2}) && \sin(\arccos(7\,x))=\sqrt{1-(7\,x)^2}
\end{aligned}
$$

Angebotene Lösungen:

1	$\frac{8\cdot(1^{3/2}-49\cdot x^3)}{6x}$	2	$\frac{8\cdot(1-49\cdot x^2)^{3/2}}{6x}$
3	$4x+14\cdot x^2$	4	$\frac{2}{7}\cdot(7\,x\cdot\sqrt{1-(7\,x)^2}-\ \text{areaccosh}\,(7\,x))$
5	$14\cdot\frac{x}{\sqrt{1-(7\,x)^2}}$	☒	$\frac{2}{7}\cdot(7\,x\cdot\sqrt{1-(7\,x)^2}-\arccos(7\,x))$
7	$\frac{4}{7}\cdot(\arccos(7\,x))$	8	$\frac{4}{7}\cdot(x\cdot\sqrt{1-7^2\,x^2}-7\arccos x)$
9	$\frac{4}{7}\cdot(\ \text{areaccosh}\,(7\,x)\,)$	10	$3\cdot\frac{(1+49\cdot x^2)^{3/2}}{x}$
11	$\frac{8}{7}\cdot(x\cdot\sqrt{1-(7\,x)^2}-7\ \ \text{areaccosh}\,x)$	12	162

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{8\cdot(1^{3/2}-49\cdot x^3)}{6x}$	DF: Falsche Substitution
2	$\frac{8\cdot(1-49\cdot x^2)^{3/2}}{6x}$	DF: Falsche Substitution
3	$4x+14\cdot x^2$	DF: Wurzelrechnung falsch
4	$\frac{2}{7}\cdot(7\,x\cdot\sqrt{1-(7\,x)^2}-\ \text{areaccosh}\,(7\,x))$	DF: Falsche Substitution
5	$14\cdot\frac{x}{\sqrt{1-(7\,x)^2}}$	DF: Funktion abgeleitet
☒	$\frac{2}{7}\cdot(7\,x\cdot\sqrt{1-(7\,x)^2}-\arccos(7\,x))$	richtig
7	$\frac{4}{7}\cdot(\arccos(7\,x))$	DF: Antwort geraten
8	$\frac{4}{7}\cdot(x\cdot\sqrt{1-7^2\,x^2}-7\arccos x)$	RF: Viele falsche Faktoren
9	$\frac{4}{7}\cdot(\ \text{areaccosh}\,(7\,x)\,)$	DF: Antwort geraten
10	$3\cdot\frac{(1+49\cdot x^2)^{3/2}}{x}$	DF: Falsche Substitution
11	$\frac{8}{7}\cdot(x\cdot\sqrt{1-(7\,x)^2}-7\ \ \text{areaccosh}\,x)$	DF: Falsche Substitution
12	162	GL: geratene Lösung

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
Produktregel	Integralrechnung	Nummer: 84 0 2004120005	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.5: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad f(x)=(7\,x-9)\cdot e^{7\,x+5}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n>0$, $\;n=1..4\;x_2>x_1$.

Die Funktion lautet: $(7\,x-9)\cdot e^{7\,x+5}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7 \quad x_2 = 9 \quad x_3 = 7 \quad x_4 = 5.$

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der Produktregel integriert werden:

$$\int u' \cdot v \quad = \quad u \cdot v - \int u \cdot v'.$$

Dabei ist u normalerweise die $e-$ Funktion und v das Polynom.
Die Faktoren werden unter anderem mit linearer Substitution integriert: $\int e^{ax+b} = \frac{e^{ax+b}}{a}$.

Rechnung:

Die Rollenverteilung ist:
$$\begin{array}{lllllll} u' & = & e^{7\,x+5} & \Rightarrow & u & = & \frac{e^{7\,x+5}}{7} \\ v & = & 7\,x-9 & \Rightarrow & v' & = & 7 \quad . \end{array}$$

