

**Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 13**

MV 05                      Blatt 03                      Kapitel 3.1                      Grenzwerte  
Keine                      Folgen                      Nummer: 23 0 2005030008      Kl: 14G  
Grad: 50 Zeit: 20      Quelle: keine      W

**Aufgabe 13.1.1:** Gegeben sei die Folge  $a_n = \frac{28+4n}{n+2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Finden Sie den Grenzwert  $a$  von  $a_n$  und finden Sie für alle  $0 < \varepsilon < 1$  das minimale  $m$  (abhängig von  $\varepsilon$ ), für das  $|a_m - a| \leq \varepsilon$  gilt. Bitte beachten Sie, dass  $\lceil x \rceil$  die Zahl  $z \in \mathbb{Z}$  ist, für die gilt  $z \geq x$  und  $z$  minimal.

**Parameter:**

$x_1, x_2, x_3 =$  Elemente des Bruches,  $x_3 =$  Grenzwert  $x_1 \geq 2 \cdot x_2$

Die Folge lautet also:  $a_n = \frac{\{x_3 \cdot x_1\} + x_3 n}{n + x_2}$

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 7$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 4$ .

**Erklärung:**

$$\frac{a(n+b)}{n+c} \rightarrow a \quad \text{der Rest ist Rechnen mit Beträgen}$$

**Rechnung:**

$$\frac{4n+28}{n+2} = 4 + \frac{5}{n+2}$$

also ist 4 der Grenzwert und es muss gelten  $|a_n - a| = |4 + \frac{5}{n+2} - 4| = \frac{5}{n+2} \leq \varepsilon$ .

$$\frac{5}{n+2} \leq \varepsilon \Leftrightarrow 5 \leq \varepsilon(n+2) \Leftrightarrow \frac{5}{\varepsilon} - 2 \leq n$$

Damit ist  $\frac{5}{\varepsilon} - 2$  das maximale  $m$ , für das die Bedingung  $|a_m - a| \leq \varepsilon$  gilt.

**Angebotene Lösungen:**

- |                            |   |  |   |                             |   |                             |   |
|----------------------------|---|--|---|-----------------------------|---|-----------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> 1 | $m = \lceil \frac{7}{\varepsilon} \rceil$     | <input type="checkbox"/> 2             | $m = \lceil \frac{\varepsilon}{2} \rceil$     | <input type="checkbox"/> 3  | $m = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$     | <input type="checkbox"/> 4  | $m = \lceil \frac{9}{\varepsilon} - 2 \rceil$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | Folge divergiert                              | <input type="checkbox"/> 6             | $m = \lceil \frac{1}{\varepsilon} - 7 \rceil$ | <input type="checkbox"/> 7  | $m = \lceil \frac{7}{\varepsilon} - 7 \rceil$ | <input type="checkbox"/> 8  | $m = \lceil \frac{7}{\varepsilon} \rceil$     |
| <input type="checkbox"/> 9 | $m = \lceil \frac{9}{\varepsilon} - 7 \rceil$ | <input checked="" type="checkbox"/> 10 | $m = \lceil \frac{5}{\varepsilon} - 2 \rceil$ | <input type="checkbox"/> 11 | $m = \lceil \varepsilon \rceil$               | <input type="checkbox"/> 12 | $m = \lceil \frac{9}{\varepsilon} \rceil$     |

**Fehlerinterpretation:**

- |  |   |                    |
|--|---|--------------------|
| <input type="checkbox"/> 1             | $m = \lceil \frac{7}{\varepsilon} \rceil$     | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 2             | $m = \lceil \frac{\varepsilon}{2} \rceil$     | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 3             | $m = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$     | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 4             | $m = \lceil \frac{9}{\varepsilon} - 2 \rceil$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 5             | Folge divergiert                              | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 6             | $m = \lceil \frac{1}{\varepsilon} - 7 \rceil$ | DF: 7 abgezogen    |
| <input type="checkbox"/> 7             | $m = \lceil \frac{7}{\varepsilon} - 7 \rceil$ | DF: 7 abgezogen    |
| <input type="checkbox"/> 8             | $m = \lceil \frac{7}{\varepsilon} \rceil$     | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 9             | $m = \lceil \frac{9}{\varepsilon} - 7 \rceil$ | DF: Lösung geraten |
| <input checked="" type="checkbox"/> 10 | $m = \lceil \frac{5}{\varepsilon} - 2 \rceil$ | richtig            |
| <input type="checkbox"/> 11            | $m = \lceil \varepsilon \rceil$               | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 12            | $m = \lceil \frac{9}{\varepsilon} \rceil$     | DF: Lösung geraten |

MV 05                      Blatt 04                      Kapitel 3.3                      Reihenwerte  
Reihen                      Folgen                      Nummer: 29 0 200504011      Kl: 14G  
Grad: 50 Zeit: 30      Quelle: keine      W

**Aufgabe 13.1.2:** Gegen welchen reellen Wert konvergiert die folgende Reihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6 \cdot (-1)^n \cdot 5^{2n}}{(2n+1)!}$$

**Parameter:**

$x_1 =$  Basis im Zähler der Reihe  $x_1 > 1$

$x_2 =$  Faktor im Zähler der Reihe  $x_2 > x_1$

Die Reihe lautet also:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_2 \cdot (-1)^n \cdot (x_1)^{2n}}{(2n+1)!}$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 5$   $x_2 = 6$ .

**Erklärung:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \quad \text{für alle } x \in \mathbf{R}$$

**Rechnung:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!},$$

wenn man  $x$  (unabhängig von  $n$ ) ausklammert. Also ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{\sin x}{x} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6 \cdot (-1)^n \cdot 5^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{6}{5} \sin 5.$$

**Angebotene Lösungen:**

- |  |   |  |  |
|--|---|--|--|
| <input type="checkbox"/> 1 $\frac{6 \cos 5}{2n+1}$         | <input type="checkbox"/> 2 $\sin 30$                      | <input type="checkbox"/> 3 $(2n+2) \cdot 6 \cdot \cos 5$ | <input type="checkbox"/> 4 $(2n+2) \cdot \sin 30$  |
| <input type="checkbox"/> 5 $\cos 30$                       | <input type="checkbox"/> 6 Die Reihe divergiert           | <input type="checkbox"/> 7 $30 \cos 5$                   | <input type="checkbox"/> 8 $\frac{6}{5} \cos 5$    |
| <input checked="" type="checkbox"/> 9 $\frac{6}{5} \sin 5$ | <input type="checkbox"/> 10 $(2n+2) \cdot 6 \cdot \sin 5$ | <input type="checkbox"/> 11 $30 \sin 5$                  | <input type="checkbox"/> 12 $\frac{\cos 30}{2n+1}$ |

**Fehlerinterpretation:**

- |  |                             |
|--|-----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 $\frac{6 \cos 5}{2n+1}$         | DF: $n$ ist Summationsindex |
| <input type="checkbox"/> 2 $\sin 30$                       | DF: 6 nicht ausgeklammert   |
| <input type="checkbox"/> 3 $(2n+2) \cdot 6 \cdot \cos 5$   | DF: $n$ ist Summationsindex |
| <input type="checkbox"/> 4 $(2n+2) \cdot \sin 30$          | DF: $n$ ist Summationsindex |
| <input type="checkbox"/> 5 $\cos 30$                       | DF: falsche Reihe           |
| <input type="checkbox"/> 6 Die Reihe divergiert            | DF: Lösung geraten          |
| <input type="checkbox"/> 7 $30 \cos 5$                     | DF: $x$ nicht ausgeklammert |
| <input type="checkbox"/> 8 $\frac{6}{5} \cos 5$            | DF: falsche Reihe           |
| <input checked="" type="checkbox"/> 9 $\frac{6}{5} \sin 5$ | richtig                     |
| <input type="checkbox"/> 10 $(2n+2) \cdot 6 \cdot \sin 5$  | DF: $n$ ist Summationsindex |
| <input type="checkbox"/> 11 $30 \sin 5$                    | DF: $x$ nicht ausgeklammert |
| <input type="checkbox"/> 12 $\frac{\cos 30}{2n+1}$         | DF: $n$ ist Summationsindex |

|          |          |                        |             |
|----------|----------|------------------------|-------------|
| MV 05    | Blatt 04 | Kapitel 3.3            | Reihenwerte |
| Reihen   | Folgen   | Nummer: 59 0 200504008 | Kl: 14G     |
| Grad: 50 | Zeit: 30 | Quelle: keine          | W           |

**Aufgabe 13.1.3:** Gegen welchen reellen Wert konvergiert die folgende Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 6^{2n}}{5 \cdot (2n)!}$$

**Parameter:**

$x_1 =$  Zähler der Reihe  $x_1 > 2$

$x_2 =$  erstes Glied der Reihe  $x_2 = 1, 2$

$x_5 =$  Faktor im Nenner  $x_5 > 1$

Die Reihe lautet also:  $\sum_{i=x_2}^{\infty} \frac{(-1)^n x_1^{2n}}{x_5 \cdot (2n)!}$

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 6$   $x_2 = 1$ ,  $x_5 = 5$ .

**Erklärung:**

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

**Rechnung:**

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$  damit ist  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 6^{2n}}{(2n)!} = \cos 6$ . Der Faktor 5 im Nenner ist unabhängig von  $n$ , kann also ausgeklammert werden:  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 6^{2n}}{5 \cdot (2n)!} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 6^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{5} \cos 6$ . Die Reihe beginnt bei  $i = 1$ . Damit muss von dem Wert noch 1 abgezogen werden.

$$\frac{1}{5} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 6^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{5} ((\cos 6) - (1)).$$

**Angebotene Lösungen:**

- |  |   |   |  |
|--|---|---|--|
| <input type="checkbox"/> 1 $\sin(\frac{6}{5}) - (-17)$               | <input type="checkbox"/> 2 $\cos(\frac{6}{5}) - (1)$    | <input type="checkbox"/> 3 $\frac{1}{5} ((\sin 6) - (1))$ | <input type="checkbox"/> 4 $\frac{1}{5} \sin 6$              |
| <input checked="" type="checkbox"/> 5 $\frac{1}{5} ((\cos 6) - (1))$ | <input type="checkbox"/> 6 $\cos \frac{6}{5}$           | <input type="checkbox"/> 7 Die Reihe divergiert           | <input type="checkbox"/> 8 $\sin(\frac{6}{5}) - (1)$         |
| <input type="checkbox"/> 9 $\frac{1}{5} ((\sin 6) - (-17))$          | <input type="checkbox"/> 10 $\cos(\frac{6}{5}) - (-17)$ | <input type="checkbox"/> 11 $\sin \frac{6}{5}$            | <input type="checkbox"/> 12 $\frac{1}{5} ((\cos 6) - (-17))$ |

**Fehlerinterpretation:**

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 $\sin(\frac{6}{5}) - (-17)$               | DF: $\frac{1}{5}$ nicht ausgeklammert |
| <input type="checkbox"/> 2 $\cos(\frac{6}{5}) - (1)$                 | DF: $\frac{1}{5}$ nicht ausgeklammert |
| <input type="checkbox"/> 3 $\frac{1}{5} ((\sin 6) - (1))$            | DF: falsche Reihe verwendet           |
| <input type="checkbox"/> 4 $\frac{1}{5} \sin 6$                      | DF: Reihenbeginn nicht beachtet       |
| <input checked="" type="checkbox"/> 5 $\frac{1}{5} ((\cos 6) - (1))$ | richtig                               |
| <input type="checkbox"/> 6 $\cos \frac{6}{5}$                        | DF: $\frac{1}{5}$ nicht ausgeklammert |
| <input type="checkbox"/> 7 Die Reihe divergiert                      | DF: Lösung geraten                    |
| <input type="checkbox"/> 8 $\sin(\frac{6}{5}) - (1)$                 | DF: $\frac{1}{5}$ nicht ausgeklammert |
| <input type="checkbox"/> 9 $\frac{1}{5} ((\sin 6) - (-17))$          | DF: Reihenbeginn falsch beachtet      |
| <input type="checkbox"/> 10 $\cos(\frac{6}{5}) - (-17)$              | DF: $\frac{1}{5}$ nicht ausgeklammert |
| <input type="checkbox"/> 11 $\sin \frac{6}{5}$                       | DF: $\frac{1}{5}$ nicht ausgeklammert |
| <input type="checkbox"/> 12 $\frac{1}{5} ((\cos 6) - (-17))$         | DF: Reihenbeginn falsch beachtet      |

MV 05                      Blatt 01                      Kapitel 2.2                      Summen  
 geometrische              Grundlagen              Nummer: 66 0 2005010008      Kl: 14G  
 Grad: 50 Zeit: 20      Quelle: keine      W

**Aufgabe 13.1.4:** Berechnen Sie  $\sum_{k=0}^n \frac{4^{k+3}}{2^{k-3}}$  für  $n \in \mathbf{N}$ .

**Parameter:**

- $x_1 =$  Basis des Zählers  $x_1 > 1$
- $x_2 =$  Basis des Nenners  $x_1 > x_2 > 1$
- $x_3 =$  Summand im Zähler  $x_3 > 0$
- $x_4 =$  Subtrahend im Nenner  $x_4 > 0$

Die Summe lautet also:  $\sum_{k=0}^n \frac{(x_1)^{k+x_3}}{(x_2)^{k-x_4}}$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_4 = 3$ .

**Erklärung:**

$$\sum_{i=0}^n \frac{p^k}{q^k} = \frac{1 - (\frac{p}{q})^{k+1}}{1 - \frac{p}{q}} .$$

**Rechnung:**

$$\sum_{k=0}^n \frac{4^{k+3}}{2^{k-3}} = \frac{4^3}{2^{-3}} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{4^k}{2^k} = 4^3 \cdot 2^3 \cdot \sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{2}\right)^k = 512 \cdot \frac{1 - (\frac{4}{2})^{n+1}}{1 - \frac{4}{2}}$$

**Angebotene Lösungen:**

- |                            |   |                                       |   |                             |   |                             |                                     |
|----------------------------|---|---------------------------------------|---|-----------------------------|---|-----------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $(1 + \frac{4}{2})^{n+1}$                                 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | $512 \cdot \frac{1 - (\frac{4}{2})^{n+1}}{1 - \frac{4}{2}}$ | <input type="checkbox"/> 3  | $\frac{\frac{4^2}{2} + \frac{4}{2}}{2}$           | <input type="checkbox"/> 4  | $8 \cdot (\frac{4}{2})^{n+1}$       |
| <input type="checkbox"/> 5 | $8 \cdot (1 + \frac{4}{2})^{n+1}$                         | <input type="checkbox"/> 6            | $(\frac{4}{2})^{n+1}$                                       | <input type="checkbox"/> 7  | $\frac{1 - (\frac{4}{2})^{n+1}}{1 - \frac{4}{2}}$ | <input type="checkbox"/> 8  | $512 \cdot (1 + \frac{4}{2})^{n+1}$ |
| <input type="checkbox"/> 9 | $8 \cdot \frac{1 - (\frac{4}{2})^{n+1}}{1 - \frac{4}{2}}$ | <input type="checkbox"/> 10           | $512 \cdot (\frac{4}{2})^{n+1}$                             | <input type="checkbox"/> 11 | $8 \cdot \frac{\frac{4^2}{2} + \frac{4}{2}}{2}$   | <input type="checkbox"/> 12 | $\frac{4^4}{2^4}$                   |

**Fehlerinterpretation:**

- |                                       |   |   |
|---------------------------------------|---|---|
| <input type="checkbox"/> 1            | $(1 + \frac{4}{2})^{n+1}$                                   | DF: Dies ist nicht die Binomische Formel        |
| <input checked="" type="checkbox"/> 5 | $512 \cdot \frac{1 - (\frac{4}{2})^{n+1}}{1 - \frac{4}{2}}$ | richtig   |
| <input type="checkbox"/> 3            | $\frac{\frac{4^2}{2} + \frac{4}{2}}{2}$                     | DF: Dies ist nicht Summe der natürlichen Zahlen |
| <input type="checkbox"/> 4            | $8 \cdot (\frac{4}{2})^{n+1}$                               | DF: Lösung geraten                              |
| <input type="checkbox"/> 5            | $8 \cdot (1 + \frac{4}{2})^{n+1}$                           | DF: Dies ist nicht die Binomische Formel        |
| <input type="checkbox"/> 6            | $(\frac{4}{2})^{n+1}$                                       | DF: Lösung geraten                              |
| <input type="checkbox"/> 7            | $\frac{1 - (\frac{4}{2})^{n+1}}{1 - \frac{4}{2}}$           | DF: Ausklammern vergessen                       |
| <input type="checkbox"/> 8            | $512 \cdot (1 + \frac{4}{2})^{n+1}$                         | DF: Dies ist nicht die Binomische Formel        |
| <input type="checkbox"/> 9            | $8 \cdot \frac{1 - (\frac{4}{2})^{n+1}}{1 - \frac{4}{2}}$   | DF: Falsch ausgeklammert                        |
| <input type="checkbox"/> 10           | $512 \cdot (\frac{4}{2})^{n+1}$                             | DF: Lösung geraten                              |
| <input type="checkbox"/> 11           | $8 \cdot \frac{\frac{4^2}{2} + \frac{4}{2}}{2}$             | DF: Dies ist nicht Summe der natürlichen Zahlen |
| <input type="checkbox"/> 12           | $\frac{4^4}{2^4}$   | DF: Summand angeben                             |

MV 05                      Blatt 04                      Kapitel 3.3                      Reihenwerte  
 Reihen                      Folgen                      Nummer: 70 0 200504007                      Kl: 14G  
 Grad: 50 Zeit: 30                      Quelle: keine                      W

**Aufgabe 13.1.5:** Gegen welchen reellen Wert konvergiert die folgende Reihe?

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$$

**Parameter:**

- $x_1 =$  Zähler der Reihe  $x_1 > 2$
- $x_2 =$  erstes Glied der Reihe  $x_2 = 1, 2, 3$

Die Reihe lautet also:  $\sum_{i=x_2}^{\infty} \frac{x_1^i}{i!}$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 6$   $x_2 = 3$ .

**Erklärung:**

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

**Rechnung:**

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$  damit ist  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{6^n}{n!} = e^6$ . Die Reihe beginnt bei  $i = 3$ . Damit muss vom Ergebnis noch  $1 + 6 + \frac{6^2}{2}$  abgezogen werden. Damit ist

$$\sum_{i=3}^{\infty} \frac{6^n}{n!} = e^6 - 25$$

**Angeborene Lösungen:**

- |   |   |  |   |
|---|---|--|---|
| <input type="checkbox"/> 1 $\frac{1}{1-6} + 1$  | <input type="checkbox"/> 2 $e^6 - 1$              | <input type="checkbox"/> 3 $\sin(6) + 7$ | <input type="checkbox"/> 4 $6^2$          |
| <input type="checkbox"/> 5 Die Reihe divergiert | <input type="checkbox"/> 6 $\sin(6) - 25$         | <input type="checkbox"/> 7 $e^6 - 7$     | <input type="checkbox"/> 8 $e^6$          |
| <input type="checkbox"/> 9 $e^6 + 1$            | <input checked="" type="checkbox"/> 10 $e^6 - 25$ | <input type="checkbox"/> 11 $\ln(6) - 1$ | <input type="checkbox"/> 12 $\cos(6) - 7$ |

**Fehlerinterpretation:**

- |   |                                  |
|---|----------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 $\frac{1}{1-6} + 1$    | DF: falsche Reihe verwendet      |
| <input type="checkbox"/> 2 $e^6 - 1$              | DF: Reihenbeginn falsch beachtet |
| <input type="checkbox"/> 3 $\sin(6) + 7$          | DF: falsche Reihe verwendet      |
| <input type="checkbox"/> 4 $6^2$                  | DF: Lösung geraten               |
| <input type="checkbox"/> 5 Die Reihe divergiert   | DF: Lösung geraten               |
| <input type="checkbox"/> 6 $\sin(6) - 25$         | DF: falsche Reihe verwendet      |
| <input type="checkbox"/> 7 $e^6 - 7$              | DF: Reihenbeginn falsch beachtet |
| <input type="checkbox"/> 8 $e^6$                  | DF: Reihenbeginn nicht beachtet  |
| <input type="checkbox"/> 9 $e^6 + 1$              | DF: Addiert statt subtrahiert    |
| <input checked="" type="checkbox"/> 10 $e^6 - 25$ | richtig                          |
| <input type="checkbox"/> 11 $\ln(6) - 1$          | DF: falsche Reihe verwendet      |
| <input type="checkbox"/> 12 $\cos(6) - 7$         | DF: falsche Reihe verwendet      |

MV 05 Blatt 04 Kapitel 3.3 Reihenwerte  
 Reihen Folgen Nummer: 81 0 200504009 Kl: 14G  
 Grad: 50 Zeit: 30 Quelle: keine W

**Aufgabe 13.1.6:** Gegen welchen reellen Wert konvergiert die folgende Reihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-36)^n}{(2n)!}$$

**Parameter:**

$x_1 =$  Zähler der Reihe  $-x_1 > 1 - x_2 := x_1^2$

Die Reihe lautet also:  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x_1 \cdot x_1)^n}{(2n)!}$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 6$ ,  $x_2 = 36$ .

**Erklärung:**

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{(2n)!} = \cos x$$

**Rechnung:**

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{(2n)!} = \cos x \text{ damit ist } \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-36)^n}{(2n)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 6^{2n}}{(2n)!} = \cos 6.$$

**Angebotene Lösungen:**

- |                            |                      |                             |                 |                                       |         |                             |                  |
|----------------------------|----------------------|-----------------------------|-----------------|---------------------------------------|---------|-----------------------------|------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | cos 36               | <input type="checkbox"/> 2  | -ln 36          | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | cos 6   | <input type="checkbox"/> 4  | -ln 6            |
| <input type="checkbox"/> 5 | e <sup>-6</sup>      | <input type="checkbox"/> 6  | e <sup>36</sup> | <input type="checkbox"/> 7            | sin 36  | <input type="checkbox"/> 8  | -sin 6           |
| <input type="checkbox"/> 9 | Die Reihe divergiert | <input type="checkbox"/> 10 | -sin 36         | <input type="checkbox"/> 11           | -cos 36 | <input type="checkbox"/> 12 | e <sup>-36</sup> |

**Fehlerinterpretation:**

- |                                       |                      |                             |
|---------------------------------------|----------------------|-----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1            | cos 36               | DF: Quadrat nicht beachtet  |
| <input type="checkbox"/> 2            | -ln 36               | DF: Quadrat nicht beachtet  |
| <input checked="" type="checkbox"/> 3 | cos 6                | richtig                     |
| <input type="checkbox"/> 4            | -ln 6                | DF: falsche Reihe verwendet |
| <input type="checkbox"/> 5            | e <sup>-6</sup>      | DF: falsche Reihe verwendet |
| <input type="checkbox"/> 6            | e <sup>36</sup>      | DF: falsche Reihe verwendet |
| <input type="checkbox"/> 7            | sin 36               | DF: Quadrat nicht beachtet  |
| <input type="checkbox"/> 8            | -sin 6               | DF: falsche Reihe verwendet |
| <input type="checkbox"/> 9            | Die Reihe divergiert | DF: Lösung geraten          |
| <input type="checkbox"/> 10           | -sin 36              | DF: Quadrat nicht beachtet  |
| <input type="checkbox"/> 11           | -cos 36              | DF: Quadrat nicht beachtet  |
| <input type="checkbox"/> 12           | e <sup>-36</sup>     | DF: Quadrat nicht beachtet  |

MV 05                      Blatt 04                      Kapitel 3.3                      Reihenwerte  
 Reihen                      Folgen                      Nummer: 85 0 200504010      Kl: 14G  
 Grad: 50 Zeit: 30      Quelle: keine      W

**Aufgabe 13.1.7:** Gegen welchen reellen Wert konvergiert die folgende Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n}$$

**Parameter:**

$x_1$  = erstes Glied der Reihe  $x_1 = 1, 2$   
 $x_2$  = Zähler der Reihe  $x_2 > 2$

Die Reihe lautet also:  $\sum_{n=x_1}^{\infty} \frac{x_2^n}{n}$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 1$        $x_2 = 5$ .

**Erklärung:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \quad \text{für } x \in [-1, 1)$$

**Rechnung:**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n}$  divergiert, weil die Summanden nicht gegen 0 gehen. Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  konvergiert nur für  $x \in [-1, 1)$ .

**Angebotene Lösungen:**

- |                                       |                      |                             |                     |                             |                    |                             |                       |
|---------------------------------------|----------------------|-----------------------------|---------------------|-----------------------------|--------------------|-----------------------------|-----------------------|
| <input type="checkbox"/> 1            | $\frac{1}{1-5}$      | <input type="checkbox"/> 2  | $-\ln(6) + 5$       | <input type="checkbox"/> 3  | ln(6)              | <input type="checkbox"/> 4  | $\frac{1}{1-5} - 7.5$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 5 | Die Reihe divergiert | <input type="checkbox"/> 6  | ln(-4)              | <input type="checkbox"/> 7  | e <sup>5</sup> + 5 | <input type="checkbox"/> 8  | e <sup>5</sup>        |
| <input type="checkbox"/> 9            | ln(-4) + 5           | <input type="checkbox"/> 10 | $\frac{1}{1-5} + 5$ | <input type="checkbox"/> 11 | ln(-4) - 7.5       | <input type="checkbox"/> 12 | $-\ln(-4) + 5$        |

**Fehlerinterpretation:**

|                                       |                       |                                      |
|---------------------------------------|-----------------------|--------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1            | $\frac{1}{1-5}$       | DF: Falsche Reihe verwendet          |
| <input type="checkbox"/> 2            | $-\ln(6) + 5$         | DF: Konvergenzbereich nicht beachtet |
| <input type="checkbox"/> 3            | $\ln(6)$              | DF: Konvergenzbereich nicht beachtet |
| <input type="checkbox"/> 4            | $\frac{1}{1-5} - 7.5$ | DF: Falsche Reihe verwendet          |
| <input checked="" type="checkbox"/> 5 | Die Reihe divergiert  | richtig                              |
| <input type="checkbox"/> 6            | $\ln(-4)$             | DF: Konvergenzbereich nicht beachtet |
| <input type="checkbox"/> 7            | $e^5 + 5$             | DF: Falsche Reihe verwendet          |
| <input type="checkbox"/> 8            | $e^5$                 | DF: Falsche Reihe verwendet          |
| <input type="checkbox"/> 9            | $\ln(-4) + 5$         | DF: Konvergenzbereich nicht beachtet |
| <input type="checkbox"/> 10           | $\frac{1}{1-5} + 5$   | DF: Falsche Reihe verwendet          |
| <input type="checkbox"/> 11           | $\ln(-4) - 7.5$       | DF: Konvergenzbereich nicht beachtet |
| <input type="checkbox"/> 12           | $-\ln(-4) + 5$        | DF: Konvergenzbereich nicht beachtet |

MV 05                      Blatt 03                      Kapitel 3.1                      Grenzwerte  
Keine                      Folgen                      Nummer: 96 0 2005030009                      Kl: 14G  
Grad: 50 Zeit: 20                      Quelle: keine                      W

**Aufgabe 13.1.8:** Gegeben sei die Folge  $a_n = \frac{16(n^2+(-1)^n)}{4n^2+4}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . Finden Sie den Grenzwert  $a$  von  $a_n$  und finden Sie für alle  $0 < \varepsilon < 1$  das minimale  $m$  (abhängig von  $\varepsilon$ ), für das  $|a_m - a| \leq \varepsilon$  gilt. Bitte beachten Sie, dass  $\lceil x \rceil$  die Zahl  $z \in \mathbf{Z}$  ist, für die gilt  $z \geq x$  und  $z$  minimal.

**Parameter:**

$x_1, x_2 =$  Elemente des Bruches,  $\frac{16}{4} =$  Grenzwert  $x_1 \neq x_2$

Die Folge lautet also:  $a_n = \frac{x_1(n^2+(-1)^n)}{x_2n^2+x_2}$

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 16$ ,  $x_2 = 4$ .

**Erklärung:**

$$\frac{a(n^2 + (-1)^n)}{n^2} \rightarrow a \quad .$$

**Rechnung:**

$$\frac{16(n^2 + (-1)^n)}{4n^2 + 4} = \frac{16}{4} \cdot \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 4 \cdot \left(1 + \frac{(-1)^n - 1}{n^2 + 1}\right)$$

$$\text{damit ist } a = 4 \text{ und } |a_n - a| = \left| \frac{16}{4} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^2 + 1} \right| = \begin{cases} 4 \frac{2}{n^2+1} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$4 \frac{2}{n^2+1} \leq \varepsilon \Leftrightarrow 8 \leq \varepsilon(n^2+1) \Leftrightarrow \frac{8}{\varepsilon} - 1 \leq n^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{8}{\varepsilon} - 1} \leq n$$

Sei  $k = \lceil \sqrt{\frac{8}{\varepsilon} - 1} \rceil$ . Wenn  $k$  gerade ist, dann gilt:  $k - 1$  ist ungerade, das heißt  $|a_{k-1} - a| = 0 < \varepsilon$ . Wie findet man also im geraden Fall die nächst kleinere ungerade Zahl, während man im ungeraden Fall konstant bleibt?  $2\lceil \frac{x}{2} \rceil - 1$  leistet genau das Gewünschte. Damit ist  $m = 2\lceil \frac{\sqrt{\frac{8}{\varepsilon} - 1}}{2} \rceil - 1$ .

**Angeborene Lösungen:**

- |                            |   |                             |  |                             |  |  |   |
|----------------------------|---|-----------------------------|--|-----------------------------|--|--|---|
| <input type="checkbox"/> 1 | $m = \lceil \pm \sqrt{\frac{8}{\varepsilon}} \rceil$                    | <input type="checkbox"/> 2  | $m = 2\lceil (\frac{8}{\varepsilon} - 1)^2 \rceil - 1$ | <input type="checkbox"/> 3  | $m = \lceil \varepsilon^2 + 1 \rceil$                      | <input type="checkbox"/> 4             | $m = 2\lceil (\pm \frac{8}{\varepsilon} - 1)^2 \rceil - 1$          |
| <input type="checkbox"/> 5 | $m = \lceil \sqrt{\frac{8}{\varepsilon}} \rceil$                        | <input type="checkbox"/> 6  | $m = \lceil \sqrt{\frac{8}{\varepsilon} - 1} \rceil$   | <input type="checkbox"/> 7  | Folge divergiert   | <input type="checkbox"/> 8             | $m = \lceil \sqrt{\varepsilon} - 1 \rceil$                          |
| <input type="checkbox"/> 9 | $m = 2\lceil \frac{\pm \sqrt{\frac{8}{\varepsilon} - 1}}{2} \rceil - 1$ | <input type="checkbox"/> 10 | $m = 2\lceil (\frac{8}{\varepsilon} - 1)^2 \rceil - 1$ | <input type="checkbox"/> 11 | $m = 2\lceil (\frac{\pm 8}{\varepsilon} - 1)^2 \rceil - 1$ | <input checked="" type="checkbox"/> 12 | $m = 2\lceil \frac{\sqrt{\frac{8}{\varepsilon} - 1}}{2} \rceil - 1$ |

**Fehlerinterpretation:**

- |  |  |  |
|--|--|--|
| <input type="checkbox"/> 1             | $m = \lceil \pm \sqrt{\frac{8}{\varepsilon}} \rceil$           | DF: Lösung geraten   |
| <input type="checkbox"/> 2             | $m = 2 \lceil (\frac{8}{\varepsilon} - 1)^2 \rceil - 1$        | DF: Quadratur ist falsch                                   |
| <input type="checkbox"/> 3             | $m = \lceil \varepsilon^2 + 1 \rceil$                          | DF: Lösung geraten   |
| <input type="checkbox"/> 4             | $m = 2 \lceil (\pm \frac{8}{\varepsilon} - 1)^2 \rceil - 1$    | DF: Quadratur ist falsch                                   |
| <input type="checkbox"/> 5             | $m = \lceil \sqrt{\frac{8}{\varepsilon}} \rceil$               | DF: Lösung geraten   |
| <input type="checkbox"/> 6             | $m = \lceil \sqrt{\frac{8}{\varepsilon} - 1} \rceil$           | DF: 'fast richtig', nur gerade und ungerade nicht beachtet |
| <input type="checkbox"/> 7             | Folge divergiert   | DF: das $(-1)^n$ verschwindet                              |
| <input type="checkbox"/> 8             | $m = \lceil \sqrt{\varepsilon} - 1 \rceil$                     | DF: Lösung geraten   |
| <input type="checkbox"/> 9             | $m = 2 \lceil \pm \sqrt{\frac{8}{\varepsilon} - 1} \rceil - 1$ | DF: $\pm$ ist bei positiven $m$ falsch                     |
| <input type="checkbox"/> 10            | $m = 2 \lceil (\frac{8}{\varepsilon} - 1)^2 \rceil - 1$        | DF: Quadratur ist falsch                                   |
| <input type="checkbox"/> 11            | $m = 2 \lceil (\frac{\pm 8}{\varepsilon} - 1)^2 \rceil - 1$    | DF: Quadratur ist falsch                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> 12 | $m = 2 \lceil \sqrt{\frac{8}{\varepsilon} - 1} \rceil - 1$     | richtig  |

**Allgemeine Hinweise:**

Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware@yahoo.de).

Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: <http://www.vorkurs.de.vu>