Damit gilt

$$\begin{array}{llllllllllll} \int & (7\,x-9) & \cdot & e^{7\,x+5} & = & (7\,x-9) & \cdot & \frac{e^{7\,x+5}}{7} & - & \int & 7 & \cdot & \frac{e^{7\,x+5}}{7} \\ \int & v & \cdot & u' & = & v & \cdot & u & - & \int & v' & \cdot & u \\ & & & & = & \frac{7\cdot 7\,x-9\cdot 7}{7\cdot 7} & \cdot & e^{7\,x+5} & - & & 7 & \cdot & \frac{e^{7\,x+5}}{7\cdot 7} \\ & & & & = & \frac{49\,x-70}{49} & \cdot & e^{7\,x+5} \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{49\,x-70}{294} \cdot e^{8\,x+6}$	2 $\frac{7\,x^2-9x}{84} \cdot e^{8\,x+6}$	3 $(49\,x-16) \cdot e^{7\,x+5}$	4 $(\frac{7}{2}x^2-9x) \cdot e^{\frac{7}{2}\,x^2+5x}$
5 $\frac{7\,x^2-9x}{84} \cdot e^{8\,x+5}$	6 $\frac{49\,x-70}{294} \cdot e^{8\,x+5}$	☒ $\frac{49\,x-70}{49} \cdot e^{7\,x+5}$	8 $\frac{49\,x+70}{49} \cdot e^{7\,x+5}$
9 $\frac{49\,x-70}{294} \cdot e^{7\,x+6}$	10 $\frac{49\,x+70}{49} \cdot e^{7\,x+6}$	11 $\frac{7\,x^2-9x}{84} \cdot e^{7\,x+6}$	12 $(\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{7}x) \cdot e^{7\,x+5}$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{49\,x-70}{294} \cdot e^{8\,x+6}$	DF: Falsch integriert
2	$\frac{7\,x^2-9x}{84} \cdot e^{8\,x+6}$	DF: Falsch integriert
3	$(49\,x-16) \cdot e^{7\,x+5}$	DF: Abgeleitet
4	$(\frac{7}{2}x^2-9x) \cdot e^{\frac{7}{2}\,x^2+5x}$	DF: Falsch integriert
5	$\frac{7\,x^2-9x}{84} \cdot e^{8\,x+5}$	DF: Falsch integriert
6	$\frac{49\,x-70}{294} \cdot e^{8\,x+5}$	DF: Falsch integriert
☒	$\frac{49\,x-70}{49} \cdot e^{7\,x+5}$	richtig
8	$\frac{49\,x+70}{49} \cdot e^{7\,x+5}$	DF: Falsch integriert
9	$\frac{49\,x-70}{294} \cdot e^{7\,x+6}$	DF: Falsch integriert
10	$\frac{49\,x+70}{49} \cdot e^{7\,x+6}$	DF: Falsch integriert
11	$\frac{7\,x^2-9x}{84} \cdot e^{7\,x+6}$	DF: Falsch integriert
12	$(\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{7}x) \cdot e^{7\,x+5}$	DF: Falsch integriert

MV 04	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
innere	Integralrechnung	Nummer: 100 0 2004120006	Kl: 14G
Grad: 80 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 12.1.6: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 18x + 162}$.

Parameter:

$x_n > 0$, x_n Quadratzahlen $\quad n = 1..2$.

Die Funktion lautet: $\sqrt{x^2 - \{2 \cdot x_1\}\,x + \{x_1^2 \,+\, x_2^2\}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 9 \qquad x_2 = 9$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit der inneren Substitution integriert werden:

$$\int f(g)\ dg \quad = \quad \int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx$$

Dazu muss der Term unter der Wurzel zunächst quadratisch ergänzt werden.
Die Wurzel soll durch die Gleichung $(*)$ $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ verschwinden.
$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Das in der Rechnung entstehende $\int \cosh^2 u$ berechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \int \cosh^2 u\ du &= \tfrac{1}{4} \int e^{2u} + 2 + e^{-2u}\ du && \text{nach Definition des Kosinushyperbolikus} \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{e^{2u}}{2} + 2u + \tfrac{e^{-2u}}{-2}\right) && \text{integriert mit äußerer Substitution} \end{aligned}$$

Desweiteren wird eine Formel für die Umkehrfunktion des Sinushyperbolikus = areasinh y benötigt:

$$\begin{aligned} \sinh x = \tfrac{e^x - e^{-x}}{2} = y \quad &\Leftrightarrow \quad e^x - 2y - e^{-x} = 0 && \text{Multiplikation mit 2} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{2x} - 2y \cdot e^x - 1 = 0 && \text{Multiplikation mit } e^x \\ &\Leftrightarrow \quad u^2 - 2y \cdot u - 1 = 0 && \text{Substitution } e^x = u \\ &\Leftrightarrow \quad u_{1,2} = \tfrac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} && \text{Mitternachtsformel} \\ &\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \ln(y \pm \sqrt{y^2+1}) && \text{Rücksubstitution} \\ &\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) && \text{Der ln ist nur für positive Argumente definiert} \end{aligned}$$

Rechnung:

$$\sqrt{x^2 - 18x + 162} \quad = \quad \sqrt{(x-9)^2 - 81 + 162} \quad = \quad \sqrt{(x-9)^2 + 81} \quad = \quad 9 \cdot \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}$$

Nach dieser quadratischen Ergänzung kann man die innere Substitution mit Sinushyperbolikus erkennen:
$\frac{x-9}{9} := \sinh t$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 18x + 162}\ dx &= \int 9 \cdot \sqrt{\left(\tfrac{x-9}{9}\right)^2 + 1}\ dx && \text{siehe oben} \\ &= 9 \cdot \int \sqrt{(\sinh t)^2 + 1}\ dx && \tfrac{x-9}{9} := \sinh t \\ &= 9 \cdot \int \sqrt{(\cosh t)^2}\ x' \cdot dt && (*) \text{ und innere Substitution} \\ &= 9 \cdot \int |\cosh t| \ \cdot 9 \cosh t \cdot dt && x' = (9 \sinh t + 9)' = 9 \cosh t \\ &= 81 \cdot \int \cosh^2 t \cdot dt && \cosh t > 0 \\ &= \tfrac{81}{4}\left(\tfrac{e^{2t}}{2} + 2t + \tfrac{e^{-2t}}{-2}\right) && \text{mit oben} \end{aligned}$$

$$t \quad = \quad \text{areasinh}\left(\frac{x-9}{9}\right) \quad = \quad \ln\left(\frac{x-9}{9} + \sqrt{\left(\frac{x-9}{9}\right)^2 + 1}\right) \qquad \text{damit gilt:}$$

$$\begin{aligned} \int f(x) &= \tfrac{81}{4}\left(\frac{e^{2 \cdot \ln(\frac{x-9}{9} + \sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})}}{2} + 2\ln(\tfrac{x-9}{9} + \sqrt{(\tfrac{x-9}{9})^2 + 1}) + \frac{e^{-2 \cdot \ln(\frac{x-9}{9} + \sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})}}{-2}\right) \\ &= \tfrac{81}{4}\left(\frac{e^{\ln\left((\frac{x-9}{9} + \sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})^2\right)}}{2} + 2\ln(\tfrac{x-9}{9} + \sqrt{(\tfrac{x-9}{9})^2 + 1}) + \frac{e^{\ln\left((\frac{x-9}{9} + \sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})^{-2}\right)}}{-2}\right) \\ &= \tfrac{81}{8}\left((\tfrac{x-9}{9} + \sqrt{(\tfrac{x-9}{9})^2 + 1})^2 + 4\ln(\tfrac{x-9}{9} + \sqrt{(\tfrac{x-9}{9})^2 + 1}) - (\tfrac{x-9}{9} + \sqrt{(\tfrac{x-9}{9})^2 + 1})^{-2}\right) \end{aligned}$$

Anmerkung des Verfassers:
Wenn ich gewusst hätte, was da rauskommt, hätte ich die Aufgabe wohl lieber gelassen, aber jetzt ist sie schon fertig – viel Spaß beim weiter Vereinfachen und Fehlersuchen. Alle falschen Lösungen sind willkürliche Schätzungen. Es liegt kein spezieller Fehler zu Grunde.

Angebotene Lösungen:

- ☐ 1 $\arcsin\left(\frac{x^2-18x+162}{9}\right)$
- ☐ 2 $\operatorname{areasinh}\left(\frac{x-9}{9}\right)$
- ☒ $\frac{81}{8}\left((\frac{x-9}{9}+\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-9}{9}+\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})-(\frac{x-9}{9}+\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})^{-2}\right)$
- ☐ 4 $\frac{\ln(x^2-18x+162)}{9}$
- ☐ 5 $\frac{x^2}{2}-12x+162$
- ☐ 6 $\arcsin\left(\frac{x-9}{9}\right)$
- ☐ 7 $\left(\frac{2\cdot(x^2-18x+162)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-18)}\right)$
- ☐ 8 $\frac{\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-9}{9}+\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})-(\frac{x-9}{9}+\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})^{-2}}{8}$
- ☐ 9 $\ln\left(\frac{x^2-18x+162}{9}\right)$
- ☐ 10 $\arcsin\left(\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1}\right)$
- ☐ 11 $\operatorname{areasinh}\left(\frac{x-9}{9}\right)+\left(\frac{2\cdot(x^2-18x+162)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-18)}\right)$
- ☐ 12 $\operatorname{arcsinh}\left(\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1}\right)$

Fehlerinterpretation:

☐ 1	$\arcsin\left(\frac{x^2-18x+162}{9}\right)$	DF: 11
☐ 2	$\operatorname{areasinh}\left(\frac{x-9}{9}\right)$	DF: 1
☒	$\frac{81}{8}\left((\frac{x-9}{9}+\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-9}{9}+\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})-(\frac{x-9}{9}+\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})^{-2}\right)$	richtig
☐ 4	$\frac{\ln(x^2-18x+162)}{9}$	DF: 5
☐ 5	$\frac{x^2}{2}-12x+162$	DF: 4
☐ 6	$\arcsin\left(\frac{x-9}{9}\right)$	DF: 2
☐ 7	$\left(\frac{2\cdot(x^2-18x+162)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-18)}\right)$	DF: 3
☐ 8	$\frac{\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})^2+4\ln(\frac{x-9}{9}+\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})-(\frac{x-9}{9}+\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1})^{-2}}{8}$	DF: 6
☐ 9	$\ln\left(\frac{x^2-18x+162}{9}\right)$	DF: 10
☐ 10	$\arcsin\left(\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1}\right)$	DF: 8
☐ 11	$\operatorname{areasinh}\left(\frac{x-9}{9}\right)+\left(\frac{2\cdot(x^2-18x+162)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(2x-18)}\right)$	DF: 7
☐ 12	$\operatorname{arcsinh}\left(\sqrt{(\frac{x-9}{9})^2+1}\right)$	DF: 9

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu